Äquivalenzumformungen verstehen

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit gezeigt, sich Äquivalenzumformungen vorzustellen, die sicher nicht jedem Menschen einleuchten wird. Und gerade deshalb steht sie hier! Unterschiedliche Menschen verstehen Mathematik unterschiedlich. Es ist in vielerlei Hinsicht von Vorteil, sich in das Mathematikverständnis anderer hineinzuversetzen. Das sollte in Lerngruppen idealerweise immer wieder stattfinden. Die eigenen Gedanken anderen zu zeigen, macht selbstsicher und stolz. Außerdem kann der individuelle Blickwinkel auf die Mathematik niemals falsch sein.
In der Schulmathematik wird mit einer Äquivalenzumformung eine Gleichung so verändert, dass die veränderte Gleichung dieselbe Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung hat.
Dabei gibt es vor allem 5 Umformungsmöglichkeiten: Auf beiden Seiten der Gleichung das gleiche
1) addieren oder
2) subtrahieren oder beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl ungleich 0
3) multiplizieren oder
4) dividieren. Als letzte Möglichkeit bleibt noch die
5) Termumformung auf nur einer Seite der Gleichung.
Wie kann man sich nun vorstellen, dass eine Äquivalenzumformung die Lösungsmenge nicht ändert?
Wenn Äquivalenzumformungen erklärt werden, geschieht dies meist mit einer Balkenwaage. Deshalb wollen wir hier einen anderen Weg einschlagen und uns ansehen, wie Gleichungen mit ihren Äquivalenzumformungen an der Zahlengeraden aussehen. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$3x - 4 = x + 2$$

zusammen mit ihrer Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3\}$.
Wenn wir für x die Zahl 3 einsetzen, sieht diese Gleichung auf der Zahlengeraden so aus:

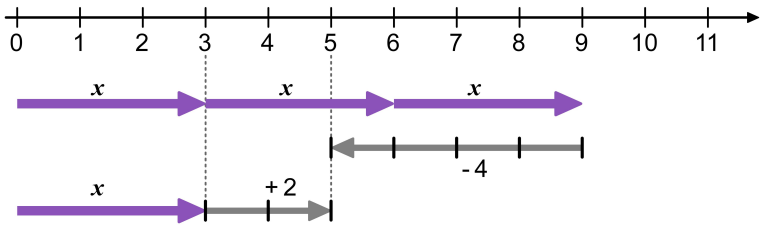

Abb. 1 $3x - 4 = x + 2$

Dass die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 4 = x + 2$ gleich $\mathbb{L} = \{3\}$ ist, bedeutet nicht nur, dass diese Gleichung für $x = 3$ richtig ist, sondern auch, dass sie für alle anderen Zahlen, die wir für x einsetzen könnten, falsch ist. Auch das können wir uns an der Zahlengeraden ansehen. Setzen wir doch mal $x = 3,5$.

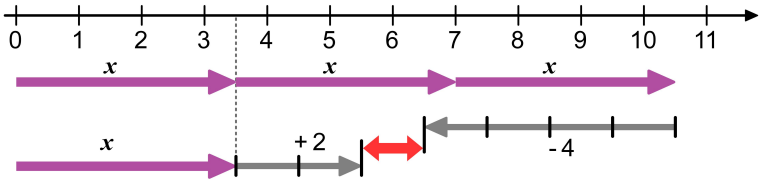

Abb. 2 $3x-4>x+2$

Wie wir sehen, ist die Gleichung nun falsch, weil die linke Seite größer ist als die rechte Seite. Auch wenn wir für x noch größere Zahlen einsetzten, änderte sich daran nichts - was wir uns ohne weitere Graphiken überlegen können.
Setzen wir für x eine kleinere Zahl als 3 ein - z. B. 2,5 - ist die Gleichung auch falsch, weil dann die rechte Seite größer ist als die linke Seite. Und auch diese Situation änderte sich durch das Einsetzen noch kleinerer Zahlen nicht.

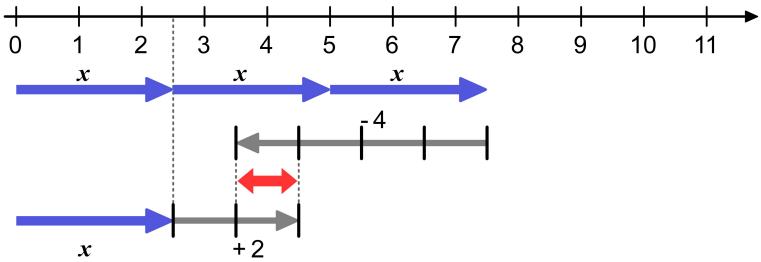

Abb. 3 $3x-4<x+2$

Wir haben nun anschaulich begründet, warum die Zahl 3 tatsächlich die einzige Lösung der Gleichung $3x-4=x+2$ ist. Aber gilt das auch, wenn wir Äquivalenzumformungen auf diese Gleichung anwenden, z. B., wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung x addieren oder subtrahieren? Schließlich wissen wir am Anfang des Lösungsprozesses einer Gleichung nicht, wie groß x sein muss.
Probieren wir doch einfach mal etwas aus! Was passiert, wenn wir in der Situation von Abb. 3 auf beiden Seiten ein x addieren?

