Bruchrechnung

Eine vollständige visuelle Begründung aller Bruchrechenregeln auf Basis der Bruchstreifen

Martin Wabnik

Inhaltsverzeichnis

1 Brüche **2**
1.1 Definitionen . . . 2
1.2 Weitere Eigenschaften . . . 4
1.3 Bruchstreifen . . . 7

2 Eigenschaften von Brüchen **8**
2.1 Brüche als Teile eines Ganzen . . . 8
2.2 Brüche als Anteile . . . 9
2.3 Brüche als Ergebnisse von Divisionen . . . 12
2.4 Brüche bezeichnen Größenverhältnisse . . . 14
2.5 Mit Brüchen zählen . . . 14
2.6 Mit Brüchen Größen vergleichen . . . 15
2.7 Weitere Eigenschaften . . . 16
2.7.1 Brüche ohne Nachfolger und Vorgänger . . . 16
2.7.2 Brüche liegen dicht . . . 16
2.7.3 Unendlich viele Brüche an einer Stelle . . . 17

3 Brüche erweitern **18**
3.1 Anschauliches Erweitern von Brüchen . . . 21

4 Brüche kürzen **23**
4.1 Kürzen durch alle Teiler des Nenners . . . 25
4.2 Kürzen als Umkehrung des Erweiterns . . . 27
4.3 Einen Bruch kürzen . . . 28
4.4 Beispiele . . . 29

5 Hauptnenner bilden **31**
5.1 Brüche gleichnamig machen . . . 31
5.2 Erst kürzen - dann erweitern . . . 32
5.3 Auf das kgV erweitern . . . 34
5.4 Flussdiagramm . . . 36
5.5 Beispiele . . . 38

6 Brüche vergleichen **47**
6.1 Gleiche Brüche . . . 47
6.2 Brüche vergleichen . . . 47

7 Brüche addieren **53**
7.1 Gleichnamige Brüche addieren . . . 53
7.2 Ungleichnamige Brüche addieren . . . 54
7.3 Flussdiagramm . . . 58
7.4 Beispiele . . . 59

8 Brüche subtrahieren **62**
8.1 Gleichnamige Brüche subtrahieren 62
8.2 Ungleichnamige Brüche subtrahieren 64
8.3 Flussdiagramm 65
8.4 Beispiele 66

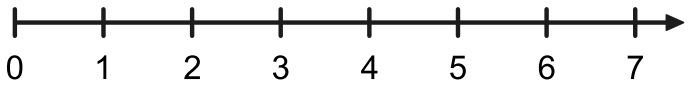
9 Brüche multiplizieren **71**
9.1 Beispiele 71
9.2 Sprechweisen 72
9.3 Erklärung der Bruchmultiplikation 72
9.4 Beispiele 76
9.5 Anschauliche Bruchmultiplikation 80
9.6 Über Kreuz kürzen 84
9.7 Vertauschung von Zählern und Nennern 86
9.7.1 Ausgangsbrüche 86
9.7.2 Vertauschte Zähler 87
9.7.3 Vertauschte Nenner 88
9.7.4 Vertauschte Zähler 89

10 Brüche dividieren **91**
10.1 Beispiele 91
10.2 Erklärung der Division durch Brüche 91
10.3 Weitere Beispiele 94

1 Brüche

1.1 Definitionen

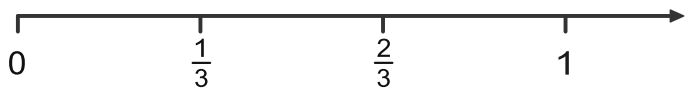
Bisher haben wir mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... gerechnet. Diese Zahlen heißen **natürliche Zahlen** und wir haben sie auf dem Zahlenstrahl dargestellt.



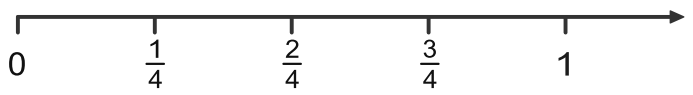
Mit den natürlichen Zahlen können wir z. B. ganze Dinge wie Tomaten, Sonnenaufgänge oder Ideen zählen. Wir können diese Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.
Eine Tomate können wir in 4 gleiche großen Teile teilen. Auch mit diesen Teilen können wir rechnen. Wenn wir zwei dieser Teile und weitere zwei dieser Teile zusammenfügen, erhalten wir wieder eine ganze Tomate. Aber es ist nicht $2+2=1$.
Wenn wir also mit Teilen eines Ganzen rechnen wollen, brauchen wir andere Zahlen, nämlich solche, die sich auf dem Zahlenstrahl zwischen den natürlichen Zahlen befinden.

Die Zahl, die genau in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt, nennen wir: $\frac{1}{2}$ (gesprochen: ein Halb).

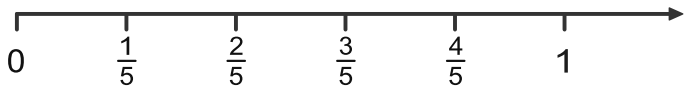
Teilen wir ein Ganzes - also die Strecke zwischen 0 und 1 - in drei gleich große Teile, entstehen die Zahlen $\frac{1}{3}$ (gesprochen: ein Drittel) und $\frac{2}{3}$ (gesprochen: zwei Drittel).



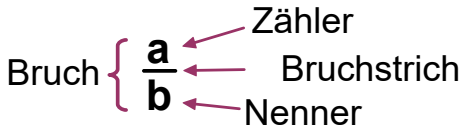
Teilen wir ein Ganzes in 4 gleich große Teile, entstehen die Zahlen $\frac{1}{4}$ (gesprochen: ein Viertel), $\frac{2}{4}$ (gesprochen: zwei Viertel) und $\frac{3}{4}$ (gesprochen: drei Viertel).



Wenn wir ein Ganzes in 5 gleiche Teile teilen, entstehen Fünftel.



Auf diese Weise können wir noch viele weitere Zahlen bilden. Diese Zahlen nennen wir **Brüche**. Ein **Bruch** besteht aus einem **Bruchstrich**, einer ganzen Zahl über dem Bruchstrich und einer ganzen Zahl unter dem Bruchstrich. Die Zahl über dem Bruchstrich heißt **Zähler** und die Zahl unter dem Bruchstrich heißt **Nenner**.



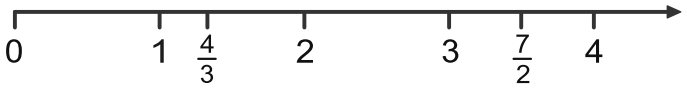
Definition: Brüche sind Zahlen, die durch das Einteilen eines Ganzen in gleich große Teile entstehen. Der Nenner eines Bruchs gibt an, aus *welchen* Teilen der Bruch besteht und der Zähler eines Bruchs gibt an, aus *wie vielen* dieser Teile der Bruch besteht.

Ein Bruch wird auch als **rationale Zahl** bezeichnet.
Alle Brüche zusammen bilden die **Menge der rationalen Zahlen**. Diese Menge bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathbb{Q}$.

1.2 Weitere Eigenschaften

1. Brüche größer als 1

Brüche können auch größer als 1 sein. Z.B. liegen die Brüche $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{2}$ (gesprochen: sieben Halbe) rechts der 1.



2. Nenner sind ungleich 0

Wir haben Brüche als Zahlen erklärt, die entstehen, wenn ein Ganzes in gleich große Teile geteilt wird. Weil man aber nichts in 0 Teile teilen kann, legen wir fest, dass es keine Brüche mit dem Nenner 0 geben soll. Denn selbst dann, wenn wir ein Ganzes überhaupt nicht teilen, besteht es aus *einem* Teil und nicht aus gar keinem.

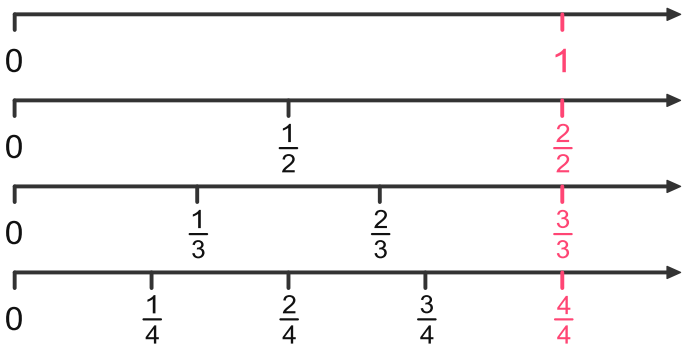
3. Der Nenner kann gleich 1 sein.

Wir legen fest, dass der Bruch $\frac{1}{1}$ (gesprochen: ein Ganzes) gleich 1 sein soll. Weiter soll $\frac{2}{1}$ (gesprochen: zwei Ganze) gleich 2 sein, $\frac{3}{1}$ soll gleich 3 sein usw.

4. Mehrere Zahlen an der gleichen Stelle

Wenn wir ein Ganzes in

- 2 gleich große Teile teilen, sind 2 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.
- 3 gleich große Teile teilen, sind 3 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.
- 4 gleich große Teile teilen, sind 4 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.

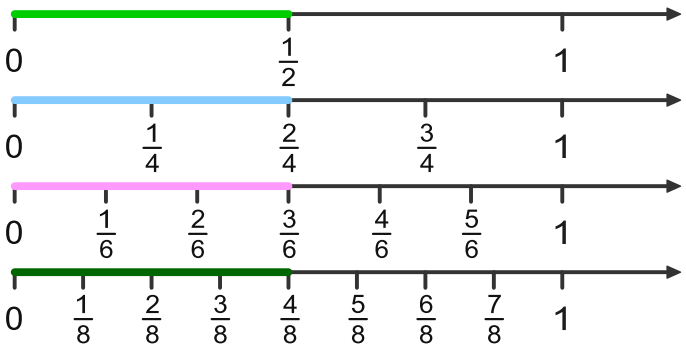


Wir legen deshalb fest: Dort, wo sich auf dem Zahlenstrahl die 1 befindet, befinden sich auch noch andere Zahlen. Es gilt:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \ldots$$

Auch an anderen Stellen auf dem Zahlenstrahl befinden sich mehrere Zahlen. Wenn wir ein Ganzes in

- 2 gleich große Teile teilen, ist eines dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 4 gleich große Teile teilen, sind 2 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 6 gleich große Teile teilen, sind 3 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 8 gleich große Teile teilen, sind 4 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.



Es gilt:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

Das Gleiche gilt auch für andere Brüche, z. B.:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots \text{ und}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \ldots .$$

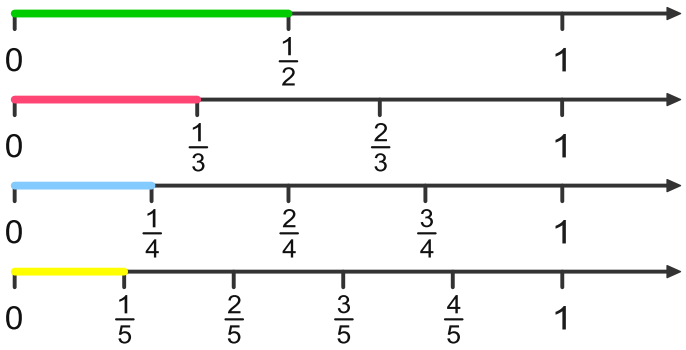
Wir werden diese Zusammenhänge begründen, wenn wir uns mit dem Erweitern von Brüchen beschäftigen. Was wir aber jetzt schon vermuten können:
Ist der Nenner eines Bruchs doppelt so groß wie der Zähler,
ist der Bruch gleich $\frac{1}{2}$.
Ist der Nenner eines Bruchs dreimal so groß wie der Zähler,
ist der Bruch gleich $\frac{1}{3}$.

5. Je größer der Nenner, desto kleiner die Teile

Wenn wir ein Ganzes in zwei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$. Wenn wir ein Ganzes in *mehr* als zwei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile *kleiner* als $\frac{1}{2}$. Deshalb ist z. B.

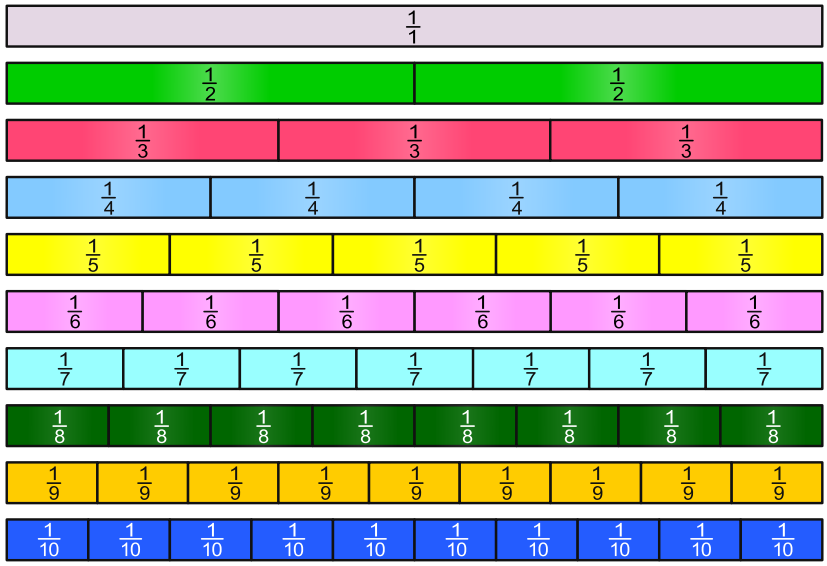
$$\frac{1}{3} \text{ kleiner als } \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4} \text{ kleiner als } \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{5} \text{ kleiner als } \frac{1}{2} \text{ usw.}$$

Wenn wir ein Ganzes in mehr als drei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile *kleiner* als $\frac{1}{3}$. Z. B. sind $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw. jeweils kleiner als $\frac{1}{3}$.

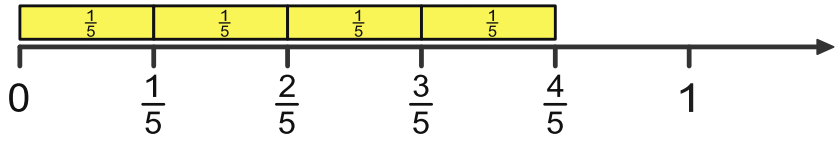


1.3 Bruchstreifen

Um uns Brüche und deren Gesetzmäßigkeiten gut vorstellen zu können, verwenden wir Bruchstreifen. Hier sind die Bruchstreifen bis zu Zehnteln.

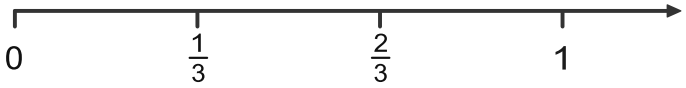


Die Bruchstreifen können wir auf den Zahlenstrahl legen.



2 Eigenschaften von Brüchen

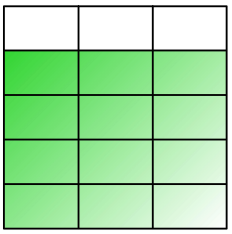
Wenn wir ein Ganzes in mehrere gleich große Teile teilen, entstehen Zahlen, die wir Brüche nennen. Unser Grundmodell ist die Strecke von 0 bis 1 auf dem Zahlenstrahl, die wir z. B. in drei gleich große Teile teilen können.
Dadurch entstehen die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$.



Brüche können wir in vielen weiteren Zusammenhängen wahrnehmen. Hier sind ein paar Beispiele:

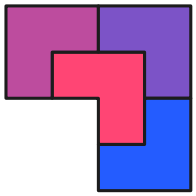
2.1 Brüche als Teile eines Ganzen

Wenn wir eine kreisrunde Pizza in 8 gleich große Sektoren teilen, ist jedes dieser Teile $\frac{1}{8}$ der ganzen Pizza. Das funktioniert auch mit anderen kreisrunden Objekten und geometrischen Figuren wie z. B. Kreisflächen.



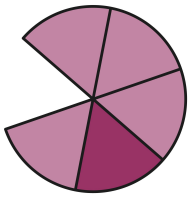
Wenn wir ein Rechteck in 15 gleich große Rechtecke einteilen, ist jedes kleine Rechteck $\frac{1}{15}$ des großen Rechtecks. Hier sind $\frac{12}{15}$ grün gefärbt.

Wir bezeichnen Teile eines Ganzen nur dann mit Brüchen, wenn alle Teile gleich groß sind. Die links gezeigten orangefarbenen Flächen wollen wir nicht als Beispiele für Brüche betrachten.

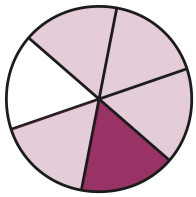


Die Einteilung in gleich große Teile darf auch ruhig „komisch“ aussehen. Solange alle Teile gleich groß sind, wollen wir sie als Beispiele für Brüche verstehen. Jede der Farbflächen ist $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche.

Manchmal ist die Lage nicht eindeutig. Wie können wir die linke Figur interpretieren?



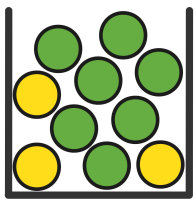
Ist ein Ganzes die bordeauxrote Farbfläche, von der $\frac{1}{5}$ dunkel gefärbt ist?



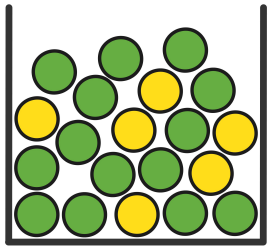
Oder ist ein Ganzes die gesamte Kreisfläche, von der $\frac{1}{6}$ fehlt?

