Einleitung

Es gibt einige Probleme im Bereich der Stochastik und des Stochastikunterrichts. Diese reichen von falschen Behauptungen über fehlende mathematische Prinzipien bis hin zu dysfunktionalen Rechenverfahren.

Die bisherige Stochastik steht zudem auf unsicherer Grundlage: 1) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hofft man, beim vielfachen wiederholen eines Zufallsversuchs möge sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses annähern, damit man auf die langfristige Entwicklung beim häufigen Wiederholen eines Zufallsversuch schließen kann. 2) In der Statistik hofft man, die relative Häufigkeit eines Ereignisses möge in der Nähe der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses liegen, damit man von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen kann.

Mit der neuen Stochastik braucht man nichts mehr zu hoffen. Man ordnet in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einfach jeder möglichen relativen Häuigkeit eine Wahrscheinlichkeit zu. Die Gesetze der großen Zahlen ergeben sich dann (fast) wie von selbst. In der schließenden Statistik ordnet man jeder möglichen Grundgesamtheit, aus der eine Stichprobe gezogen werden kann, eine Wahrscheinlichkeit zu. Auf diese Weise wird die schließende Statistik nicht nur extrem einfach und intuitiv nachvollziehbar, sondern es kann sogar zu jedem Stichprobenumfang eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Grundgesamtheiten gefunden werden. So ist es möglich, schon in der Mittelstufe mathematisch korrekte schließende Statistik zu betreiben.

Der hier gezeigte Weg, Stochastik zu betreiben und zu unterrichten, ist nicht nur mathematisch fehlerfrei, sondern er ist auch schülerzentriert und anschaulich sehr gut zu verstehen. Er basiert auf sehr einfachen Prinzipien, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie auch in der Statistik von der ersten bis zur letzten Unterrichtstunde durchgehend gültig sind. Diese Prinzipien entsprechen unserer menschlichen Intuition und sind damit einfach zu unterrichten. Mit dem neuen Weg in die Stochastik werden alle derzeitigen Probleme des Stochastikunterrichts gelöst.

Die Probleme und deren Lösungen sollen an einem Beispiel gezeigt werden:

Beispiel: Münzwurf

Zur präziseren Vorstellung diene folgendes Beispiel: Der betrachtete Zufallsversuch sei das einmalige Werfen einer Münze. Die beiden möglichen Ergebnisse seien *Kopf* und *Zahl*. Diese werden wir auch mit H und T abkürzen (entsprechend der englischsprachigen Ausdrücke *heads* und *tails*). Die Wahrscheinlichkeiten für H und T sollen jeweils genau gleich $0,5$ sein.

Wir stellen uns nun vor, dieser Zufallsversuch werde beliebig oft durchgeführt. Nach jeder Durchführung soll die relative Häufigkeit $h_n(H)$ von H gebildet werden. Dabei wird die Anzahl der bisherigen Versuche, bei denen H eingetreten ist, durch die Anzahl n aller bisherigen Versuche geteilt. Wenn wir also den Zufallsversuch immer wieder durchführen, entsteht so nicht nur eine Folge von Ergebnissen bestehend aus H und T, sondern auch eine Folge $(h_n(H))_{n\in\mathbb{N}}$ von relativen Häufigkeiten von H, deren Folgenglieder immer größere Anzahlen n von Versuchsdurchführungen berücksichtigen.

Da die üblichen Sprechweisen ungenau sind, sollen sie hier kurz präzisiert werden: Wenn im Weiteren davon die Rede ist, die relative Häufigkeit von H nähere sich der Wahrscheinlichkeit von H, ist damit gemeint, dass sich die Folgenglieder der Folge $(h_n(H))_{n\in\mathbb{N}}$ der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses H, also $\mathcal{P}(H)$, annähern. Diesen Zusammenhang drücken wir manchmal auch durch $(h_n(H))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ aus.

