Unendlich breite Fläche mit endlichem Flächeninhalt

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir unter anderem die Flächen berechnen, die sich zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse in bestimmten Grenzen befinden. Das funktioniert manchmal aber auch, wenn z. B. die rechte Grenze gegen unendlich geht. Dann entsteht eine unendlich breite Fläche, die einen endlichen Flächeninhalt haben kann.

Aber wie kann das sein? Muss eine Fläche, die unendlich breit ist, nicht auch einen unendlich großen Flächeninhalt haben?

Unsere Intuition sagt uns: Auch wenn z. B. ein Rechteck nur eine „geringe“ Höhe hat, so wächst der Flächeninhalt aber doch über alle Grenzen, wenn das Rechteck immer breiter wird.

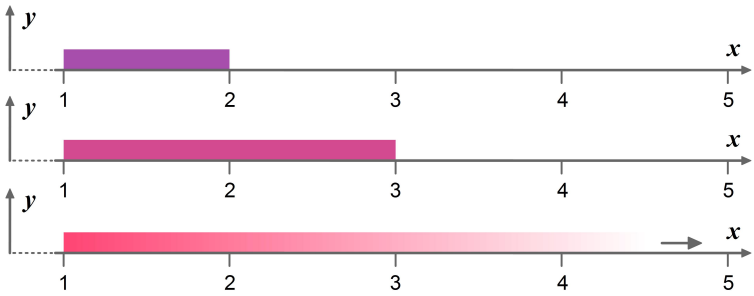

Abb. 1 Unendlich wachsender Flächeninhalt

Schauen wir uns das an einem konkreten Beispiel an: Hier haben wir einen Teil des Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = 0,5^x$.

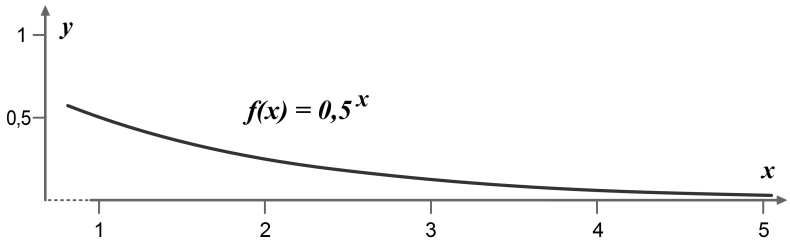

Abb. 2 Funktionsgraph von $f(x) = 0,5^x$

Wir können nun angeben, wie groß der Flächeninhalt der blauen Fläche ist.

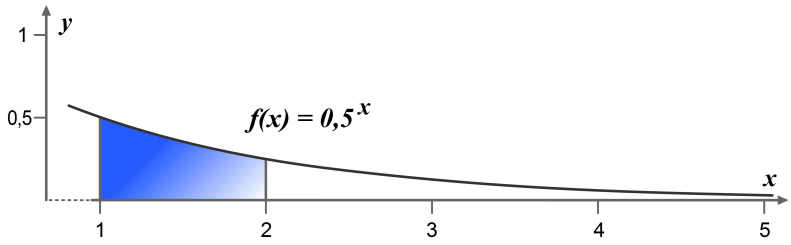

Abb. 3 Fläche zwischen Graph und x-Achse in den Grenzen von 1 bis 2

Mathematisch sieht das dann so aus:

$$\int_1^2 0,5^x dx = \left[-\frac{1}{ln(2)} \cdot 0,2^x \right]_1^2 \approx 0,3607$$

Die blaue Fläche hat also einen Flächeninhalt von ungefähr 0,3607 Flächeneinheiten. Wir können uns nun überlegen, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn wir die rechte Grenze der Fläche immer weiter nach rechts verschieben. Dann entsteht eine Fläche, die durch den grünen Bereich dargestellt ist.