2.2 Brüche als Anteile

Mit einem Anteil geben wir an, wie groß ein Teil eines Ganzen im Vergleich zum Ganzen ist.

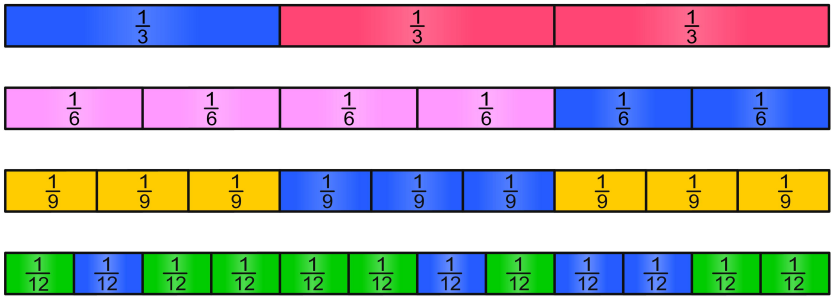


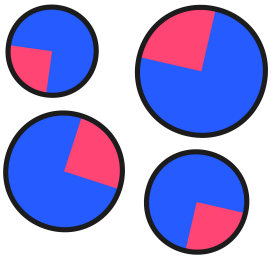
Der Anteil der grünen Kugeln an allen Kugeln ist gleich $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$, weil 7 der 10 Kugeln grün sind. Der Anteil der gelben Kugeln an allen Kugeln ist gleich $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$, weil 3 der 10 Kugeln gelb sind.



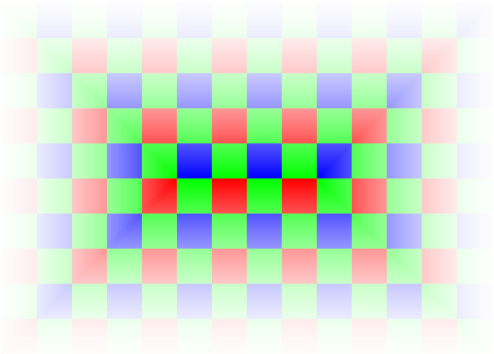
Nun sind zwar mehr Kugeln im Behälter, die Anteile der grünen und gelben Kugeln an allen Kugeln ist aber gleich geblieben. Der Anteil der grünen Kugeln an allen Kugeln ist gleich $\frac{7}{10}$, weil 14 der 20 Kugeln grün sind. Der Anteil der gelben Kugeln an allen Kugeln ist gleich $\frac{3}{10}$, weil 6 der 20 Kugeln gelb sind.

Der Anteil der blau gefärbten Fläche jedes Bruchstreifens an der Gesamtfläche des Bruchstreifens ist bei jedem Streifen gleich. Der Anteil der blau gefärbten Fläche des obersten Bruchstreifens ist ein Drittel, weil eines der drei Drittel blau ist. Der Anteil der blau gefärbten Fläche des zweiten Bruchstreifens ist ein Drittel, weil zwei der sechs Sechstel blau gefärbt sind usw.





Die links abgebildeten Kreisflächen sind unterschiedlich groß. Der Anteil der roten Fläche an der Gesamtfläche jedes Kreises ist aber gleich. Er ist jeweils gleich $\frac{1}{4}$.



Auch wenn wir nicht nicht wissen, wie groß eine Fläche ist, können wir mitunter an der Struktur der Fläche erkennen, welche Anteile rot, gelb oder blau gefärbt sind. Der Flächenanteil von „rot“ und „blau“ ist jeweils $\frac{1}{4}$ und der Flächenanteil von „grün“ ist $\frac{1}{2}$. (Die Abbildung gibt das Bayer-Pattern wieder. Es entspricht der Anordnung von Farbdioden in Bildsensoren digitaler Kameras.)

Anteile, die wir nicht sehen können

Besonders dann, wenn wir Anteile nicht sehen können, kann es nützlich sein, diese Anteile mit Hilfe von Brüchen anzugeben.

Lebensmittel können nicht nur nach Geschmack und Aussehen beurteilt werden, sondern es kann auch angegeben werden, was im Lebensmittel enthalten ist. Es ist üblich, die Nährwerte Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate zu unterscheiden.

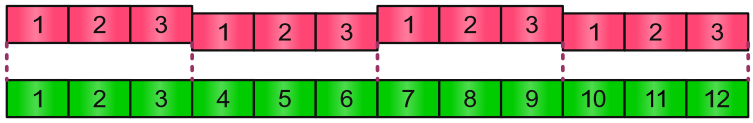
Der Eiweiß-Anteil einer Pizza „Salami“ beträgt ca. $\frac{11}{100}$ (gesprochen: „zirka elf Hunderdstel“). Der Fettanteil ist ca. $\frac{10}{100}$ und der Anteil an Kohlenhydraten liegt bei ca. $\frac{31}{100}$ (gesprochen: „bei zirka einunddreißig Hundertstel“). Auch in diesem Fall sprechen wir nicht von Hundertstel**n**, weil jeweils die Zahl (z. B. $\frac{31}{100}$) gemeint ist und nicht konkrete Hundertstel, die sich vielleicht in der Pizza befinden könnten.

Nährwertangaben von Tiramisu:

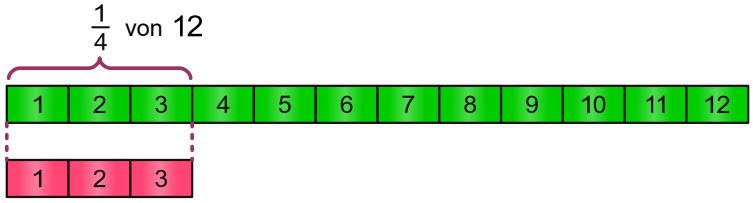
Eiweiß	ca. $\frac{8}{100}$
Fett	ca. $\frac{13}{100}$
Kohlenhydrate	ca. $\frac{39}{100}$

2.3 Brüche als Ergebnisse von Divisionen

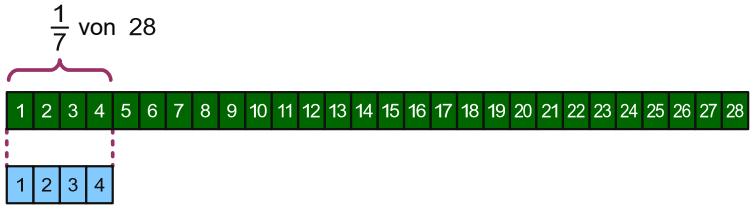
Wenn wir 12 durch 3 teilen, erhalten wir 4. Dieses Ergebnis können wir als Antwort auf die Frage verstehen: Wie oft passt 3 auf die 12? Und die Antwort ist 4, weil 3 viermal auf die 12 passt.



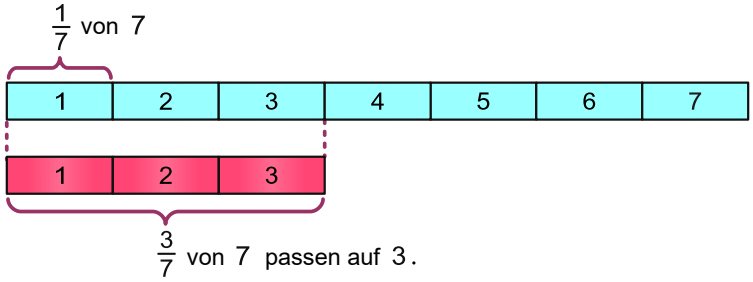
Mit unseren neuen Zahlen können wir diesen Zusammenhang auch anders ausdrücken: Weil 3 viermal auf 12 passt, ist 3 ein Viertel von 12.
Mit den Brüchen können wir nun nicht nur 12 durch 3 teilen, sondern wir können auch 3 durch 12 teilen. Weil 12 größer als 3 ist, können wir nicht mehr fragen, wie oft 12 auf 3 passt. Aber wir können fragen, welcher Teil von 12 auf 3 passt. Antwort: $\frac{1}{4}$.

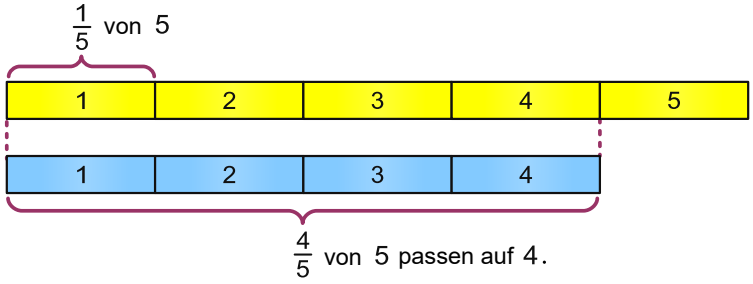


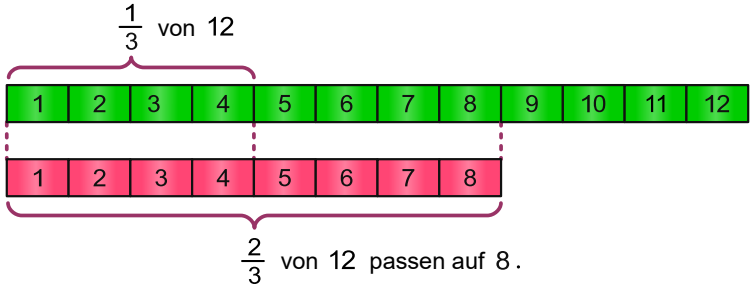
Das funktioniert auch mit anderen Zahlen. Wie wir wissen, ist $7 \cdot 4 = 28$. Also ist 28 das 7-fache von 4. Und deshalb passt ein Siebtel von 28 auf 4.



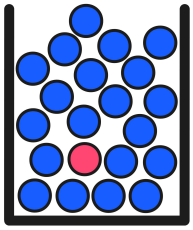
Bisher haben wir, wenn wir eine „kleine“ Zahl durch eine „große“ Zahl geteilt haben, nur durch solche kleinen Zahlen geteilt, die Teiler der großen Zahl waren. Wir können aber auch beliebige natürliche Zahlen teilen. Schauen wir uns das an Beispielen an.







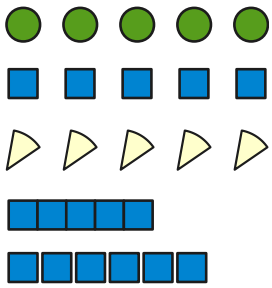
2.4 Brüche bezeichnen Größenverhältnisse



Das Verhältnis der roten Kugel zu den blauen Kugeln in der Box ist wie 1 zu 20. Der Bruch $\frac{1}{20}$ beschreibt dieser Verhältnis. Zieht man zufällig eine Kugel aus dieser Box, sagt man deshalb, die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, sei 1 zu 20. Das ist zwar richtig, aber $\frac{1}{20}$ ist nicht die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen. In der Mathematik berechnen wir diese Wahrscheinlichkeit, indem wir die Anzahl der roten Kugeln - also 1 - durch die Anzahl aller Kugeln - also 21 teilen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\frac{1}{21}$.

Um Beton herzustellen, vermischt man Zement mit Sand. Meistens wird das Mischungsverhältnis mit 1 : 4 (gesprochen: „eins zu vier“) angegeben. Der Bruch $\frac{1}{4}$ beschreibt dieses Verhältnis. Möchte man also Beton in einem Betonmischer herstellen, kann man eine Schippe Zement und danach 4 Schippen Sand in den Mischer einfüllen. Reicht das noch nicht, kann man noch einen Durchgang mit einer Schippe Zement und 4 Schippen Sand drauflegen usw. Der Anteil des Zements an der gesamten Mischung ist dann aber nicht $\frac{1}{4}$, sondern $\frac{1}{5}$, weil pro Durchgang 5 Schippen eingefüllt werden, von denen eine Schippe Zement dabei ist.

2.5 Mit Brüchen zählen



Mit natürlichen Zahlen können wir viele Dinge zählen. Und auch mit Brüchen können wir Dinge zählen, wenn diese Dinge Teile eines Ganzen sind. In der oberen Reihe sehen wir 5 grüne Kreise. In der mittleren Reihe sind 5 blaue Quadrate und in der unteren Reihe befinden sich 5 Achtel. Das können wir auch so aufschreiben: $\frac{5}{8}$.
Wir können die blauen Quadrate aber auch zu einem blauen Balken zusammenschieben. Dann sehen wir in der untersten Reihe $\frac{6}{5}$ des blauen Balkens.

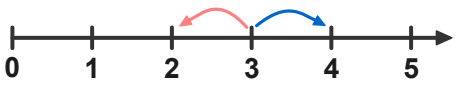
2.6 Mit Brüchen Größen vergleichen

Mit Brüchen können wir Größen vergleichen.
Die Körpergröße des Kindes beträgt $\frac{7}{11}$ der Körpergröße der Frau. Der Größenunterschied ist gleich $\frac{4}{11}$ der Körpergröße der Frau.

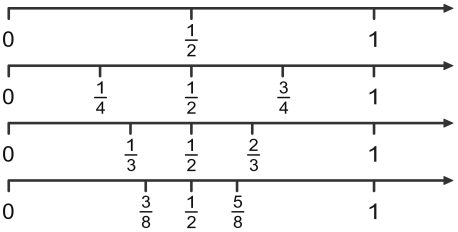
Kann man hier auch Brüche sehen?

2.7 Weitere Eigenschaften

2.7.1 Brüche ohne Nachfolger und Vorgänger



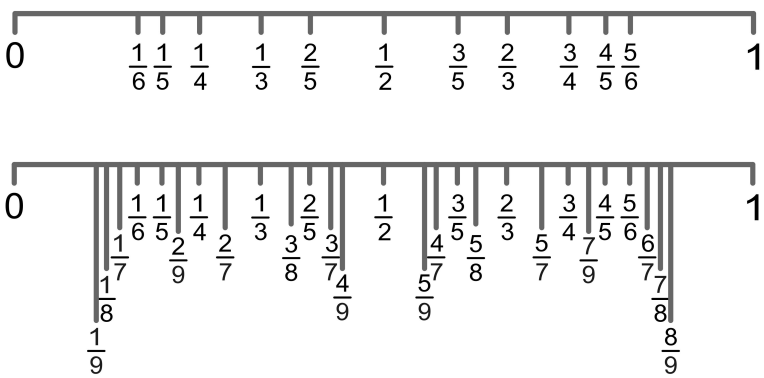
Jede natürliche Zahl hat auf dem Zahlenstrahl einen Nachfolger. Der Nachfolger von z. B. 3 ist 4.
Jede natürliche Zahl, die größer als 0 ist, hat auf dem Zahlenstrahl auch einen Vorgänger. Der Vorgänger von z. B. 3 ist 2.



Brüche haben keinen direkten Nachfolger und keinen direkten Vorgänger. Es ist z. B. 1 nicht der direkte Nachfolger von $\frac{1}{2}$, weil $\frac{3}{4}$ zwischen beiden Zahlen liegt. Ebenso ist $\frac{3}{4}$ nicht der direkte Nachfolger von $\frac{1}{2}$, weil $\frac{2}{3}$ zwischen diesen Zahlen liegt usw.

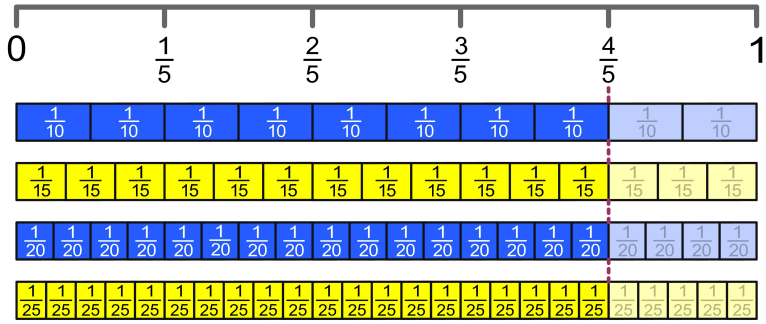
2.7.2 Brüche liegen dicht

Wir können zwischen den den Zahlen 0 und 1 beliebig viele Brüche unterbringen. Das gilt auch für jeden anderen Abschnitt der Zahlengeraden. Deshalb sagt man, die Brüche liegen dicht auf der Zahlengeraden.



2.7.3 Unendlich viele Brüche an einer Stelle

Gibt es an Stellen des Zahlenstrahls tatsächlich unendlich viele Brüche oder sind es nur endlos viele?



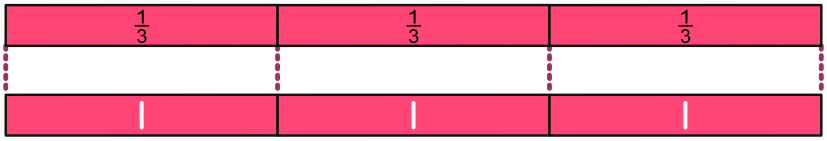
3 Brüche erweitern

Wir können uns das Rechnen mit Brüchen oft erleichtern, indem wir nicht mit den gegebenen Brüchen rechnen, sondern mit anderen Brüchen, die aber genauso groß sind.
Deshalb gibt es mehrere Verfahren, mit denen wir zu einem gegebenen Bruch einen anderen Bruch gleicher Größe finden können. Eines dieser Verfahren heißt:

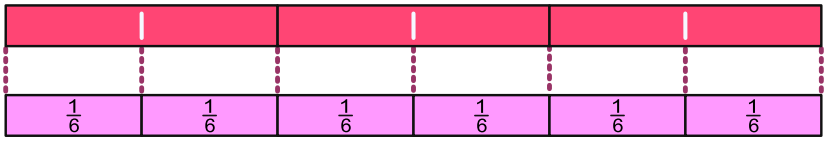
Erweitern von Brüchen. Rechnerisch erweitern wir einen Bruch, indem wir den Zähler und den Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl multiplizieren. Anschaulich erweitern wir einen Bruch, indem wir die Teile des Bruchs in weitere Teile unterteilen. Schauen wir uns dazu Beispiele an.