Analog gilt dies auch für andere Sprechweisen wie: „Die relative Häufigkeit pendelt sich ein." oder „Die relative Häufigkeit stabilisiert sich." Gemeint ist damit dann nicht eine einzige relative Häufigkeit, sondern die Folgenglieder der Folge $(h_n(H))_{n\in\mathbb{N}}$.

Probleme und Lösungen

1) *Problem*: Es wird im Stochastikunterricht behauptet, nach vielen Versuchsdurchführungen müsse sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses $h(E)$ der Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(E)$ des Ereignisses annähern. Also z. B. müsse sich die relative Häufigkeit von H immer mehr der Zahl $0,5$ annähern, wenn eine Münze immer wieder geworfen wird. Manchmal sagt man auch, die relative Häufigkeit konvergiere gegen die Wahrscheinlichkeit oder behauptet sogar, durch das empirisches Gesetz der großen Zahlen sei diese Aussage sichergestellt.

Diese Behauptung ist schlicht und ergreifend falsch! Wie man in jedem Lehrwerk zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie nachlesen kann, konvergiert $(h_n(H))_{n\in\mathbb{N}}$ eben n i c h t gegen $\mathcal{P}(E)$. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} h_n(E) = \mathcal{P}(E) \tag{1}$$

für die Ereignisse E von Zufallsversuchen gelten würde, bräuchten wir weder das schwache Gesetz der großen Zahlen (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit), noch das starke Gesetz der großen Zahlen (fast sichere Konvergenz) und wir bräuchten ebenfalls alle statistischen Verfahren wie die Intervallschätzung oder den Hypothesentest nicht.

Lösung: Möchte man die falsche Behauptung der Annäherung der relativen Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit vermeiden, könnte man sagen, was tatsächlich gilt - und das sind die Gesetze der großen Zahlen. Damit steht man aber vor dem nächsten Problem: In der Form, wie diese Gesetze in der Universitätsmathematik vorkommen, sind sie für die Schulmathematik und erst recht für den Anfangsunterricht der Stochastik völlig ungeeignet.

Um dem abzuhelfen, könnten wir zumindest die Hauptaussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen in einer Sprache formulieren, die zum Schulunterricht passt. Statt also fälschlicherweise zu behaupten, nach vielfachem Münzwurf *müsse* die relative Häufigkeit von H in der Nähe der Wahrscheinlichkeit von H liegen, könnten wir richtigerweise feststellen, es sei *wahrscheinlich*, dass nach vielfachem Münzwurf die relative Häufigkeit von H in der Nähe der Wahrscheinlichkeit von

H liege. Nun ist zwar die Aussage richtig, aber wie wir noch unter 2), 3), 4) und 8) sehen werden, gibt es weitere Probleme, die durch den Austausch eines Wortes nicht gelöst sind. Für einen Gegenentwurf zur gegenwärtig in Schulen unterrichteten Stochastik müssen wir also etwas mehr investieren als nur eine Sprechweise.

Deshalb wird in diesem Buch eine Möglichkeiten gezeigt, wie die Idee des schwachen Gesetzes der großen Zahlen schon von der ersten Unterrichtsstunde an gelehrt werden kann. Dafür brauchen wir nur ein paar blaue und rote Kugeln aufzumalen und abzuzählen. Dieser anschauliche Zugang wird dann mehr und mehr mit mathematischen Denkweisen erweitert, bis wir eine intuitive und plastische Darstellung sogar des starken Gesetzes der großen Zahlen erhalten.

2) *Problem*: Die falsche Behauptung aus 1) wird dazu verwendet, das langfristige Verhalten von Zufallsversuchen vorauszusagen. Schüler müssen dann auf Fragen wie: „Wo wird sich die relative Häufigkeit des Ereignisses E auf lange Sicht befinden?“ die falsche Antwort geben: „Die relative Häufigkeit von E wird gleich der Wahrscheinlichkeit von E sein.“

Lösung: Es wird hier ein Modell gezeigt, mit dem wir das langfristige Verhalten von Zufallsversuchen (fast) direkt sehen können. Dabei werden die Anzahlen der verschiedenen Kombinationen von Ergebnissen einander gegenübergestellt. Erstellt man solche Schaubilder für unterschiedliche Anzahlen von Versuchsdurchführungen, kann man auch ohne einen mathematischen Formalismus zu bemühen eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit erkennen. Das Schöne daran ist, dass diese Gesetzmäßigkeit schon nach wenigen Versuchsdurchführungen sichtbar ist. Darüber hinaus ermöglicht das Modell Schülern die Bezüge zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten auch bei sehr vielen Versuchsdurchführungen zu verstehen.