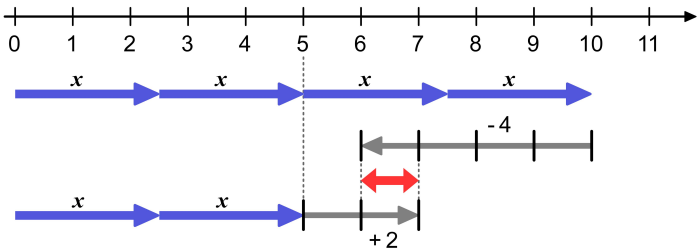

Abb. 4 $4x-4<2x+2$

Wie wir sehen, hat sich der „interessante“ Teil der Gleichung auf der Zahlengerade nach rechts verlagert. Nun gut, dann können wir ja auch auf beiden Seiten $2x$ subtrahieren.

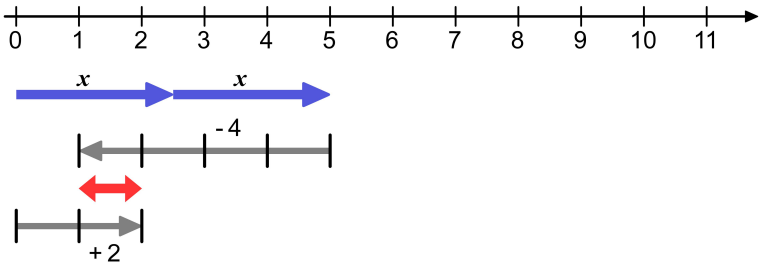

Abb. 5 $2x-4<2$

In allen drei Fällen bleibt der Betrag, um den die linke Seite kleiner ist als die rechte Seite, gleich. Wir könnten also noch beliebig viele x addieren oder subtrahieren, ohne dass sich an der unterschiedlichen Größe der beiden Gleichungsseiten etwas ändern würde.
Schauen wir uns nochmals die Situation in Abb. 2 an und addieren x auf beiden Seiten. Es ist dann - wie in Abb. 2 auch - die linke Seite größer als die rechte Seite und zwar um denselben Betrag.

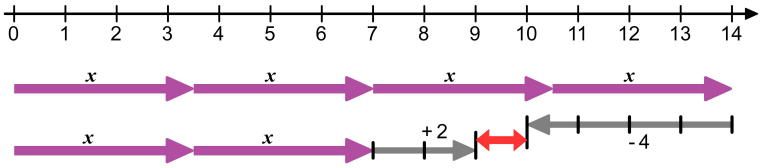

Abb. 6 $4x-4>2x+2$

Die Differenz bleibt auch dann gleich, wenn wir auf beiden Seiten $2x$ subtrahieren. Das bedeutet: Auf diese Weise werden wir die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern, denn der „interessante“ Teil der Gleichung wird durch diese Äquivalenzumformungen gar nicht beeinflusst.

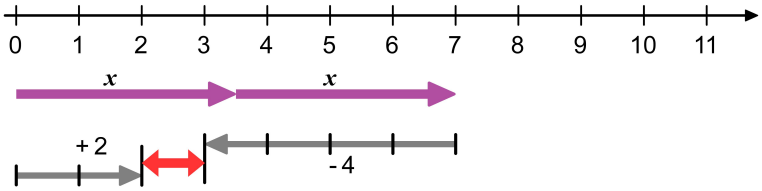

Abb. 7 $2x-4>2$

Nun ist es wohl nicht mehr verwunderlich, dass $x=3$ die richtige Lösung bleibt,

wenn wir die Ausgangsgleichung $3x-4=x+2$ umformen, indem wir auf beiden Seiten x subtrahieren.

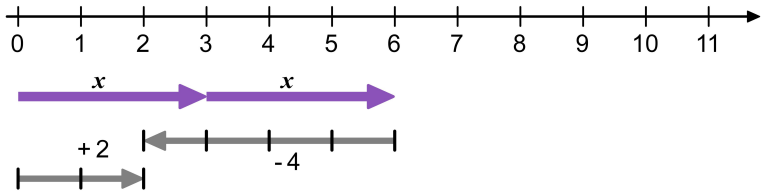

Abb. 8 $2x-4=2$

Beflügelt von unseren Erkenntnissen, können wir nun sogar eine „neue“ Äquivalenzumformung einführen, nämlich die Addition von *irgendetwas* auf beiden Seiten einer Gleichung - hier abgekürzt durch *iwas*.

$$\begin{array}{rrcll} & 2x-4 & = & 2 & \quad |+iwas \\ \Leftrightarrow & 2x-4+iwas & = & 2+iwas & \end{array}$$

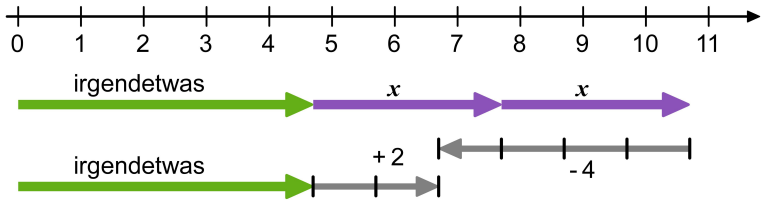

Abb. 9 $3x-4+$ *irgendetwas* $=x+2+$ *irgendetwas*