Beispiel 1

Wenn wir jedes Drittel in zwei gleich große Teile teilen, sind auf diesem Bruchstreifen $3 \cdot 2 = 6$ gleich große Teile.

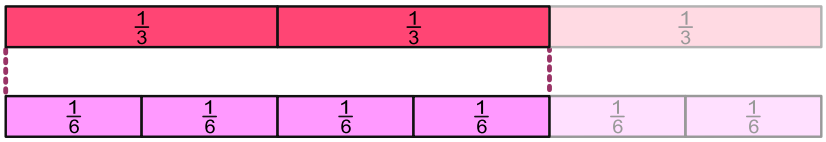


Das sind Sechstel.



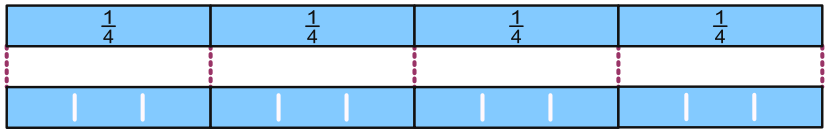
Weil wir jedes Drittel in 2 gleich große Teile geteilt haben, ist jedes dieser Teile nur halb so groß wie $\frac{1}{3}$.
Für einen Bruch mit dem Nenner 6, der so groß sein soll wie ein Bruch mit dem Nenner 3, brauchen wir deshalb 2-mal so viele Teile.
Wenn wir also den Zähler und den Nenner von $\frac{2}{3}$ mit 2 multiplizieren, erhalten wir einen Bruch gleicher Größe, nämlich $\frac{4}{6}$.
Es gilt:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} \,,$$

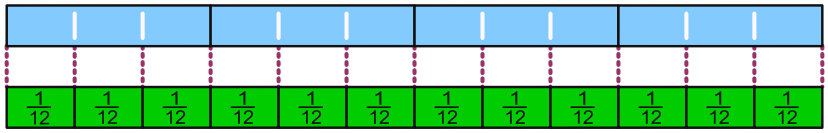


Beispiel 2

Wenn wir jedes Viertel in 3 gleich große Teile teilen, sind auf diesem Bruchstreifen $4 \cdot 3 = 12$ gleich große Teile.

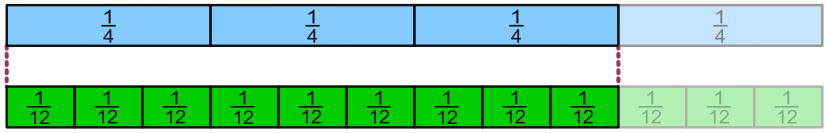


Das sind Zwölftel.



Weil wir jedes Viertel in 3 gleich große Teile geteilt haben, hat jedes dieser Teile ein Drittel der Größe von $\frac{1}{4}$.
Für einen Bruch mit dem Nenner 12, der genauso groß sein soll wie ein Bruch mit dem Nenner 4, brauchen wir deshalb 3-mal so viele Teile.
Wenn wir also den Zähler und den Nenner von $\frac{3}{4}$ mit 3 multiplizieren, erhalten wir einen Bruch gleicher Größe, nämlich $\frac{9}{12}$.
Es gilt:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \ .$$



Was wir hier gesehen haben, gilt auch für alle anderen Brüche. Der folgende Satz gilt für alle natürlichen Zahlen, die größer als 0 sind.

> Wird der Zähler und der Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl multipliziert, entsteht ein Bruch gleicher Größe.

Wir können das auch übersichtlich mit Variablen aufschreiben: Möchte man in der Mathematik etwas über irgendeinen Bruch aussagen, notiert man diesen Bruch mit Variablen - also mit Buchstaben, für die wir Zahlen einsetzen können. Ein beliebiger Bruch wird dann z. B. mit $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ bezeichnet. Soll mit einer beliebigen natürlichen Zahl multipliziert werden, bezeichnen wir diese Zahl ebenfalls mit einer Variable, z. B. mit **n**.
Den oben formulierten Satz können wir nun so aufschreiben:
Für einen beliebigen Bruch $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ und eine beliebige natürliche Zahl **n** (außer 0) gilt:

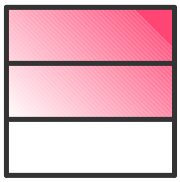
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

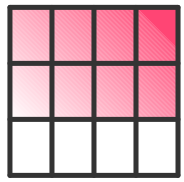
Den Vorgang, den Zähler und den Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl zu multiplizieren, nennen wir „den Bruch **erweitern**“.

3.1 Anschauliches Erweitern von Brüchen

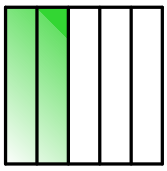
Es gibt viele Möglichkeiten, sich das Erweitern von Brüchen vorzustellen.

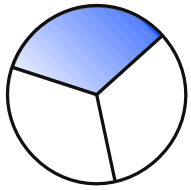
Dass ein Bruch seinen Wert nicht ändert, wenn wir seine Teile unterteilen, können wir uns anhand von Pizza vorstellen: Eine Pizza bleibt immer gleich groß, unabhängig davon, ob wir sie in 2, 4, 6, 8, ... Teile einteilen. Statt also eine halbe Pizza zu essen, können wir auch $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ... der Pizza essen.





$\frac{2}{3}$ der Fläche des linken Quadrats ist rot gefärbt. Das rechte Quadrat hat noch eine zusätzliche Einteilung der Fläche. Der Anteil der roten Fläche ist aber gleich geblieben. Es gilt: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

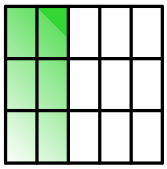


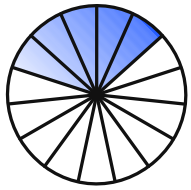


Die Flächen des Quadrats und des Kreises sind gleich groß. $\frac{2}{5}$ der Quadratfläche sind grün gefärbt und $\frac{1}{3}$ der Kreisfläche ist blau gefärbt. Welche gefärbte Fläche ist größer?

ir können jedes Fünftel der Quadratfläche in 3 Teile teilen. Dann ist die gefärbte

Fläche gleich $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$.

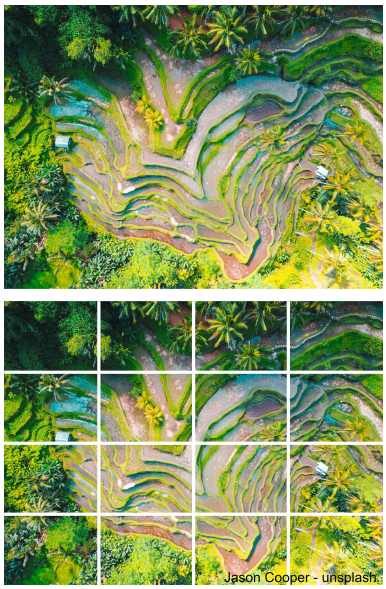




Und wir können jedes Drittel der Kreisfläche in 5 Teile teilen. Dann ist die gefärbte Fläche gleich

$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$.

Weil $\frac{6}{15}$ größer sind als $\frac{5}{15}$, ist die grüne Fläche die größere von beiden.

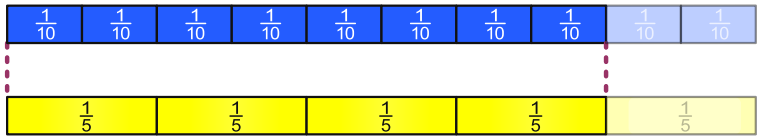


Haben wir ein Satellitenfoto und möchten abschätzen, welcher Anteil der Fläche mit Wasser bedeckt ist, können wir das Foto in gleich große Einheiten einteilen und nachzählen, wie viele der Einheiten Landflächen und wie viele Wasserflächen zeigen. Die Einteilung in 16-stel ist hier vermutlich zu grob, um dieses Verfahren sinnvoll nutzen zu können. Wir werden also die 16-stel in weitere Einheiten unterteilen müssen. Mit welcher Zahl wir erweitern sollten, hängt davon ab, wie genau unsere Schätzung sein soll. Auch könnten wir uns überlegen, ob die Einteilung in Rechtecke die beste Lösung ist oder ob vielleicht eine Einteilung in Quadrate nützlicher wäre.

4 Brüche kürzen

Um einen Bruch zu erweitern, multiplizieren wir den Zähler und den Nenner dieses Bruchs mit der gleichen natürlichen Zahl (außer 0). So erhalten wir einen Bruch gleicher Größe. Auch der „umgekehrte“ Vorgang ist möglich.
Haben der Zähler und der Nenner eines Bruchs einen gemeinsamen Teiler, können wir beide durch diesen Teiler teilen. So erhalten wir einen Bruch gleicher Größe.

Betrachten wir dazu den Bruch $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$.
Wie wir sehen, gibt es einen Bruch, der genauso groß ist wie $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$, aber mit kleinerem Zähler und Nenner auskommt, nämlich $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.



Wenn wir den Nenner 10 durch 2 teilen, erhalten wir 5.
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ ist zweimal so groß wie $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$.
Um einen gleich großen Bruch zu erhalten, brauchen wir deshalb nur noch halb so viele Teile. Also teilen wir den Zähler 8 ebenfalls durch 2 und erhalten 4.
Es gilt:

$$\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}\,.$$

Diesen Zusammenhang können wir etwas ungenau, aber sehr kurz, so formulieren:

Je größer die Teile, desto geringer die Anzahl.

Den Vorgang, den Zähler und den Nenner eines Bruchs durch einen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner zu teilen, nennen wir **kürzen**. Durch das Kürzen eines Bruchs entsteht ein Bruch gleicher Größe.

> Werden der Zähler und der Nenner eines Bruchs durch einen gemeinsamen Teiler geteilt, entsteht ein Bruch gleicher Größe. Diesen Vorgang nennen wir **kürzen**.

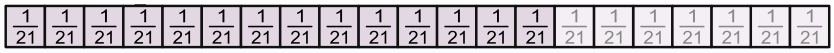
Sehr kurz können wir diesen Zusammenhang auch so notieren:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

Dabei steht $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ für einen beliebigen Bruch und **n** steht für einen beliebigen gemeinsamen Teiler von **a** und **b**. Um Unsinnigkeiten aus dem Weg zu gehen, wollen wir in Zukunft nur durch solche gemeinsamen Teiler **n** teilen, die größer als **1** sind.

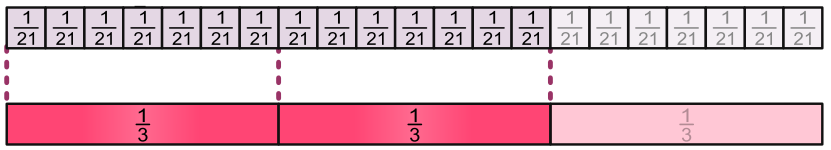
Beispiel 1

Wir wollen den Bruch $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{21}}$ mit 7 kürzen.



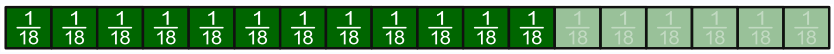
Teilen wir den Nenner 21 durch 7, erhalten wir 3.
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ ist siebenmal so groß wie $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}$.
Für einen Bruch gleicher Größe brauchen wir deshalb nur ein Siebtel so viele Teile. Teilen wir den Zähler 14 durch 7, erhalten wir 2.

$$\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$$



Beispiel 2

Wir wollen den Bruch $\frac{12}{18}$ mit 3 kürzen.



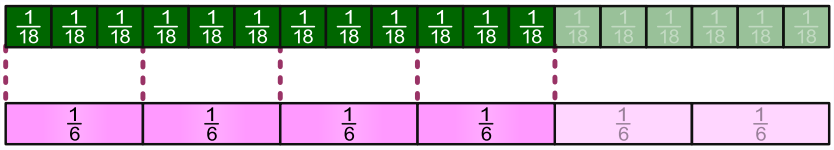
Teilen wir den Nenner 18 durch 3, erhalten wir 6.

$\frac{1}{6}$ ist dreimal so groß wie $\frac{1}{18}$.

Für einen Bruch gleicher Größe brauchen wir deshalb nur ein Drittel so viele Teile.

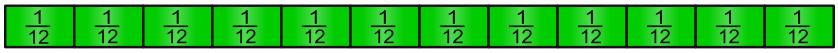
Teilen wir den Zähler 12 durch 3, erhalten wir 4.

$$\frac{12}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}\,.$$

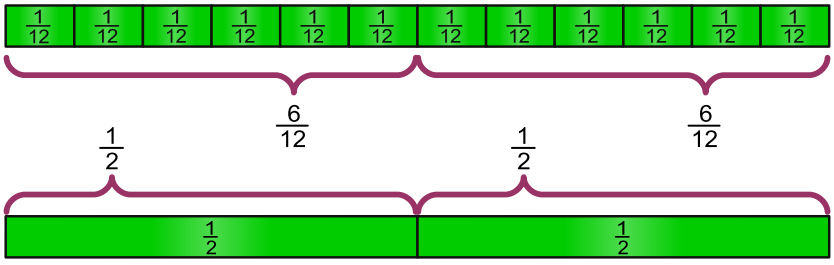


4.1 Kürzen durch alle Teiler des Nenners

Zu jedem Teiler eines Nenners gibt es Brüche, die wir durch diesen Teiler kürzen können. Schauen wir uns das an einem Beispiel an: Hier sind 12 Zwölftel.

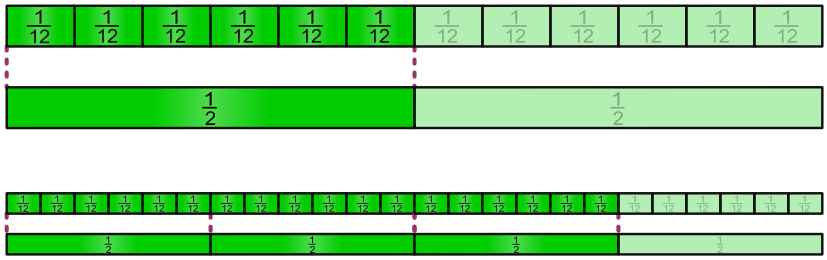


Weil 12 durch 6 teilbar ist, können wir jeweils 6 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen. Dann sind auf diesem Bruchstreifen $12 : 6 = 2$ dieser Teile. Es sind also Halbe.

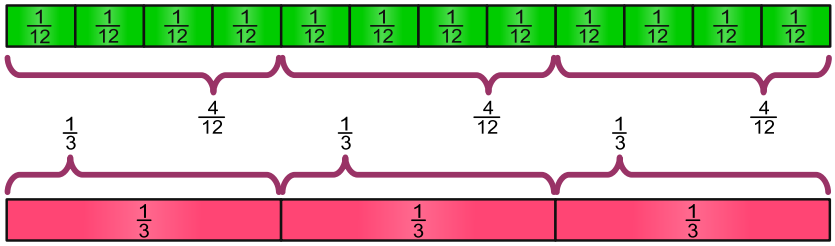


Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 6 teilbar ist, können wir den Bruch mit 6 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{18}{12} = \frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}.$$

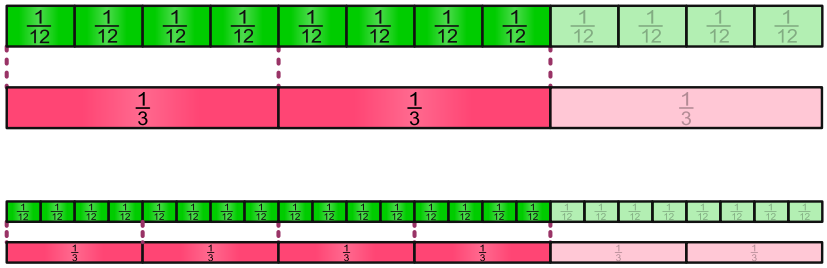


12 ist auch durch 4 teilbar. Deshalb können wir 12 Zwölftel in Vierer-Gruppen einteilen. Auf einem Ganzen haben wir dann 3 gleich große Teile. Jedes dieser Teile ist demnach gleich $\frac{1}{3}$. Also: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

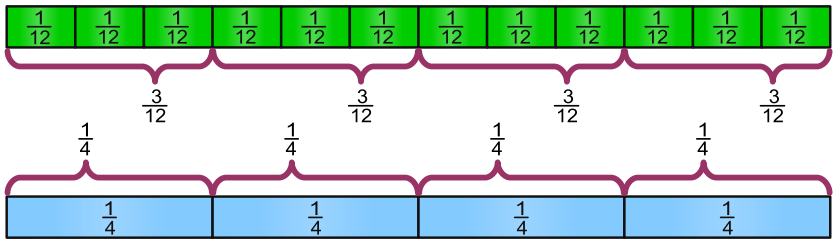


Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 4 teilbar ist, können wir den Bruch mit 4 kürzen. Z. B.:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{16}{12} = \frac{16:4}{12:4} = \frac{4}{3}.$$



12 ist auch durch 3 teilbar. Deshalb können wir jeweils 3 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen und erhalten Viertel.