3) *Problem*: Die falsche Behauptung aus 1) widerspricht der Intuition. Wenn wir eine faire Münze 100-mal werfen, wird wohl ca. 50-mal H und ca. 50-mal T angezeigt werden. Aber *muss* das auch so sein? Sicher nicht! Denn wenn es so sein müsste, wäre das Werfen einer Münze kein Zufallsversuch und die Münze bräuchte ein Gedächtnis, damit sie, wenn sie in den ersten Würfen „zufälligerweise“ zu häufig H angezeigt hat, in den folgenden Würfen vermehrt T anzeigen kann, um das Verhältnis von H und T bis zum 100. Wurf wieder auszugleichen.

Lösung: Was ist also richtig? Dass die Münze beim 100-maligen Werfen z. B. viel weniger als 50-mal H anzeigt, ist nicht unmöglich, sondern nur unwahrscheinlich. Das sagt uns schon unsere Erfahrung mit Zufallsversuchen. Z. B. haben die meisten Menschen, die regelmäßig Lotto spielen, noch nie 6 Richtige gehabt; das heißt aber natürlich nicht, dass es unmöglich ist, die richtigen Zahlen anzukreuzen. Wir werden hier den Spekulationen über das langfristige Verhalten von Zufallsversuchen ein Prinzip entgegensetzen, dass die Angelegenheit vom Kopf auf die Füße stellt: Wir werden j e d e r Anzahl von Versuchsdurchführungen die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen relativen Häufigkeiten zuordnen können - unabhängig davon, ob es um sehr wenige oder sehr viele Versuchsdurchführungen geht. Dabei werden wir sehen, dass keine einzige relative Häufigkeit unmöglich ist und es lediglich relative Häufigkeiten gibt, die wahrscheinlicher sind als andere.

4) *Problem*: Die falsche Behauptung aus 1) wird dafür verwendet, um von der re-

lativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit zu schließen. Es wird z. B. ein Quader, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet sind (Riemer-Quader), mehrmals geworfen und jeweils die obenliegende Zahl notiert. Die relative Häufigkeit einer Zahl wird dann als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit dieser Zahl verwendet.

Wenn Aussage 1) gelten würde, wäre dieses Vorgehen vernünftig. Da aber auch nach sehr vielen Versuchen die relative Häufigkeit eines Ereignisses nicht in der Nähe der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses liegen muss, ist dieses Verfahren sinnlos. Wir Menschen haben keine Möglichkeit zu erkennen, wie nahe eine konkrete relative Häufigkeit eines Ereignisses an der Wahrscheinlichkeit ist, wenn die Wahrscheinlichkeit nicht bekannt ist. Wenn wir z. B. eine Münze 10-mal werfen und wir 10-mal H erhalten, kann diese Ergebnisfolge durch eine faire oder durch eine manipulierte Münze erzeugt worden sein.

Dass das allgemein bekannt ist, kann man auch an den üblichen Verfahren der schließenden Statistik erkennen, die wir alle nicht bräuchten, wenn sich die relative Häufigkeit nach vielen Versuchsdurchführungen der Wahrscheinlichkeit annähern müsste.