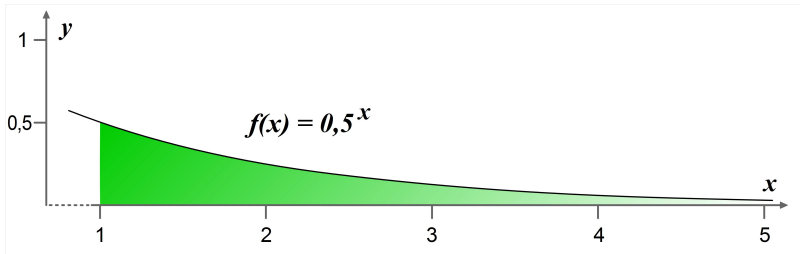

Abb. 4 Fläche zwischen x-Achse und Graph von $f(x) = 0,5^x$

Je weiter wir die rechte Grenze nach rechts verschieben, desto breiter wird die Fläche und desto größer wird der Flächeninhalt. Trotzdem wird der Flächeninhalt nicht unendlich groß!
Es kann schwierig sein, sich das vorzustellen. Vielleicht liegt das an der Denkweise, wie sie in der Redewendung "Der Tropfen, der das Fass zum überlaufen bringt.“ zum Ausdruck kommt: Auch wenn das, was immer wieder zum Inhalt eines Fasses hinzugefügt wird, sehr klein ist - z. B. so klein wie ein Tropfen - so wächst die Wassermenge dennoch über alle Grenzen, wenn man nur genügend oft einen Tropfen hinzufügt.
Im Fall unserer Funktion können wir uns vorstellen, wie wir zur blauen Fläche die Fläche zwischen 2 und 3 hinzufügen, dann die Fläche zwischen 3 und 4, die Fläche zwischen 4 und 5 usw. Dann wird zwar das, was hinzugefügt wird, immer kleiner, trotzdem wird aber die gesamte Fläche immer größer. Wie kann also etwas, dass unendlich oft größer wird, *nicht* unendlich groß werden?

Um das Prinzip zu verstehen, wollen wir die grüne unendlich breite Fläche gedanklich mit einem einzigen Blatt Papier überdecken. Wir nehmen also ein quadratisches Blatt Papier mit der Seitenlänge 1 und legen es über das Intervall von 1 bis 2.

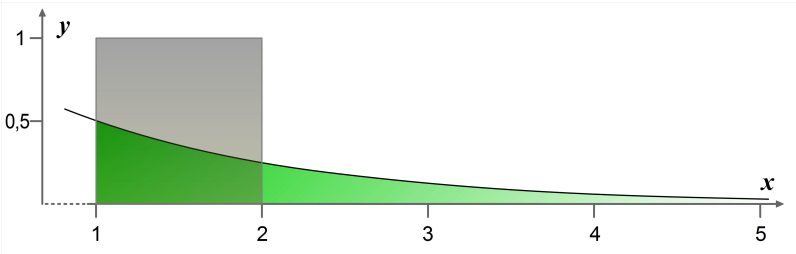

Abb. 5 Eine Flächeneinheit

Nun halbieren wir das Blatt ...

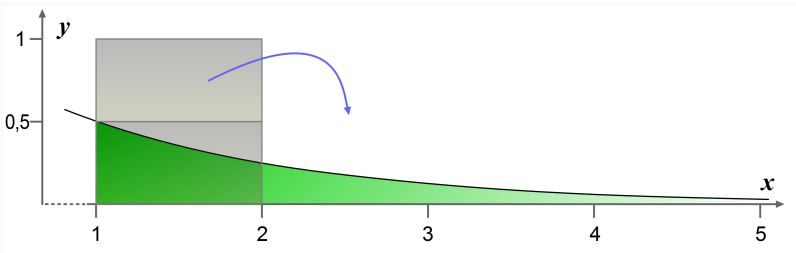

Abb. 6 Eine Flächeneinheit in zwei Hälften übereinander

... und legen die obere Hälfte neben die untere Hälfte.

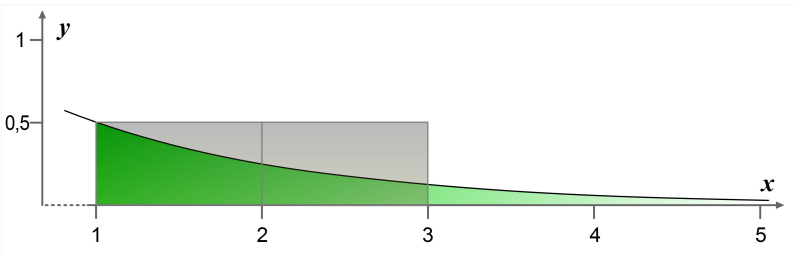

Abb. 7 Eine Flächeneinheit in zwei Hälften nebeneinander

Nun halbieren wir die rechte Hälfte ...