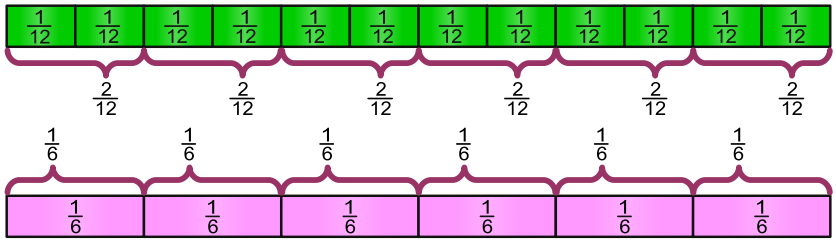


Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 3 teilbar ist, können wir den Bruch mit 3 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:3}{12:3} = \frac{2}{4} \quad \text{und} \quad \frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}.$$

---

12 ist auch durch 2 teilbar. Deshalb können wir jeweils 2 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen und erhalten Sechstel.



Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 2 teilbar ist, können wir den Bruch mit 2 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:2}{12:2} = \frac{3}{6} \quad \text{und} \quad \frac{28}{12} = \frac{28:2}{12:2} = \frac{14}{6}.$$

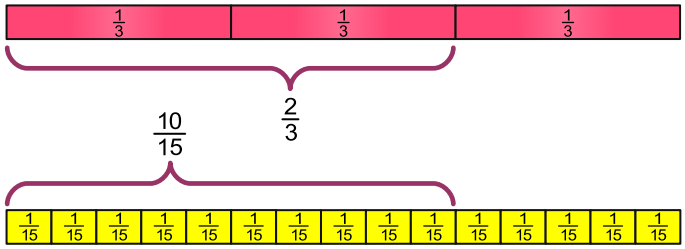
4.2 Kürzen als Umkehrung des Erweiterns

Wir können uns das Kürzen auch als Umkehrung des Erweiterns vorstellen. Erweitern bedeutet z. B.: Wir teilen jedes Drittel von $\frac{2}{3}$ in 5 gleich große Teile. Jedes dieser Teile hat dann noch ein Fünftel der Größe eines Drittels. Deshalb brauchen wir 5-mal so viele Teile für einen Bruch gleicher Größe.

Also: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$.

Nun können wir umgekehrt vorgehen und jeweils 5 der 10 Fünfzehntel wieder zu größeren Teilen zusammenfassen. Diese Teile sind dann 5-mal so groß wie die vorherigen Teile und deshalb brauchen wir für einen Bruch gleicher Größe nur noch $10 : 5 = 2$ Teile.

Also: $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$.



4.3 Einen Bruch kürzen

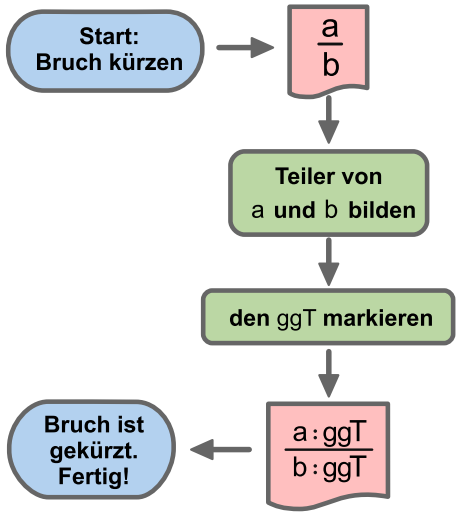
Mit gekürzten Brüchen zu rechnen ist meist einfacher als mit ungekürzten Brüchen zu rechnen. Einen Bruch kürzen wir normalerweise mit dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner.

Haben wir einen Bruch gegeben, können wir dabei so vorgehen:

1. Alle Teiler des Zählers aufschreiben.
2. Alle Teiler des Nenners aufschreiben.
3. Den größten gemeinsamen Teiler **ggT** von Zähler und Nenner markieren.
4. Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler **ggT** teilen.

Wenn wir in Zukunft davon sprechen, einen Bruch zu kürzen, meinen wir damit *immer*, einen Bruch den **ggT** zu kürzen.

Dieses Verfahren können wir auch als Flussdiagramm aufschreiben.



4.4 Beispiele

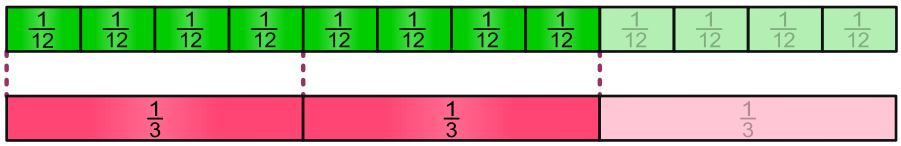
Schauen wir uns dazu Beispiele an:

Beispiel 1

Der Bruch $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}$ hat den Zähler 8 und den Nenner 12.
Die Teiler von 8 sind: $1; 2; 4; 8$.
Die Teiler von 12 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 12$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

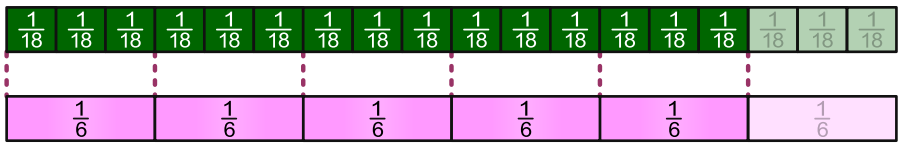


Beispiel 2

Der Bruch $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{18}}$ hat den Zähler 15 und den Nenner 18.
Die Teiler von 15 sind: $1; 3; 5; 15$.
Die Teiler von 18 sind: $1; 2; 3; 6; 9; 18$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{15}{8} = \frac{15 : 3}{18 : 3} = \frac{5}{6}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{18}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$.

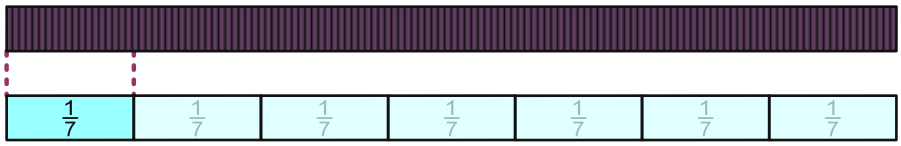


Beispiel 3

Der Bruch $\frac{\mathbf{108}}{\mathbf{756}}$ hat den Zähler 108 und den Nenner 756.
Die Teiler von 108 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108$.
Die Teiler von 756 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 7; 9; 12; 14; 18; 21; 27; 28; 36; 42; 54; 63; 84; 108; 126; 189; 252; 378; 756$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{108}{756} = \frac{108 : 108}{756 : 108} = \frac{1}{7}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{108}}{\mathbf{756}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$.



Beispiel 4

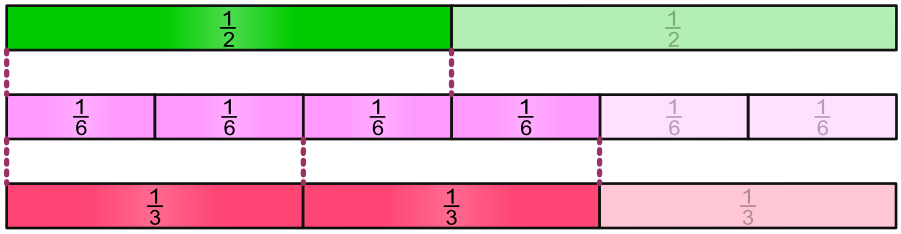
Der Bruch $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{81}}$ hat den Zähler 40 und den Nenner 81.
Die Teiler von 40 sind: $1; 2; 4; 5; 10; 20; 40$.
Die Teiler von 81 sind: $1; 3; 9; 27; 81$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Weil der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner gleich 1 ist, können wir diesen Bruch nicht sinnvoll kürzen.

5 Hauptnenner bilden

5.1 Brüche gleichnamig machen

Wir können die Größen von Brüchen besonders gut vergleichen oder Brüche besonders gut addieren und subtrahieren, wenn sie gleiche Nenner haben.
Haben zwei Brüche unterschiedliche Nenner, können wir die Brüche *so* erweitern, dass die beiden erweiterten Brüche gleiche Nenner haben.
Schauen wir uns die Idee dazu an den Bruchstreifen an:

Wir haben die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Beide Brüche möchten wir *so* erweitern, dass die erweiterten Brüche gleiche Nenner haben. Dazu bieten sich die Sechstel an.



Wir erweitern $\frac{1}{2}$ mit 3: $\quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$

Und wir erweitern $\frac{2}{3}$ mit 2: $\quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$

Beide erweiterten Brüche haben den gleichen Nenner 6.

Bezeichnungen

Den Vorgang, zwei oder mehr Brüche *so* zu erweitern, dass die erweiterten Brüche gleiche Nenner haben, nennen wir

- **auf den gleichen Nenner bringen**
- **auf gleiche Nenner erweitern**
- **Brüche gleichnamig machen**

Brüche mit gleichen Nennern bezeichnen wir als **gleichnamig**.
Brüche, die nicht gleichnamig sind, heißen **ungleichnamig**.

Hier ist ein Beispiel ohne besondere Eigenschaften:

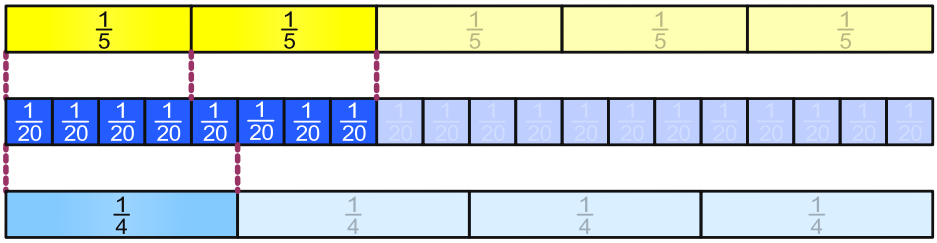
Beispiel

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{4}$ auf den gleichen Nenner bringen.
Dazu suchen wir ein gemeinsames Vielfaches der Nenner 5 und 4
und entscheiden uns für 20.

Wir erweitern $\frac{2}{5}$ mit 4: $\quad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$

Und wir erweitern $\frac{1}{4}$ mit 5: $\quad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$

Die beiden erweiterten Brüche haben den gleichen Nenner 20.

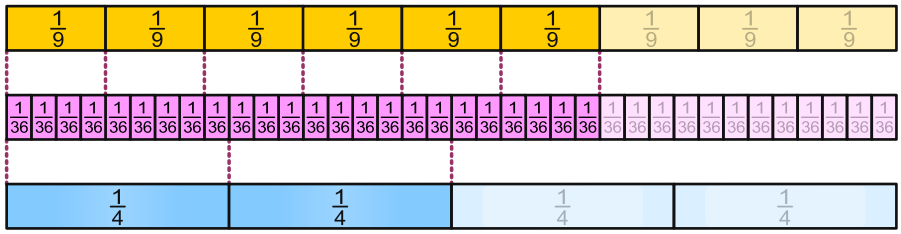


5.2 Erst kürzen - dann erweitern

Wenn wir die gegebenen Brüche zunächst kürzen, bevor wir sie auf einen gemeinsamen Nenner erweitern, erhalten wir meist einen kleineren gemeinsamen Nenner. Das ist z. B. dann ganz praktisch, wenn wir die erweiterten Brüche addieren oder subtrahieren möchten. Wir werden uns deshalb angewöhnen, Brüche zu kürzen, bevor wir sie gleichnamig machen.
Betrachten wir dazu die Brüche $\frac{6}{9}$ und $\frac{2}{4}$.
Wir können die Brüche - ohne zu kürzen - auf einen gemeinsamen Nenner bringen, indem wir jeden Bruch mit dem Nenner des jeweils anderen Bruchs erweitern. Also:

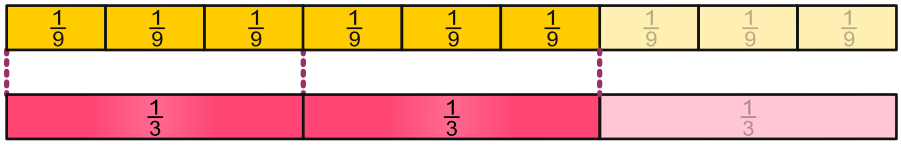
$$\frac{6}{9} = \frac{6 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{24}{36} \quad \text{und} \quad \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{18}{36} \, .$$

Der gemeinsame Nenner der erweiterten Brüche ist 36.

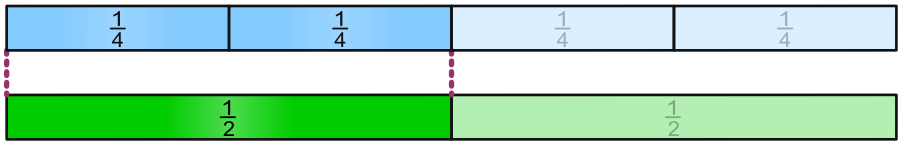


Nun sollen die Brüche zunächst gekürzt werden:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$



$$\text{und} \quad \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2} \,.$$

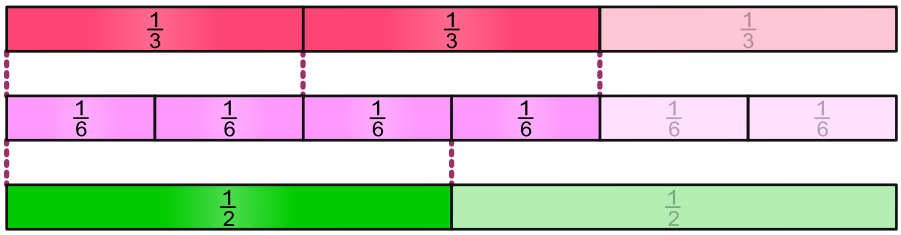


Nun bringen wir die gekürzten Brüche auf einen gleichen Nenner.
Ein gemeinsames Vielfaches der Nenner 3 und 2 ist 6.

Wir erweitern $\frac{2}{3}$ mit 2: $\quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$

Und wir erweitern $\frac{1}{2}$ mit 3: $\quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$

Die beiden erweiterten Brüche haben den gleichen Nenner 6.



Wie wir sehen, erhalten wir einen kleineren gemeinsamen Nenner, wenn wir die Brüche zunächst kürzen, bevor wir sie gleichnamig machen.

5.3 Auf das kgV erweitern

Wenn wir zwei Brüche auf den gleichen Nenner bringen, um sie z. B. zu addieren oder zu subtrahieren, möchten wir nicht mit unnötig großen Nennern rechnen. Deshalb erweitern wir die Brüche nicht auf *irgendeinen* gemeinsamen Nenner, sondern auf den *kleinsten* gemeinsamen Nenner. Der kleinste gemeinsame Nenner von zwei (oder mehr) Brüchen ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner (das mit **kgV** abgekürzt wird). Der kleinste gemeinsame Nenner von zwei (oder mehr) Brüchen heißt auch **Hauptnenner**. Damit ist der Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache (**kgV**) aller Nenner.

Wie wir systematisch den Hauptnenner zweier Brüche finden können, sehen wir in diesem Beispiel:

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Zunächst prüfen wir, ob die Brüche kürzbar sind und stellen fest, dass das nicht der Fall ist.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 4 sind: $4; 8; 12; 16; 20; 24; \ldots$
Vielfache von 6 sind: $6; 12; 18; 24; \ldots$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

Um herauszufinden, mit welcher Zahl wir $\frac{3}{4}$ erweitern müssen, um auf den Hauptnenner 12 zu kommen, können wir den Hauptnenner - also das kleinste gemeinsame Vielfache kgV - durch den Nenner des Bruchs teilen. Also:

$$\frac{12}{4} = 3$$

Um herauszufinden, mit welcher Zahl wir $\frac{5}{6}$ auf den Hauptnenner erweitern, teilen wir ebenfalls den Hauptnenner 12 durch den Nenner dieses Bruchs.