In diesem Zusammenhang sei deutlich darauf hingewiesen, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer, der manchmal so aussieht, als werde einfach die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit gleichgesetzt, eine völlig andere Logik hat, weil mit diesem Verfahren *die* Grundgesamtheit gesucht wird, aus der mit der höchsten Wahrscheinlichkeit eine Stichprobe mit der vorliegenden relativen Häufigkeit gezogen werden kann. Wenig überraschend ist dann, dass dabei eine solche Grundgesamtheit herauskommt, deren Grundgesamtheitsanteil der relativen Häufigkeit am nächsten kommt. Haben wir z. B. aus einer Box mit 10 Kugeln, die entweder rot oder blau sind, 100-mal gezogen und dabei eine relative Häufigkeit roter Kugeln von 70% erhalten, können wir diese Stichprobe mit der höchsten Wahrscheinlichkeit aus *der* Box ziehen, in der 3 Kugeln blau und 7 Kugeln rot sind.

Lösung: Die gültigen Verfahren der schließenden Statistik setzen allesamt mathematischen Lehrstoff voraus, wie er im Anfangsunterricht der Stochastik nicht zur Verfügung steht. Wir können aber kaum auf die schließende Statistik verzichten und Stochastik nur in eine Richtung, nämlich von der Wahrscheinlichkeit zur relativen Häufigkeit, betreiben, weil die Frage nach den Bezügen zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit nur durch eine Betrachtung beider Richtungen sinnvoll beantwortet werden kann.

In diesem Buch wird deshalb die direkt schließende Statistik vorgestellt, die es ermöglicht, mit geringsten Anforderungen an das Vorwissen mathematisch korrekte Schlüsse von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit - oder, wie es meistens genannt wird, von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit - durchzuführen. Dazu werden wir bei gegebener Stichprobe jeder möglichen Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe hätte gezogen werden können, direkt eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Dabei brauchen wir uns nicht auf große Stichproben oder viele Versuchsdurchführungen zu beschränken, denn nach dieser Methode erzeugt jede noch so kleine Stichprobe eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Grundgesamtheiten. Selbstverständlich wird aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung aussagekräftiger, je größer die Stichprobe ist.

5) *Problem*: Die in der Oberstufe gelehrte Intervallschätzung als Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit empfinden die meisten Schüler als unlogisch, weil damit eben nicht geschätzt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gegebene Stichprobe aus bestimmten möglichen Grundgesamtheiten gezogen wurde, sondern weiterhin ausgehend von bestimmten Grundgesamtheiten die Wahrscheinlichkeiten der Stichprobe errechnet werden. Das kann man auch daran erkennen, dass viele Schüler das z. B. 95%-Konfidenzintervall als Wahrscheinlichkeit missverstehen, mit der sich die Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe gezogen wurde, in diesem Intervall befindet.

Unlogisch ist außerdem die oftmals mathematisch wenig motivierte Wahl des Konfidenzintervalls als ein 95%-Intervall. Ebenso verhält es sich mit den Zuordnungen der möglichen Grundgesamtheiten an den Rändern des Konfidenzintervalls. Dort befindet sich eine Grundgesamtheit, die zum Konfidenzintervall gehört, direkt neben einer anderen, sehr ähnlichen Grundgesamtheit, die aber nicht dazugehören darf. Viele Schüler verstehen intuitiv, dass es hier graduelle Unterschiede geben müsste, um sinnvoll schätzen zu können.

Lösung: Die hier vorgestellte direkt schließende Statistik behebt alle diese Mängel, indem den möglichen Grundgesamtheiten Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, die höher sind, je näher der Grundgesamtheitsanteil bei der relativen Häufigkeit liegt. Nebenbei schließt man auf diese Weise auch in der „richtigen Richtung“, nämlich von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, weil ausgehend von der gegebenen Stichprobe den möglichen Grundgesamtheiten Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.

6) *Problem*: Der in der Oberstufe gelehrte Hypothesentest ist fehlerhaft. Zum Lehrstoff gehört sogar die zahlenmäßige Angabe des Fehlers erster und zweiter Art. Zwar liegt es an der Systematik des Hypothesentests, dass sich solche Fehler nicht vermeiden lassen, namentlich dann, wenn die relative Häufigkeit der Stichprobe stark vom Grundgesamtheitsanteil der Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe tatsächlich gezogen wurde, abweicht. Unbefriedigend bleibt die Situation für Schüler aber dennoch, müssen sie doch mit einem Verfahren umgehen, dass sich als besseres Raten entpuppt und somit so ganz untypisch für das ist, was sie bisher in der Mathematik kennengelernt haben.