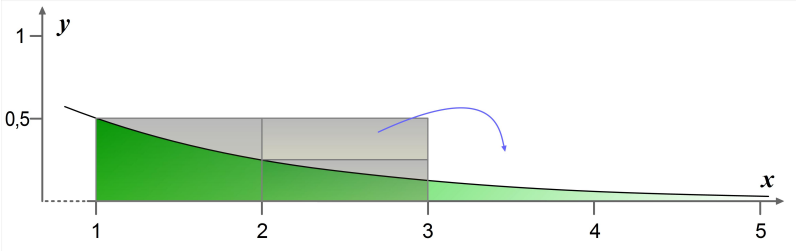

Abb. 8 Die zweite Hälfte in zwei Hälften übereinander

... und legen die obere Hälfte rechts neben die untere Hälfte.

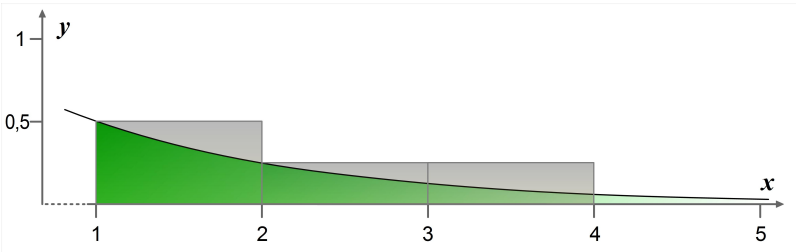

Abb. 9 Die zweite Hälfte in zwei Hälften nebeneinander

Das können wir - zumindest gedanklich - immer weiter so machen: Rechtes Blatt halbieren ...

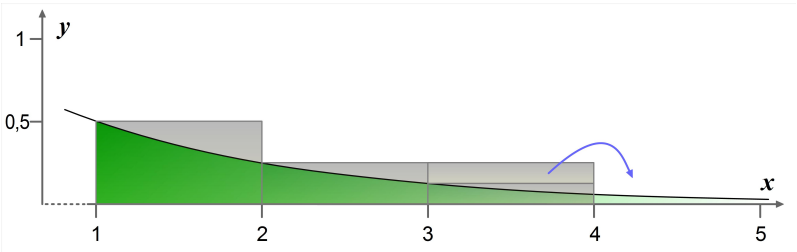

Abb. 10 Die zweite Hälfte der zweiten Hälfte in zwei Hälften übereinander

... und die obere Hälfte rechts neben die unter Hälfte legen.

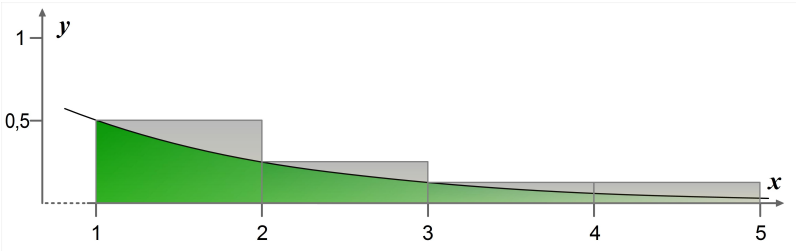

Abb. 11 Die zweite Hälfte der zweiten Hälfte in zwei Hälften nebeneinander

Auf diese Weise können wir die gesamte unendlich breite grüne Fläche überdecken. Dabei ist die Fläche des Papiers größer als die grüne Fläche. Deshalb muss der Flächeninhalt der grünen Fläche sogar kleiner als 1 sein. Mit der Integralrechnung können wir das ausrechnen:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n 0,5^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{ln(2)}\cdot 0,5^x\right]_1^n = \frac{1}{2\cdot\ln(2)} \approx 0,7213$$

Mit dieser etwas simplen Veranschaulichung können wir verstehen, wie etwas - wie hier der Flächeninhalt - immer größer werden kann, ohne unendlich groß zu werden. Das geht z. B. dann, wenn das, was hinzukommt, auf geeignete Weise immer kleiner wird.

Dabei bedeutet „auf geeignete Weise“ nicht nur, dass das, was pro Einheit auf der x-Achse hinzukommt, gegen 0 gehen muss. Es muss auch „schnell genug“ gegen 0 gehen. Ein Beispiel für „nicht schnell genug“ ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Ist die linke Integrationsgrenze z. B. 1 und geht die rechte Integrationsgrenze gegen unendlich, geht zwar das, was pro Einheit auf der x-Achse hinzukommt, gegen 0, aber der Flächeninhalt geht trotzdem gegen unendlich.