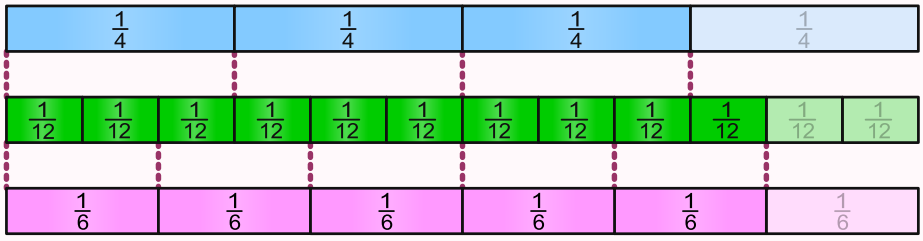
$$\frac{12}{6} = 2$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{3}{4}$ mit 3: $\quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

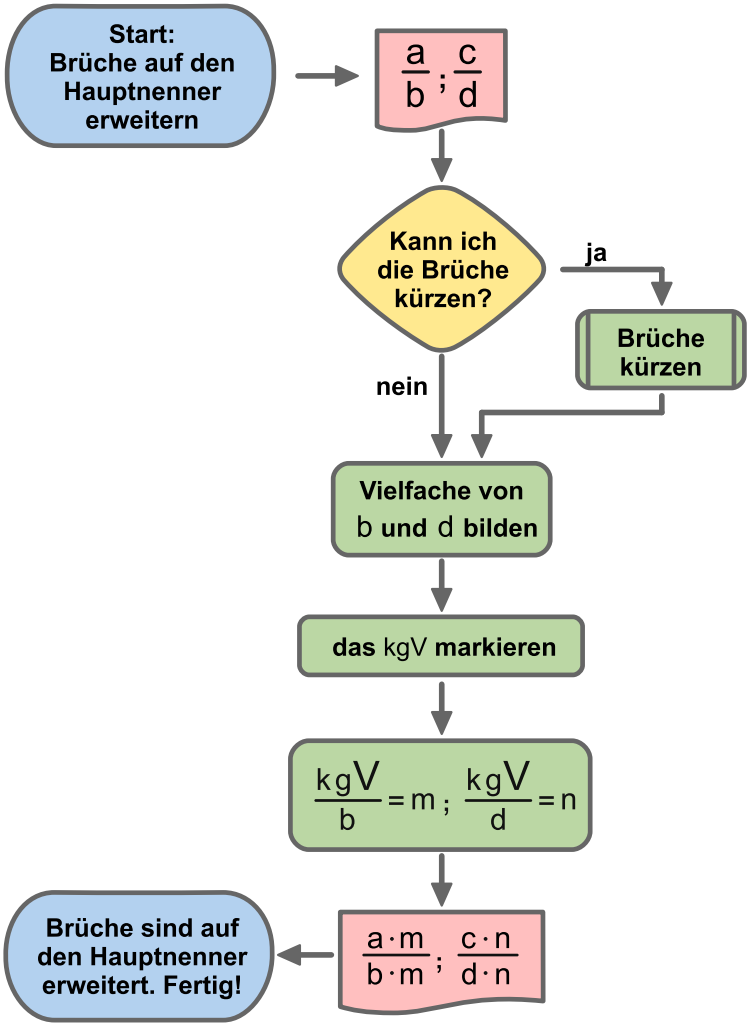
Und wir erweitern $\frac{5}{6}$ mit 2: $\quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 12 erweitert.

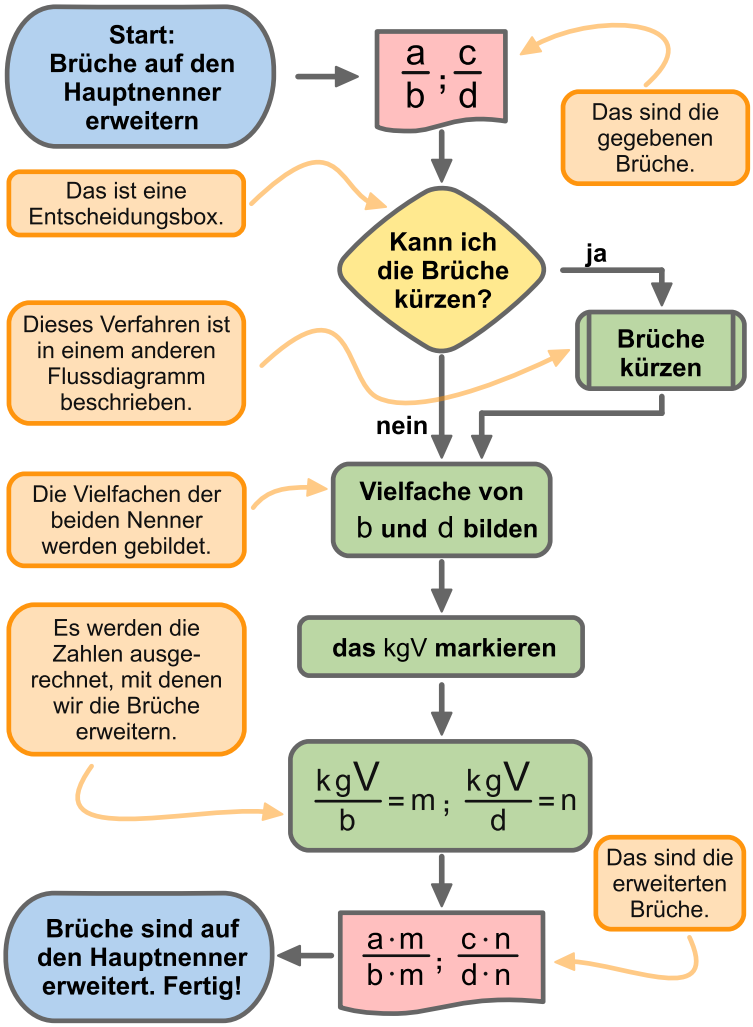


5.4 Flussdiagramm

Den Vorgang, Brüche auf den Hauptnenner zu bringen, können wir auch durch ein Flussdiagramm beschreiben. Hier ist zunächst das Flussdiagramm ohne Kommentare. Auf der nächsten Seite ist das gleiche Diagramm mit Kommentaren abgebildet.



Hier ist die kommentierte Version des Flussdiagramms.



5.5 Beispiele

Beispiel 1: ohne besondere Eigenschaften

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{4}{5}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Zunächst prüfen wir, ob die Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{4}{5}$ kürzbar sind und stellen fast, dass wir die Brüche nicht kürzen können.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 7 sind: $7; 14; 21; 28; 35; 42; 49; ...$
Vielfache von 5 sind: $5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; ...$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

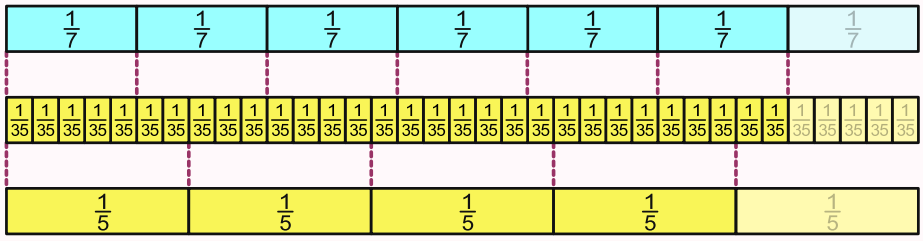
$$35 : 7 = 5 \text{ und } 35 : 5 = 7$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{6}{7}$ mit 5: $\quad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{30}{35}$

Und wir erweitern $\frac{4}{5}$ mit 7: $\quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{28}{35}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 35 erweitert.



Beispiel 2: Ein Nenner ist ein Vielfaches des anderen Nenners

Wir möchten $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9}$ auf den Hauptnenner bringen. Weil $3 \cdot 3 = 9$ ist, ist der Nenner von $\frac{7}{9}$ ein Vielfaches der Nenners von $\frac{2}{3}$. Deshalb ist 9 der Hauptnenner. Um beide Brüche auf den Hauptnenner zu bringen, brauchen wir also nur den ersten Bruch mit 3 zu erweitern. Wir können aber auch unser Verfahren durchziehen.

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Zunächst prüfen wir, ob die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{9}$ kürzbar sind und stellen fast, dass wir die Brüche nicht kürzen können.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 3 sind: $3; 6; 9; 12; 15; ...$
Vielfache von 9 sind: $9; 18; 27; ...$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

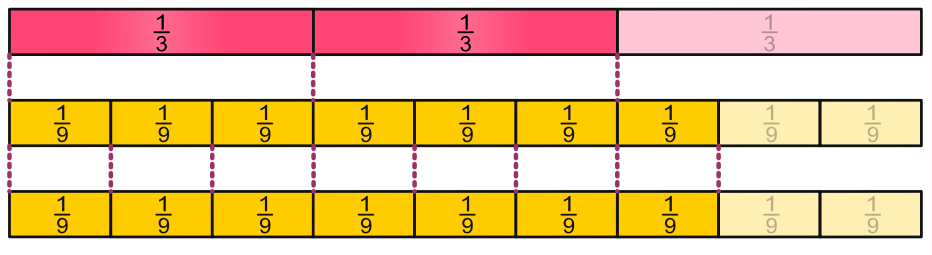
$9 : 3 = 3$ und $9 : 9 = 1$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{2}{3}$ mit 3: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

Und wir erweitern $\frac{7}{9}$ mit 1: $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 1}{9 \cdot 1} = \frac{7}{9}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 9 erweitert.



Beispiel 3: Die Nenner haben gemeinsame Teiler

Wir möchten $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ auf den Hauptnenner bringen. Weil beide Nenner gemeinsame Teiler haben, ist der Hauptnenner kleiner als das Produkt beider Nenner.

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Zunächst prüfen wir, ob die Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ kürzbar sind und stellen fast, dass wir die Brüche nicht kürzen können.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 8 sind: $8; 16; 24; 32; 40; \ldots$
Vielfache von 6 sind: $6; 12; 18; 24; 30; 36; \ldots$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

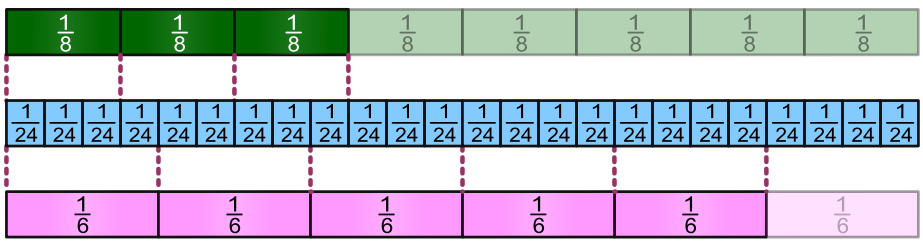
$$24 : 8 = 3 \text{ und } 24 : 6 = 4$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{3}{8}$ mit 3: $\quad \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$

Und wir erweitern $\frac{5}{6}$ mit 4: $\quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 24 erweitert.



Beispiel 4: Einer der Brüche ist kürzbar

Wir möchten $\frac{10}{15}$ und $\frac{7}{10}$ auf den Hauptnenner bringen. Durch das Kürzen wird der Hauptnenner in diesem Fall aber nicht kleiner, denn das kgV von 15 und 10 ist gleich 30 und damit genauso groß wie das kgV von 3 und 10.

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{10}{15}$ und $\frac{7}{10}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Wir kürzen den ersten Bruch: $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$
Ab jetzt suchen wir den Hauptnenner von $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{10}$.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 3 sind: $3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; ...$
Vielfache von 10 sind: $10; 20; 30; 40; ...$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

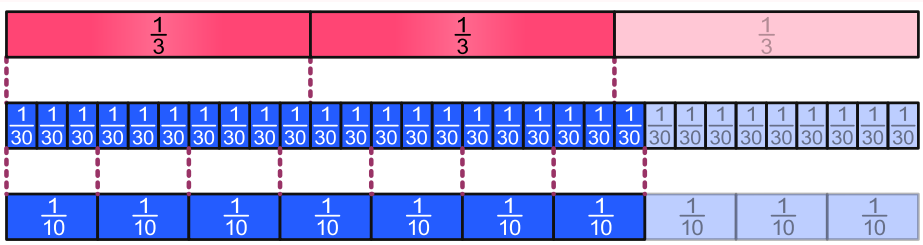
$$30 : 3 = 10 \text{ und } 30 : 10 = 3$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{2}{3}$ mit 10: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$

Und wir erweitern $\frac{7}{10}$ mit 3: $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 30 erweitert.



Beispiel 5: Beide Brüche sind kürzbar

Wir möchten $\frac{7}{35}$ und $\frac{55}{66}$ auf den Hauptnenner bringen. Würden wir nicht kürzen, sondern einfach die Nenner miteinander multiplizieren, wäre der gemeinsame Nenner 2310. Für alle weiteren Rechnungen mit diesen Brüchen wäre das recht umständlich.

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{7}{35}$ und $\frac{55}{66}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Wir kürzen die Brüche: $\frac{7}{35} = \frac{7:7}{35:7} = \frac{1}{5}$; $\frac{55}{66} = \frac{55:11}{66:11} = \frac{5}{6}$

Ab jetzt suchen wir den Hauptnenner von $\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{6}$.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 5 sind: $5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; ...$
Vielfache von 6 sind: $6; 12; 18; 24; 30; 36; ...$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

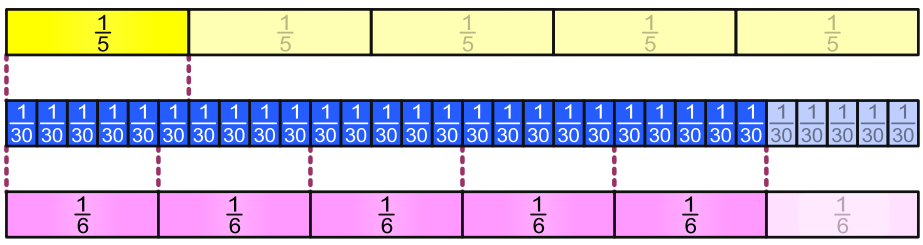
$$30 : 5 = 6 \text{ und } 30 : 6 = 5$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{1}{5}$ mit 6: $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$

Und wir erweitern $\frac{5}{6}$ mit 5: $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$

Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 30 erweitert.



Beispiel 6: Die Nenner der gekürzten Brüche haben gemeinsame Teiler

Wir möchten $\frac{28}{40}$ und $\frac{39}{75}$ auf den Hauptnenner bringen. Die Nenner der gekürzten Brüche haben gemeinsame Teiler, sodass das kgV kleiner ist als das Produkt dieser Nenner.

1. Welche Brüche?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{28}{40}$ und $\frac{39}{75}$ auf den Hauptnenner bringen.

2. Kürzen?

Wir kürzen die Brüche: $\frac{28}{40} = \frac{28:4}{40:4} = \frac{7}{10}$; $\frac{39}{75} = \frac{39:3}{75:3} = \frac{13}{25}$

Ab jetzt suchen wir den Hauptnenner von $\frac{7}{10}$ und $\frac{13}{25}$.

3. kgV bilden

Wir bilden nun Vielfache der Nenner:
Vielfache von 10 sind: $10; 20; 30; 40; 50; 60; ...$
Vielfache von 25 sind: $25; 50; 75; ...$
Das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner haben wir rot markiert.

4. kgV durch Nenner teilen

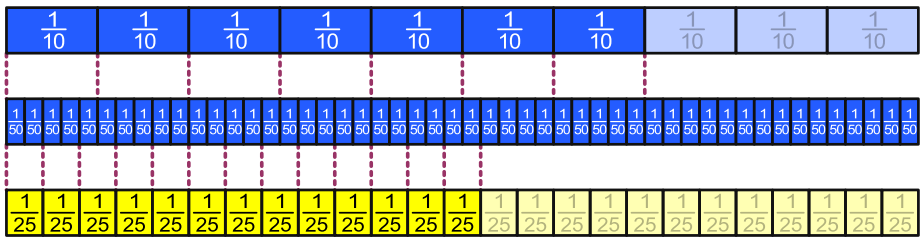
$$50 : 10 = 5 \text{ und } 50 : 25 = 2$$

5. Erweitern

Wir erweitern $\frac{7}{10}$ mit 5: $\quad \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 5} = \frac{35}{50}$

Und wir erweitern $\frac{13}{25}$ mit 2: $\quad \frac{13}{25} = \frac{13 \cdot 2}{25 \cdot 2} = \frac{26}{50}$

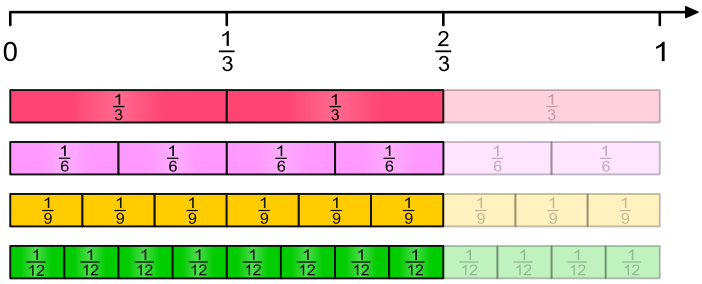
Wir haben nun beide Brüche auf den Hauptnenner 50 erweitert.



6 Brüche vergleichen

6.1 Gleiche Brüche

Zu jedem Bruch, den wir auf dem Zahlenstrahl finden, gibt es weitere Brüche, die genauso groß sind. Z. B.: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} =$ usw. Wenn wir $\frac{2}{3}$ mit 7, 8, 9, ... erweitern, erhalten wir weitere Brüche mit der gleichen Größe.

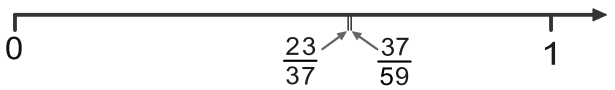


Auf dem Zahlenstrahl können wir uns das so vorstellen.

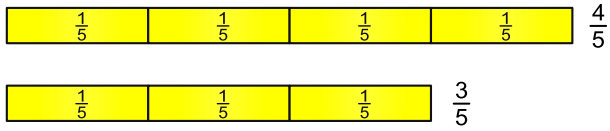
Auch an jeder Stelle, an der sich eine natürliche Zahle befindet, gibt es mehrere Brüche: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} =$ usw.