Lösung: Mit der direkt schließenden Statistik haben wir ein Verfahren, welches mit einfachen Mitteln qualitativ viel hochwertigere Informationen zur Verfügung stellt als sie ein Hypothesentest liefern kann. Mit Hilfe der angepassten Likelihood-Funktion können wir z. B. angeben, wie weit die Hypothese vom Maximum der Funktion entfernt ist oder angeben, wie viel Wahrscheinlichkeit sich links und rechts der Hypothese befindet. Diese Angaben sind in der Praxis viel sinnvoller als die Ergebnisse eines Hypothesentests und vor allem können sie nicht falsch sein.

7) *Problem*: Auch wenn in der Wahrscheinlichkeitstheorie der Begriff „Zufall“ nicht definiert wird, ist eine solche Definition für den Schulstoff unabdingbar. Oftmals wird ein Zufallsversuch beschrieben als Versuch, dessen Ergebnisse nicht vorhergesagt werden können. Das führt immer wieder zu der Diskussion, ob z. B. die

Ergebnisse eines Münzwurfs nicht doch berechnet werden können, wenn man genau genug weiß, wie die Münze geworfen wird. Außerdem ist die Situation für Schüler doch recht kümmerlich, als ersten Begriff aus dem Reich der Stochastik einen solchen kennenzulernen, der die Unfähigkeit des Menschen, etwas zu berechnen, zum Thema hat.

Lösung: Ein objektiv zufälliges Ereignis wird gemeinhin definiert als Ereignis ohne Ursache. Obwohl es sich so anhören mag, als seien solche Ereignisse nur theoretisch vorstellbar, gibt es eine Methode, etwas zu erleben, was diesem Zufall sehr nahe kommt: Eine Entscheidung ohne Wissen. Z. B. hat man beim Versuch „Lose ziehen“ keine Information darüber, welches der Lose ein Gewinnlos ist. Möchte man ein Los ziehen, wird man sich also ohne jegliche sinnvolle Argumentation - sprich: Ursache - entscheiden müssen. Oder wenn wir eine Münze werfen, entscheiden wir uns dafür, die Münze auf eine bestimmte Art zu werfen, ohne zu wissen, wie wir werfen müssen, damit eine bestimmte Seite oben liegen wird. Wir werden feststellen, dass alle relevanten Zufallsversuche, die in der Schulmathematik vorkommen, durch diese Definition abgedeckt sind.

Mit einer solchen Definition bekommen Schüler ein sehr gutes Gefühl dafür, was Zufall ist - unabhängig von der manchmal etwas geschraubten Beredung, inwieweit Entscheidungen ohne Ursache menschlich überhaupt möglich sind.

8) *Problem*: Die beiden gängigen Definitionen der Wahrscheinlichkeit haben erhebliche Mängel. Die Laplace-Wahrscheinlichkeit setzt voraus, dass alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, um dann die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses als reziproken Wert der Anzahl der Elemente der Ergebnismenge zu definieren. Das ist dann aber eine Zirkeldefinition.

Die andere Definition der Wahrscheinlichkeit verwendet die falsche Behauptung aus 1). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses soll demnach der Wert sein, zu dem die relative Häufigkeit des Ereignisses strebt, wenn der Versuch oft durchgeführt wird. Da aber die relative Häufigkeit nach endlich vielen Versuchsdurchführungen nicht zu einem Wert streben muss, haben wir auch keine Definition.

Allerdings gibt es den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sich auf Grenzwerte bezieht, wie sie in den Gesetzen der großen Zahlen vorkommen. Da aber im Anfangsunterricht der Stochastik weder die analytische Konvergenz und schon gar nicht die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit oder die fast sichere Konvergenz zur Verfügung stehen, ist dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff für den Schulunterricht gänzlich ungeeignet.