6.2 Brüche vergleichen

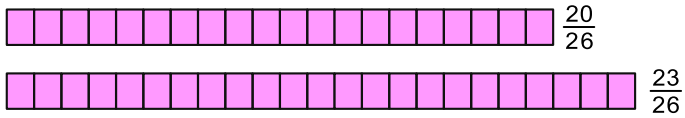
Von zwei natürlichen Zahlen können wir immer erkennen, welche von beiden größer ist. Z. B. wissen wir sofort, dass 89 größer ist als 78, ohne weiter darüber nachdenken zu müssen.
Haben wir die Brüche $\frac{8}{9}$ und $\frac{7}{8}$ gegeben, ist das aber nicht so offensichtlich.
Wenn wir wissen wollen, ob zwei Brüche gleich groß sind oder welcher von beiden größer ist, könnten wir die Brüche auf dem Zahlenstrahl eintragen. Wenn beide Brüche an derselben Stelle liegen, sind beide Brüche gleich groß. Liegt einer der beiden Brüche rechts des anderen Bruchs, ist der rechts liegende Bruch größer und der links liegende Bruch ist kleiner.
Dieses Verfahren kann aber sehr mühsam sein. Liegen Brüche eng beieinander, ist der Unterschied vielleicht schwer zu erkennen, wie z. B. bei $\frac{23}{37}$ und $\frac{37}{59}$.



Deshalb brauchen wir ein Verfahren, mit dem wir zwei Brüche schnell und sicher vergleichen können. Eine mögliche Lösung besteht darin, die Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen und dann die Zähler zu vergleichen.
Erklärung: Wenn zwei Brüche den gleichen Nenner haben, nennen wir sie **gleichnamig**. Gleichnamige Brüche können wir vergleichen, indem wir die Zähler vergleichen. Z. B.: Es ist $\frac{4}{5}$ größer als $\frac{3}{5}$ - in Zeichen $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ (gelesen „vier Fünftel größer drei Fünftel“) -, weil 4 größer ist als 3.



Auch bei größeren Nennern können wir direkt entscheiden: $\frac{20}{26} < \frac{23}{26}$ (gesprochen: „zwanzig Sechsundzwanzigstel kleiner dreiundzwanzig Sechsundzwanzigstel“.



Wollen wir zwei gleichnamige Brüche vergleichen, kommt es gar nicht auf die Größe der Nenner an. Solange der *Zähler* des einen Bruchs größer ist als der des anderen, ist der *gesamte Bruch* größer als der andere.

$$\frac{20}{\text{irgendein Nenner}} < \frac{23}{\text{irgendein Nenner}}$$

Wir fassen zusammen:

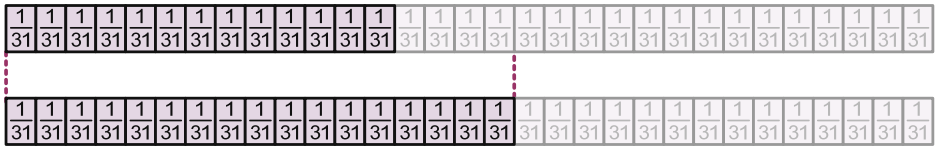
Brüche vergleichen:
1) Die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
2) Die Zähler der Brüche vergleichen: Der Bruch mit dem größten Zähler ist der größte Bruch, der Bruch mit dem kleinsten Zähler ist der kleinste Bruch.

Beispiel 1

Wir wollen die Brüche $\frac{13}{31}$ und $\frac{17}{31}$ miteinander vergleichen.
Weil beide Brüche den gleichen Nenner haben, brauchen wir die Brüche nicht zu erweitern.
Es ist $\frac{13}{31}$ kleiner als $\frac{17}{31}$.
Das können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{13}{31} < \frac{17}{31}$$

Gesprochen: Dreizehn Einunddreißigstel ist kleiner als siebzehn Einunddreißigstel.



Beispiel 2

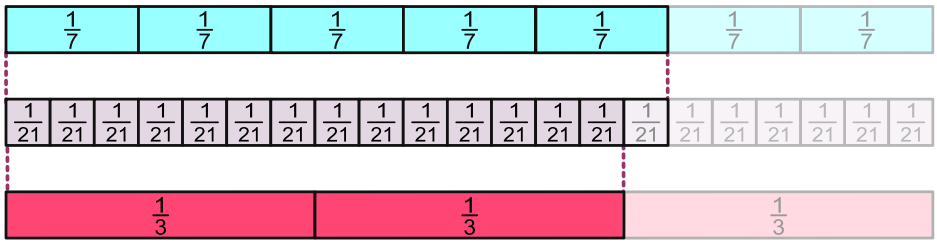
Wir wollen die Brüche $\frac{5}{7}$ und $\frac{2}{3}$ miteinander vergleichen.
Der Hauptnenner ist das **kgV** von 7 und 3, also 21. Wir erweitern:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$$

Weil $\frac{15}{21}$ größer ist als $\frac{14}{21}$, ist $\frac{5}{7}$ größer als $\frac{2}{3}$.
Das können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{15}{21} = \frac{5}{7} > \frac{2}{3} = \frac{14}{21}$$

Gesprochen: Fünfzehn Einundzwanzigstel gleich fünf Siebtel ist größer als zwei Drittel gleich vierzehn Einundzwanzigstel.



Beispiel 3

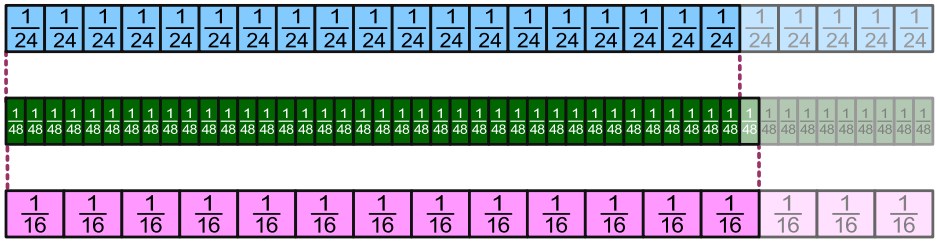
Wir wollen die Brüche $\frac{19}{24}$ und $\frac{13}{16}$ miteinander vergleichen.
Der Hauptnenner ist das **kgV** von 24 und 16, also 48. Wir erweitern:

$$\frac{19}{24} = \frac{19 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{38}{48} \quad ; \quad \frac{13}{16} = \frac{13 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{39}{48}$$

Weil $\frac{38}{48}$ kleiner ist als $\frac{39}{48}$, ist $\frac{19}{24}$ kleiner als $\frac{13}{16}$.
Das können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{38}{48} = \frac{19}{24} < \frac{13}{16} = \frac{39}{48}$$

Gesprochen: Achtunddreißig Achtundvierzigstel gleich neunzehn Vierundzwanzigstel ist kleiner als dreizehn Sechzehntel gleich neununddreißig Achtundvierzigstel.



Beispiel 4

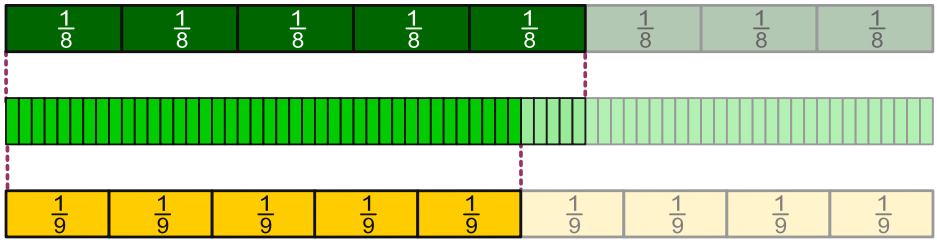
Wir wollen die Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{5}{9}$ miteinander vergleichen.
Der Hauptnenner ist das **kgV** von 8 und 9, also 72. Wir erweitern:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{45}{72} \quad ; \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{40}{72}$$

Weil $\frac{45}{72}$ größer ist als $\frac{40}{72}$, ist $\frac{5}{8}$ größer als $\frac{5}{9}$.
Das können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{45}{72} = \frac{5}{8} > \frac{5}{9} = \frac{40}{72}$$

Gesprochen: Fünfundvierzig Zweiundsiebzigstel gleich fünf Achtel ist größer als fünf Neuntel gleich vierzig Zweiundsiebzigstel.



Wir hätten uns in diesem Fall auch überlegen können:
Je kleiner der Nenner eines Bruchs ist, desto größer sind die Teile.
So ist $\frac{1}{8}$ größer als $\frac{1}{9}$.
Damit ist auch $\frac{5}{8}$ größer als $\frac{5}{9}$.
Allgemein gilt: Haben zwei Brüche den gleichen Zähler, ist der Bruch mit dem kleineren Nenner der größere.

Beispiel 5

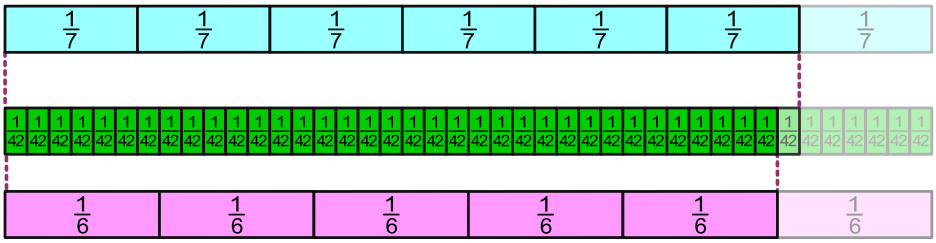
Wir wollen die Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{5}{6}$ miteinander vergleichen.
Der Hauptnenner ist das **kgV** von 7 und 6, also 42. Wir erweitern:

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42} \quad ; \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$$

Weil $\frac{36}{42}$ größer ist als $\frac{35}{42}$, ist $\frac{6}{7}$ größer als $\frac{5}{6}$.
Das können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{36}{42} = \frac{6}{7} > \frac{5}{6} = \frac{35}{42}$$

Gesprochen: Sechsunddreißig Zweiundvierzigstel gleich sechs Siebtel ist größer als fünf Sechstel gleich fünfunddreißig Zweiundvierzigstel.

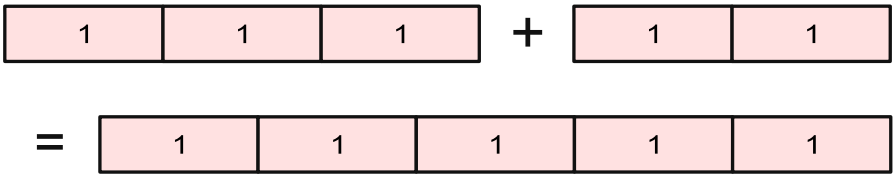


Wir hätten uns in diesem Fall auch überlegen können:
Von $\frac{6}{7}$ fehlt bis zu einem Ganzen $\frac{1}{7}$.
Von $\frac{5}{6}$ fehlt bis zu einem Ganzen $\frac{1}{6}$.
Weil $\frac{1}{6}$ größer ist als $\frac{1}{7}$, fehlt $\frac{5}{6}$ zu einem Ganzen mehr als $\frac{6}{7}$.
Deshalb ist $\frac{6}{7}$ größer als $\frac{5}{6}$.

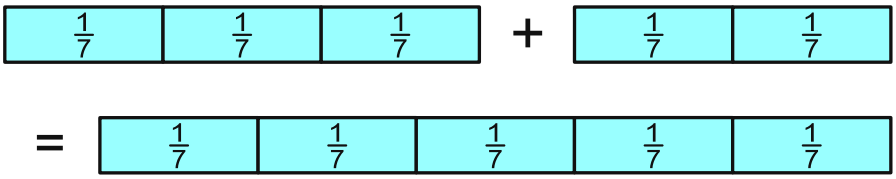
7 Brüche addieren

7.1 Gleichnamige Brüche addieren

Wir wissen, wie wir natürliche Zahlen addieren. Wir rechnen z. B.: $3 + 2 = 5$.
Mit Zahl-Streifen können wir uns das so vorstellen:



Brüche wollen wir in ähnlicher Weise addieren. So soll z. B. gelten: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
Das sieht mit den Bruchstreifen so aus:



Wie wir sehen, können wir gleichnamigen Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren und die Nenner beibehalten. Deshalb legen wir fest:

> Gleichnamige Brüche werden addiert,
> indem die Zähler addiert werden.
> Die Nenner bleiben gleich.

Diesen Zusammenhang können wir auch als Formel aufschreiben:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Immer, wenn wir die Variablen durch Zahlen ersetzen, entsteht eine richtige Gleichung.
Z. B.:
Ersetzen wir a durch 2, b durch 5 und c durch 3, erhalten wir die richtige Gleichung:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

Wir können auch **a** durch **7**, **b** durch **1** und **c** durch **9** ersetzen. Dann erhalten wir wieder eine richtige Gleichung:

$$\frac{7}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7+1}{9} = \frac{8}{9}$$

7.2 Ungleichnamige Brüche addieren

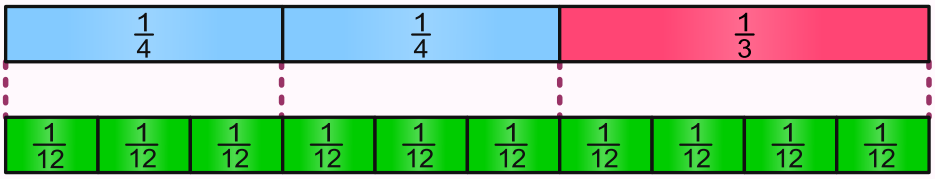
Problem: Wenn wir ungleichnamige Brüche addieren wollen, müssen wir anders vorgehen, denn die Nenner können nicht gleich bleiben, da sie unterschiedlich sind. Z. B.:

Lösung: Wir erweitern die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und addieren die erweiterten Brüche. Hier ist die Begründung:

Das Ergebnis von z. B. $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}$ soll die Gesamtlänge der beiden Bruchstreifen sein.

Zu der gleichen Gesamtlänge kommen wir aber auch, wenn wir $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{3}$ durch andere Brüche gleicher Größe ersetzen.

Z. B. können wir $\frac{2}{4}$ durch $\frac{6}{12}$ und $\frac{1}{3}$ durch $\frac{4}{12}$ ersetzen.



Weil $\frac{6}{12}$ und $\frac{4}{12}$ gleiche Nenner haben, können wir die beiden Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren und die Nenner beibehalten.

Also: $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$.

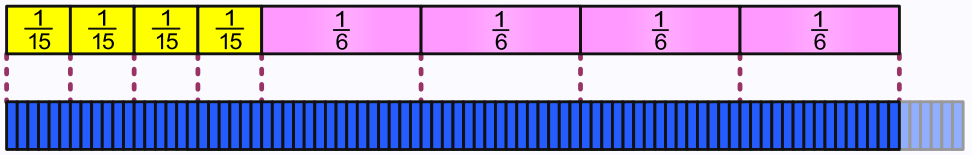
Beim Addieren von Brüchen sind noch drei Punkte zu beachten:

1. Hauptnenner

Wollen wir zwei ungleichnamige Brüche addieren, könnten wir einen gemeinsamen Nenner finden, indem wir die Nenner der beiden Brüche multiplizieren. Das kann aber zu unnötig großen Zahlen führen. Deshalb werden wir Brüche normalerweise nur auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner - also den Hauptnenner - erweitern.
Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:

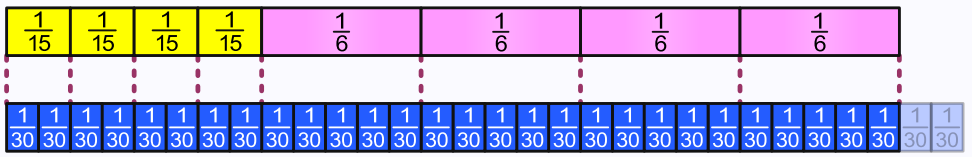
Möchten wir die Brüche $\frac{4}{15}$ und $\frac{4}{6}$ addieren, könnten wir jeden Bruch mit dem Nenner des jeweils anderen Bruchs erweitern. Dann müssten wir mit 90-steln weiterrechnen.

$$\frac{4}{15}+\frac{4}{6}=\frac{4\cdot 6}{15\cdot 6}+\frac{4\cdot 15}{6\cdot 15}=\frac{24}{90}+\frac{60}{90}=\frac{84}{90}$$



Weil das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 15 und 6 aber 30 ist, reicht es, auf 30-stel zu erweitern.

$$\frac{4}{15}+\frac{4}{6}=\frac{4\cdot 2}{15\cdot 2}+\frac{4\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{8}{30}+\frac{20}{30}=\frac{28}{30}$$



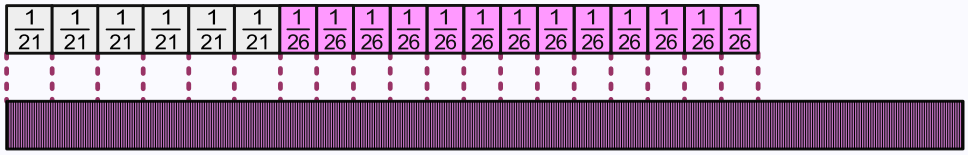
2. Am Anfang: kürzen

Um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen, werden wir zwei Brüche, die wir addieren möchten, erst so weit wie möglich kürzen, bevor wir sie addieren.

Schauen wir uns den Vorteil an einem Beispiel an:

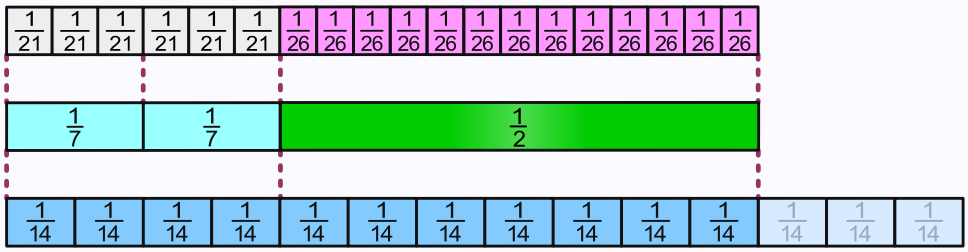
Möchten wir die Brüche $\mathbf{\frac{6}{21}}$ und $\mathbf{\frac{13}{26}}$ addieren, könnten wir beide Brüche auf das kgV von 21 und 26 erweitern. Dann müssten wir mit 546-steln weiterrechnen.

$$\frac{6}{21}+\frac{13}{26}=\frac{6\cdot 26}{21\cdot 26}+\frac{13\cdot 21}{26\cdot 21}=\frac{156}{546}+\frac{273}{546}=\frac{429}{546}$$



Wenn wir aber zunächst kürzen, erhalten wir einen viel kleineren Hauptnenner.

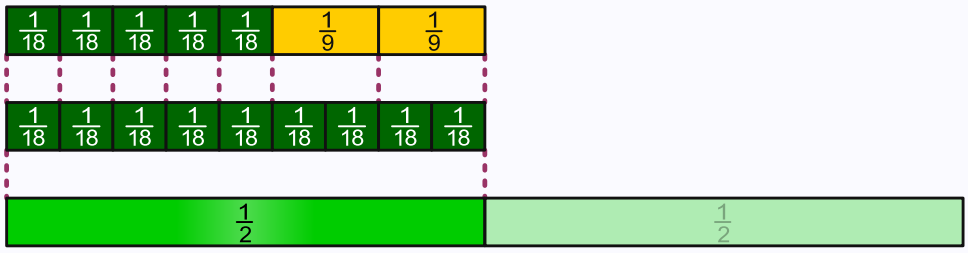
$$\frac{6}{21}+\frac{13}{26}=\frac{6:3}{21:3}+\frac{13:13}{26:13}=\frac{2}{7}+\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{4}{14}+\frac{7}{14}=\frac{11}{14}$$



3. Am Ende: kürzen

Haben wir Brüche addiert, schreiben wir das Ergebnis in der einfachsten Form auf. Das bedeutet: Wenn wir den Ergebnisbruch kürzen können, dann machen wir das. Z. B.:

$$\frac{5}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}+\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{5}{18}+\frac{4}{18}=\frac{9}{18}=\frac{9:9}{18:9}=\frac{1}{2}$$

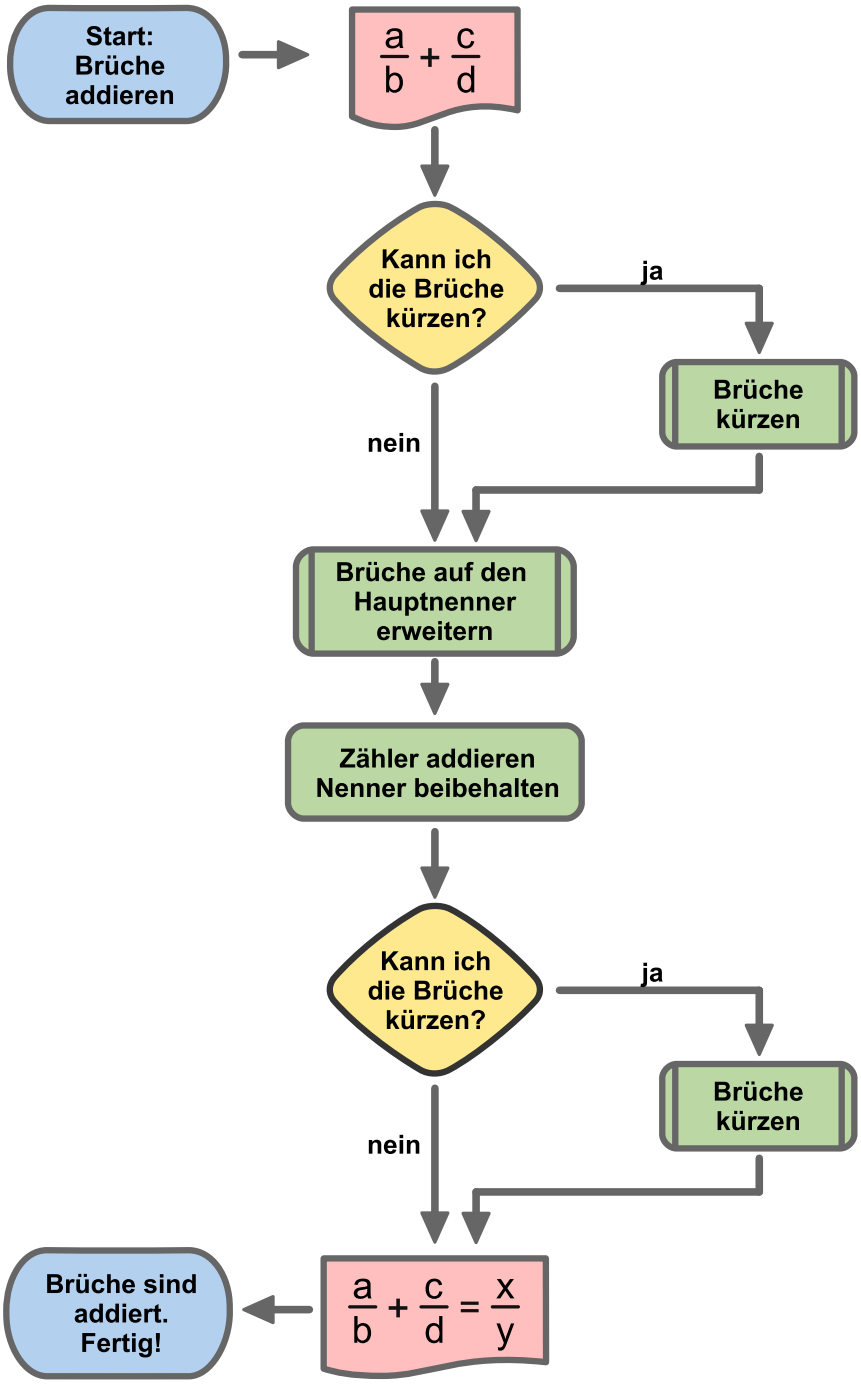


Ist der Ergebnisbruch gleich einer natürlichen Zahl, dann schreiben wir die Zahl als Ergebnis hin und nicht den Bruch. Z. B.:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=\frac{8:4}{4:4}=\frac{2}{1}=2$$

7.3 Flussdiagramm

Das Verfahren der Addition von Brüchen mit allen Schritten ist in dem folgenden Flussdiagramm dargestellt.



7.4 Beispiele

Schauen wir uns dazu Beispiele an.

Beispiel 1

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{1}{8}$ und $\frac{3}{9}$ addieren.

2. Kürzen?

$\frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$ Ab jetzt addieren wir $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{3}$.

3. Hauptnenner

$\frac{1}{8} = \frac{1\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{3}{24}$; $\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 8}{3\cdot 8} = \frac{8}{24}$

4. Addieren

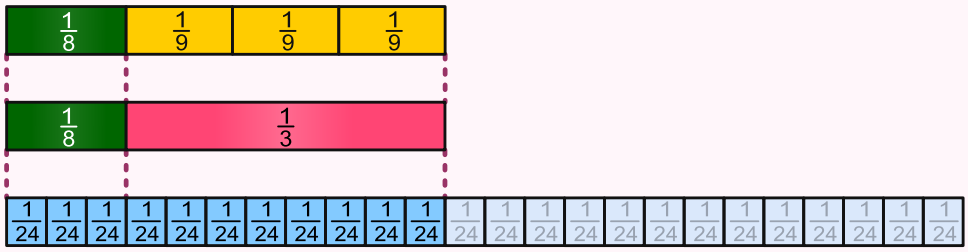
$\frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}$

5. Kürzen?

$\frac{11}{24}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{9} = \frac{1}{8} + \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{8\cdot 3} + \frac{1\cdot 8}{3\cdot 8} = \frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}$$



Beispiel 2

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{7}{9}$ und $\frac{1}{2}$ addieren.

2. Kürzen?

$\frac{7}{9}$ und $\frac{1}{2}$ können wir nicht kürzen.

3. Hauptnenner

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18} \; ; \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18}$$

4. Addieren

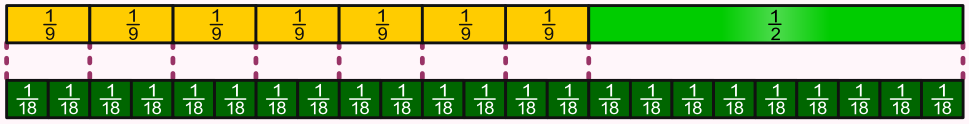
$$\frac{14}{18} + \frac{9}{18} = \frac{23}{18}$$

5. Kürzen?

$\frac{23}{18}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{7}{9} + \frac{1}{2} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{14}{18} + \frac{9}{18} = \frac{23}{18}$$



Beispiel 3

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{3}{18}$ und $\frac{6}{20}$ addieren.

2. Kürzen?

$$\frac{3}{18} = \frac{3:3}{18:3} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{6}{20} = \frac{6:2}{20:2} = \frac{3}{10}$$

3. Hauptnenner

$$\frac{1}{6} = \frac{1\cdot 5}{6\cdot 5} = \frac{5}{30} \; ; \quad \frac{3}{10} = \frac{3\cdot 3}{10\cdot 3} = \frac{9}{30}$$

4. Addieren

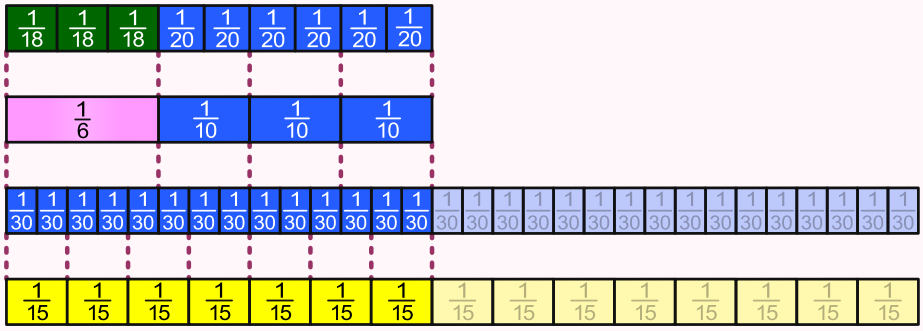
$$\frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30}$$

5. Kürzen?

$$\frac{14}{30} = \frac{14:2}{30:2} = \frac{7}{15}$$

6. Ergebnis

$$\frac{3}{18} + \frac{6}{20} = \frac{3:3}{18:3} + \frac{6:2}{20:2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{1\cdot 5}{6\cdot 5} + \frac{3\cdot 3}{10\cdot 3} = \frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{14:2}{30:2} = \frac{7}{15}$$



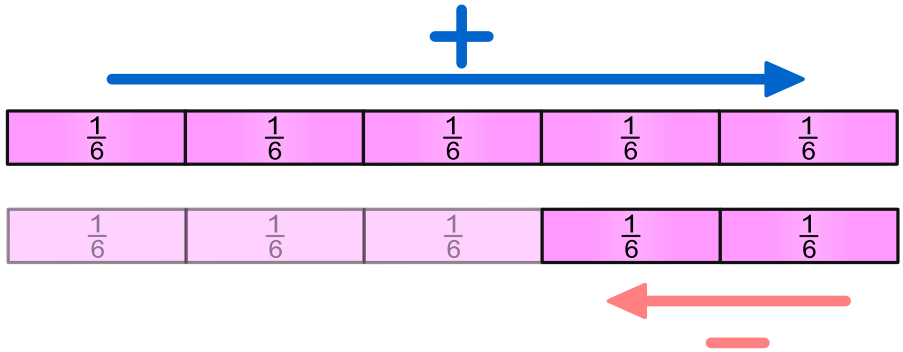
8 Brüche subtrahieren

8.1 Gleichnamige Brüche subtrahieren

Um uns das *Addieren* von Brüchen mit den Bruchstreifen vorzustellen, haben wir einfach zwei Bruchstreifen nebeneinander gelegt. Um uns das *Subtrahieren* von Brüchen mit den Bruchstreifen vorzustellen, können wir uns die Bruchteile als Schritte vorstellen:

Die Rechnung $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$ wird dann zu:

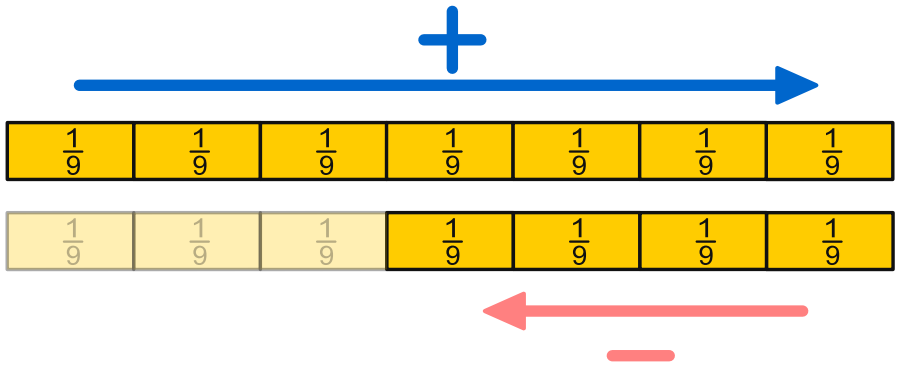
Erst gehen wir 5 Sechstel-Schritte nach rechts und dann 2 Sechstel-Schritte nach links. Dann kommen wir bei 3 Sechstel-Schritten an und das ist auch das Ergebnis der Subtraktion.
Also: $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$.



Als wir gleichnamige Brüche addiert haben, haben wir die beiden Zähler addiert und die Nenner beibehalten. Wenn wir gleichnamige Brüche subtrahieren, können wir so ähnlich vorgehen. Wir subtrahieren die Zähler und behalten die Nenner bei. Die Rechnung sieht dann so aus:

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$$

Schauen wir uns die Subtraktion an einem weiteren Beispiel an:



Hier gehen wir erst 7 Neuntel-Schritte nach rechts und dann 4 Neuntel-Schritte nach links. Dann kommen wir bei 3 Neunteln an.
Diese Situation können wir auch mit Zahlen ausdrücken:

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}$$

Wenn wir Brüche subtrahieren, können wir sehr ähnlich wie beim Addieren von Brüchen vorgehen.

> Zwei gleichnamige Brüche werden subtrahiert,
> indem die Zähler subtrahiert werden.
> Die Nenner bleiben gleich.

Als Formel schreiben wir das so:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Wie üblich nennen wir das Ergebnis einer Subtraktion „**Differenz**“.
Die Differenz schreiben wir immer als gekürzten Bruch auf. Z. B.:

$$\frac{11}{8} - \frac{5}{8} = \frac{11-5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Ist die Differenz gleich einer natürlichen Zahl, dann schreiben wir als Ergebnis diese natürliche Zahl hin. Z. B.:

$$\frac{15}{4} - \frac{3}{4} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = \frac{12:4}{4:4} = \frac{3}{1} = 3$$

8.2 Ungleichnamige Brüche subtrahieren

Wollen wir ungleichnamige Brüche subtrahieren, bringen wir erst die Brüche auf den Hauptnenner und subtrahieren dann diese gleichnamigen Brüche. Z. B.:

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{20} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{25}{40} - \frac{6}{40} = \frac{25 - 6}{40} = \frac{19}{40}$$

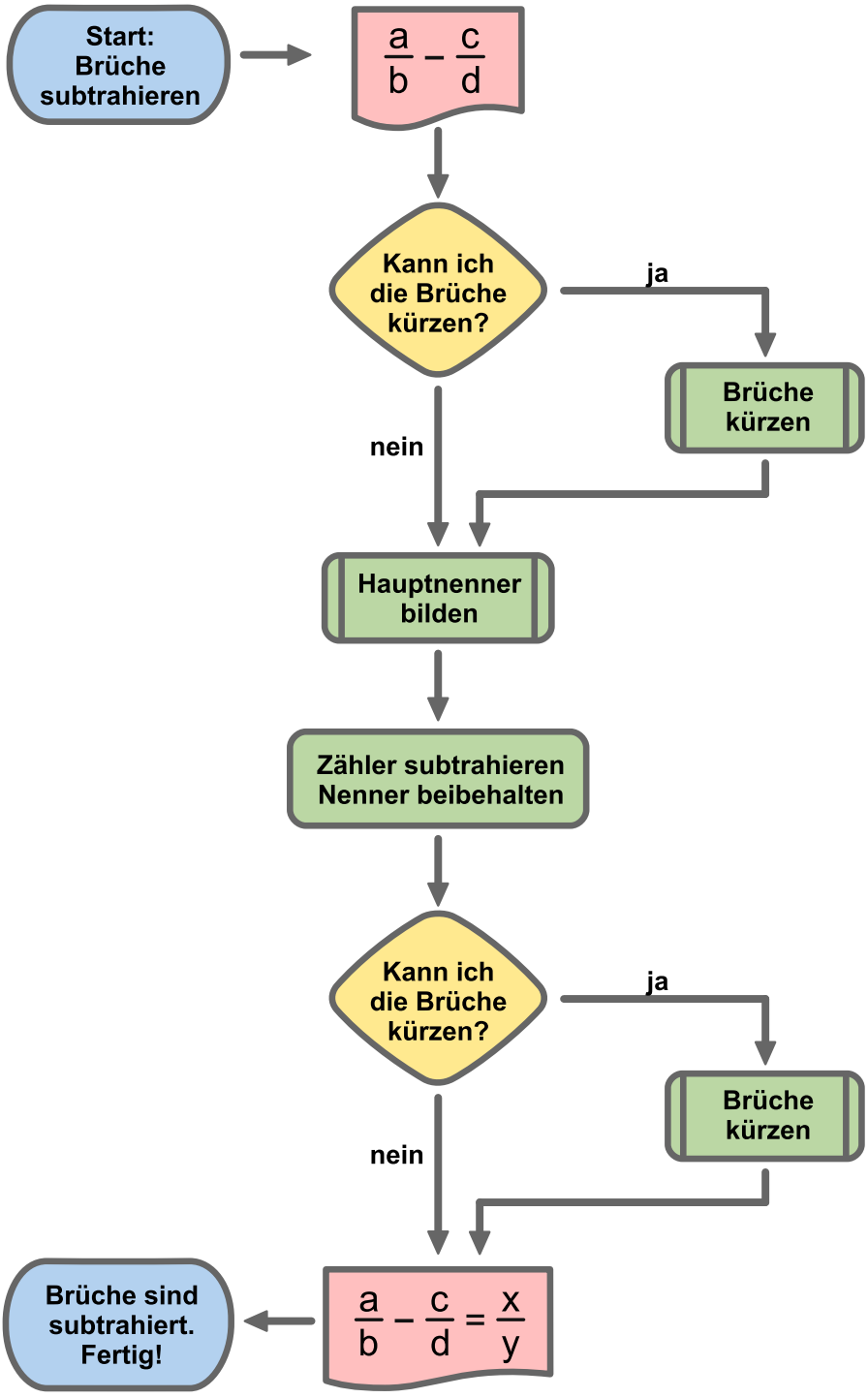
und

$$\frac{9}{10} - \frac{6}{7} = \frac{9 \cdot 7}{10 \cdot 7} - \frac{6 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{63}{70} - \frac{60}{70} = \frac{63 - 60}{70} = \frac{3}{70}$$

.