Lösung: In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Wahrscheinlichkeiten Werte einer normierten, messbaren Funktion von einem Mengensystem in die reellen Zahlen. Bricht man diese Definition auf den Schulstoff der 7. Klasse herunter, gelangt man zu Anteilen, wie sie schon in der Bruchrechnung, in der Prozentrechnung und im Dreisatz vorkommen. Mit dieser sehr elementaren Definition kommen wir erstaunlich weit und können damit sogar (direkt) schließende Statistik betreiben. Außerdem können wir die Anteile problemlos auf überabzählbare Ergebnismengen wie z. B. Flächen anwenden, was mit der Laplace-Definition nicht möglich ist. Der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik wird dann keine Ungenauigkeit mehr anhaften, weil eine Wahrscheinlichkeit in diesem System ein genau zu berechnender Anteil ist. Das gleiche gilt für Prognosen und Schätzungen. Auch diese werden wir als Anteile definieren können.

Neuer Ansatz
Angesichts der aufgelisteten Probleme brauchen wir einen neuen Ansatz, um Stochastik mathematisch korrekt, intuitiv verständlich und lebensnah unterrichten zu können. Das wird gelingen, indem wir jeder Grundgesamtheit die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Stichproben zuordnen (bzw. jedem Zufallsversuch alle möglichen Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten zuordnen) und indem wir jeder Stichprobe die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Grundgesamtheiten zuordnen. Das sind extrem einfache Prinzipien. Wir werden dabei ganz vorne anfangen - mit einem Stichprobenumfang von 1. Dann brauchen wir nicht darüber zu spekulieren, was bei ganz vielen Versuchsdurchführungen passieren könnte. Dadurch wird der Stochastik und insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr der Ruf anhaften, dies sei das Gebiet der Mathematik, in dem alles ungenau sei und man nicht so genau Bescheid wisse.

Darüber hinaus werden wir auch die beiden Grundfragen der Stochastik beantworten können. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung prognostizieren wir die Zukunft und müssen uns deshalb die Frage gefallen lassen:

Was wissen wir über die Zufallsversuche,
die wir noch nicht durchgeführt haben?

In der Statistik schließen wir von einer (meist kleinen) Stichprobe auf eine (meist große) Grundgesamtheit. Daher sollten wir uns fragen: Was wissen wir über die Elemente der Grundgesamtheit, die wir nicht gezogen haben? Oder umformuliert für den Fall einer Meinungsumfrage:

Was wissen wir über die Menschen, die wir nicht gefragt haben?

Mit den oben beschriebenen Prinzipien können wir solche Fragen leicht beantworten. Außerdem werden wir mit diesen Prinzipien einen Hauptsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einen Hauptsatz der Statistik formulieren können, die die Kernanliegen beider mathematischer Gebiete in sehr einfacher Sprache zusammenfassen.

0.1 Das Standardmodell

Im Folgenden werden wir ein Standardmodell verwenden, welches genauso gut zur Wahrscheinlichkeitsrechnung wie auch zu Statistik passt: Es ist das zufällige Ziehen von Kugeln aus einer Box. Dazu präzisieren wir hier ein paar Begriffe.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir einen *Zufallsversuch* mit mehreren Ausgängen. Die Ausgänge heißen *Ergebnisse*. Eine Menge von Ergebnissen heißt *Ereignis*. Enthält die Menge nur ein einziges Ergebnis, ist diese Menge ebenfalls ein Ereignis. Ein Ereignis soll eintreten, wenn ein Element des Ereignisses bei der Durchführung des Zufallsversuchs eintritt.

Wir ordnen Ereignissen *Wahrscheinlichkeiten* zu.

Führen wir einen Zufallsversuch mehrmals durch, können wir die *relative Häufigkeit* eines Ereignisses bilden. Dazu teilen wir die Anzahl der Versuchsdurchführungen, in denen das Ereignis eingetreten ist, durch die Anzahl aller Versuchsdurchführungen.

In der Statistik betrachten wir meist eine bestimmte Art von Zufallsversuchen, nämlich das zufällige Ziehen eines Elements aus einer Grundgesamtheit. Wir können diesen Zufallsversuch mehrmals unter gleichen Bedingungen durchführen, weil wir in der Regel das gezogene Element in die Grundmenge zurücklegen, bevor wir ein weiteres Mal zufällig aus der Grundgesamtheit ziehen. Schreiben wir uns die gezogenen Elemente der Reihe nach auf, bildet die Menge aller notierten Elemente eine *Stichprobe*.

Haben wir eine Stichprobe gezogen, können wir die relative Häufigkeit eines Ereignisses bilden, in dem wir die Anzahl der Züge, bei denen das Ereignis aufgetreten ist, durch die Anzahl aller Züge teilen.

Um beiden Sichtweisen gerecht zu werden, werden wir einen Standard-Zufallsversuch betrachten: Das zufällige Ziehen einer Kugel aus einer Box mit nummerierten Kugeln, von denen manche blau und manche rot sind.

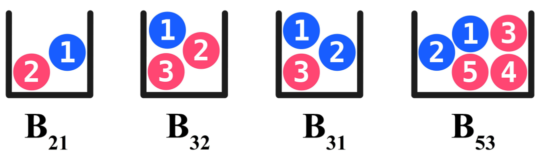

Abb. 1 Boxen mit blauen und roten Kugeln

Das Standardmodell des Kugeln-Ziehens ist auch deshalb passend, weil beide Perspektiven in diesem Modell vereint werden können: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir nach mehrmaliger Versuchsdurchführung eine relative Häufigkeit, in der Statistik haben wir in der formal gleichen Situation eine Stichprobe. Dass z. B. das mehrmalige Werfen eines Würfels im Prinzip das gleiche ist wie eine Meinungsumfrage, ist einfacher zu verstehen, wenn das Ziehen von Kugeln als Standardmodell verwendet wird.

Das Werfen einer fairen Münze ist in diesem Modell das Ziehen aus der Box $\mathbf{B}_{21}$, also der Box, die eine blaue und eine rote Kugel enthält. Das Werfen eines idealen Würfels ist stochastisch gleich dem Ziehen aus einer Box mit 6 nummerierten Kugeln.

Für alle statistischen Überlegungen gehen wir umgekehrt vor: Wir haben aus einer Box mehrmals blaue und/oder rote Kugeln gezogen und wir wollen schätzen, wie groß der Anteil der roten Kugeln in der Box ist, was wir meist als Schätzen der Wahrscheinlichkeit für „rot“ bezeichnen werden. (Wir könnten auch nach dem Anteil der blauen Kugeln fragen, entscheiden uns aber aus reiner Willkür für „rot“.) Den Anteil der roten Kugeln in der Box bezeichnen wir auch als *Grundgesamtheitsanteil*. Die Wahrscheinlichkeit für „rot“ ist also gleich dem Grundgesamtheitsanteil der roten Kugeln. Um die Wahrscheinlichkeit zu schätzen, werden wir aber nicht raten müssen, sondern wir werden einfach allen möglichen Boxen mit ihren unterschiedlichen Anteilen roter Kugeln Wahrscheinlichkeiten zuweisen und zwar in völlig eindeutiger Weise, indem wir die Wahrscheinlichkeiten der Boxen ausrechnen. An keiner Stelle im Lehrstoff werden wir dabei auf die (unwahre) Behauptung zurückgreifen müssen, nach vielen Zügen von Kugeln müsse der Anteil der roten Kugeln innerhalb der gezogenen Kugeln so ähnlich sein wie der Anteil der roten Kugeln in der Box, aus der gezogen wurde.

Weiter werden wir mit diesem Standardmodell alle Schätzungen von Wahrscheinlichkeiten mit endlich vielen Abstufungen und alle Stichproben aus endlichen Grundgesamtheiten modellieren können. Erst wenn es um stetige Wahrscheinlichkeitsdichten geht, werden wir uns von den Boxen verabschieden müssen. Aber auch das wird nicht schwer fallen, haben wir doch schon viel früher Wahrscheinlichkeiten über Flächenanteile bestimmt.