8.3 Flussdiagramm

Das Flussdiagramm zeigt das Verfahren, mit dem wir Brüche subtrahieren.



8.4 Beispiele

Schauen wir uns dazu ein paar Beispiele an.

Beispiel 1

1. Ziel?

Wir möchten $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahieren, also $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ rechnen.

2. Kürzen?

Weder $\frac{3}{4}$ noch $\frac{1}{3}$ können wir kürzen.

3. Hauptnenner

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \; ; \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$$

4. Subtrahieren

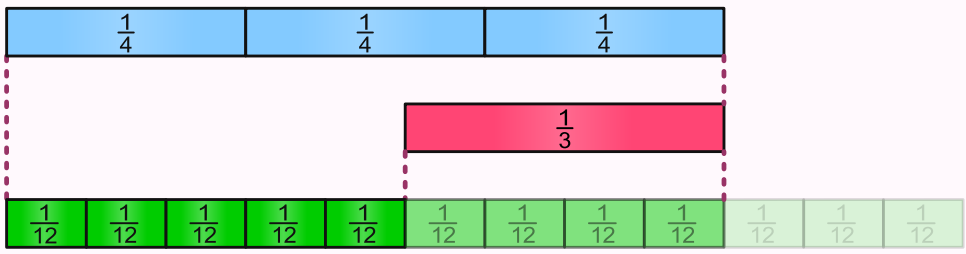
$$\frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

5. Kürzen?

$\frac{5}{12}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$



Beispiel 2

1. Ziel?

Wir möchten $\frac{4}{6}$ von $\frac{14}{15}$ subtrahieren, also $\frac{14}{15} - \frac{4}{6}$ rechnen.

2. Kürzen?

$\frac{14}{15}$ können wir nicht kürzen; $\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$

3. Hauptnenner

$$\frac{14}{15}\ ;\ \frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{15}$$

4. Subtrahieren

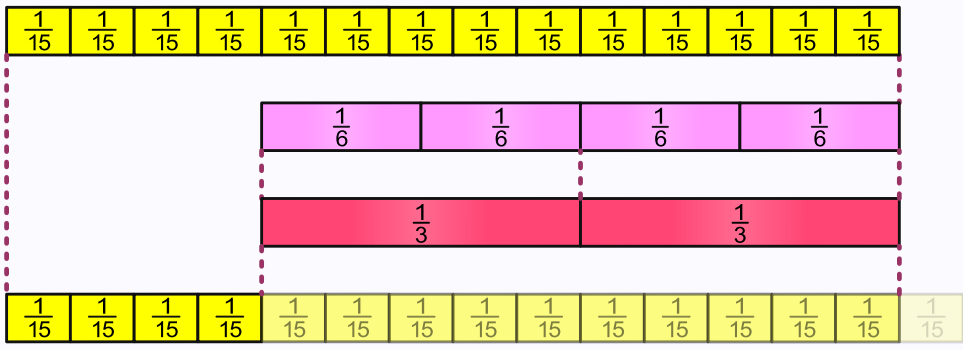
$$\frac{14}{15} - \frac{10}{15} = \frac{4}{15}$$

5. Kürzen?

$\frac{4}{15}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{14}{15} - \frac{4}{6} = \frac{14}{15} - \frac{4:2}{6:2} = \frac{14}{15} - \frac{2}{3} = \frac{14}{15} - \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{14}{15} - \frac{10}{15} = \frac{4}{15}$$



Beispiel 3

1. Ziel?

Wir möchten $\frac{13}{26}$ von $\frac{18}{21}$ subtrahieren, also $\frac{18}{21} - \frac{13}{26}$ rechnen.

2. Kürzen?

$$\frac{18}{21} = \frac{18:3}{21:3} = \frac{6}{7} \text{ und } \frac{13}{26} = \frac{13:13}{26:13} = \frac{1}{2}$$

3. Hauptnenner

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{12}{14} \; ; \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{7}{14}$$

4. Subtrahieren

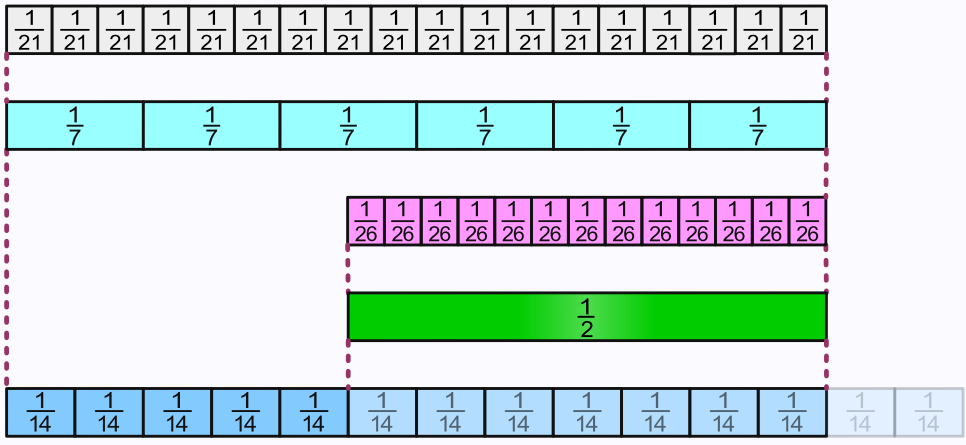
$$\frac{12}{14} - \frac{7}{14} = \frac{5}{14}$$

5. Kürzen?

$\frac{5}{14}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{18}{21} - \frac{13}{26} = \frac{18:3}{21:3} - \frac{13:13}{26:13} = \frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 2}{7 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{12}{14} - \frac{7}{14} = \frac{5}{14}$$



Beispiel 4

1. Ziel?

Wir möchten $\frac{20}{75}$ von $\frac{22}{24}$ subtrahieren, also $\frac{22}{24} - \frac{20}{75}$ rechnen.

2. Kürzen?

$$\frac{22}{24} = \frac{22:2}{24:2} = \frac{11}{12} \quad \text{und} \quad \frac{20}{75} = \frac{20:5}{75:5} = \frac{4}{15}$$

3. Hauptnenner

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{55}{60} \; ; \quad \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{16}{60}$$

4. Subtrahieren

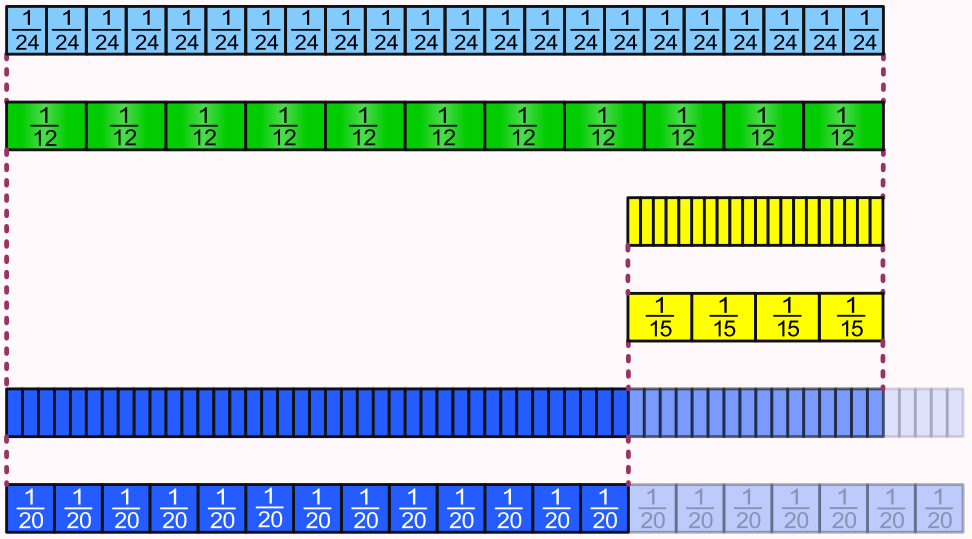
$$\frac{55}{60} - \frac{16}{60} = \frac{39}{60}$$

5. Kürzen?

$$\frac{39}{60} = \frac{39:3}{60:3} = \frac{13}{20}$$

6. Ergebnis

$$\frac{22}{24} - \frac{20}{75} = \frac{22:2}{24:2} - \frac{20:5}{75:5} = \frac{11}{12} - \frac{4}{15} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{55}{60} - \frac{16}{60} = \frac{39}{60} = \frac{39:3}{60:3} = \frac{13}{20}$$



Beispiel 5

1. Ziel?

Wir möchten $\frac{10}{12}$ von $\frac{42}{45}$ subtrahieren, also $\frac{42}{45} - \frac{10}{12}$ rechnen.

2. Kürzen?

$$\frac{42}{45} = \frac{42:3}{45:3} = \frac{14}{15} \quad \text{und} \quad \frac{10}{12} = \frac{10:2}{12:2} = \frac{5}{6}$$

3. Hauptnenner

$$\frac{14}{15} = \frac{14 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{28}{30} \; ; \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$$

4. Subtrahieren

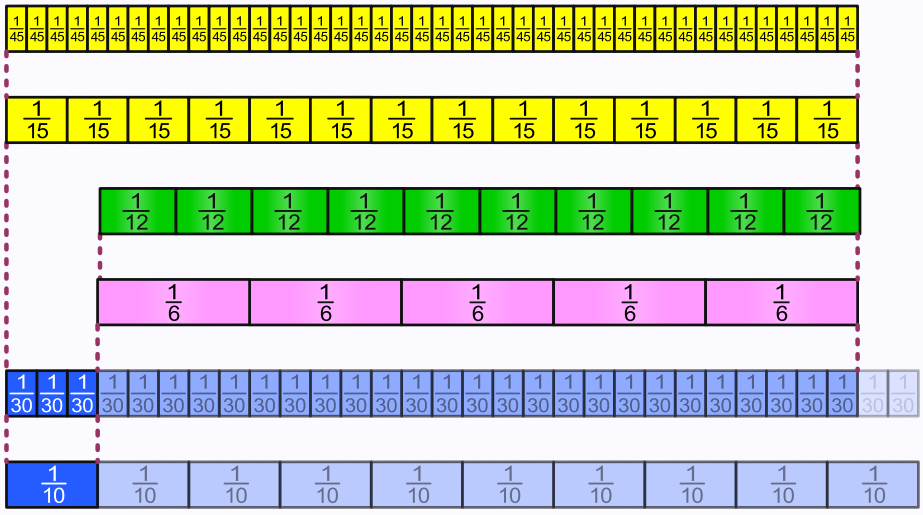
$$\frac{28}{30} - \frac{25}{30} = \frac{3}{30}$$

5. Kürzen?

$$\frac{3}{30} = \frac{3:3}{30:3} = \frac{1}{10}$$

6. Ergebnis

$$\frac{42}{45} - \frac{10}{12} = \frac{42:3}{45:3} - \frac{10:2}{12:2} = \frac{14}{15} - \frac{5}{6} = \frac{14 \cdot 2}{15 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{28}{30} - \frac{25}{30} = \frac{3}{30} = \frac{3:3}{30:3} = \frac{1}{10}$$



9 Brüche multiplizieren

In der Mathematik hat sich die folgende Regel durchgesetzt:

> Brüche werden multipliziert, indem
> die Zähler und die Nenner multipliziert werden.

Diese Regel können wir kurz so zusammenfassen:

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.

Verwenden wir Variablen, können wir das sehr kurz so aufschreiben:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Dabei stehen a, b, c und d für natürlichen Zahlen, wobei b und d ungleich 0 sein sollen.

9.1 Beispiele

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

Die Zahlen, die multipliziert werden, nennen wir **Faktoren**. Hier werden also die Faktoren $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ multipliziert.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

Das Ergebnis einer Multiplikation nennen wir **Produkt**. Hier ist das Produkt der Bruch $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$.

$\frac{4}{1} \cdot \frac{6}{1} = \frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 1} = \frac{24}{1} = 24$

Wenden wir die Bruchmultiplikation auf natürliche Zahlen an, erhalten wir die Ergebnisse, die wir vom Rechnen mit natürlichen Zahlen gewohnt sind, denn $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1}}$ ist gleich **4**, $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{1}}$ ist gleich **6**, $\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{1}}$ ist gleich **24** und $\mathbf{4 \cdot 6}$ ist gleich **24**.

Um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen, kürzen wir Brüche, bevor wir sie multiplizieren.

$$\frac{15}{9} \cdot \frac{14}{21} = \frac{15 : 3}{9 : 3} \cdot \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

Wenn sich ein weiteres Mal die Möglichkeit ergibt, zu kürzen, dann machen wir das auch.

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{8} = \frac{6 : 3}{3 : 3} \cdot \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{1 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Manchmal schreiben wir eine Zahl als Produkt von Primzahlen auf, um kürzen zu können.

$$\frac{14}{21}\cdot\frac{25}{20}=\frac{14:7}{21:7}\cdot\frac{25:5}{20:5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot5}{3\cdot4}=\frac{2\cdot5}{3\cdot2\cdot2}=\frac{\cancel{2}\cdot5}{3\cdot\cancel{2}\cdot2}=\frac{5}{3\cdot2}=\frac{5}{6}$$

Gerade bei „größeren“ Zahlen kann es hilfreich sein, direkt am Anfang beide Zähler und Nenner als Produkte von Primzahlen zu schreiben.
Beispiel 1:

$$\frac{14}{21}\cdot\frac{25}{20}=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}\cdot\frac{5\cdot5}{2\cdot2\cdot5}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{7}}{3\cdot\cancel{7}}\cdot\frac{5\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}\cdot2\cdot\cancel{5}}=\frac{5}{3\cdot2}=\frac{5}{6}$$

Beispiel 2:

$$\frac{198}{140}\cdot\frac{60}{99}=\frac{2\cdot3\cdot3\cdot11}{2\cdot2\cdot5\cdot7}\cdot\frac{2\cdot2\cdot5\cdot3}{3\cdot3\cdot11}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{11}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}\cdot7}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot2\cdot\cancel{5}\cdot3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{11}}=\frac{6}{7}$$

9.2 Sprechweisen

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$ ist „ein Drittel mal ein Viertel“ oder „ein Drittel von ein Viertel“.

Wir sagen nicht: „ein Drittel von einem Viertel“ und auch nicht „ein Drittel eines Viertels“, weil nicht ein bestimmtes Viertel gemeint ist, sondern die Zahl $\frac{1}{4}$.

Dabei übertragen wie die Sprechweisen, die wie von den natürlichen Zahlen kennen, auf die Bruchrechnung, denn:

$\mathbf{3}\cdot\mathbf{4}$ ist „das dreifache von Vier“ und nicht „das dreifache von einer Vier“ oder „das dreifache einer Vier“ oder „das Dreifache eines Vierers“. Ebenso bezeichnen wir

$\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7}$ mit „zwei Fünftel mal neun Siebtel“ oder mit „zwei Fünftel von neun Siebtel“.

Wir sagen nicht: „zwei Fünftel von neun Siebteln“ und auch nicht „zwei Fünftel des neunfachen eines Siebtels“.

9.3 Erklärung der Bruchmultiplikation

Wir kennen die Multiplikation natürlicher Zahlen als Abkürzung der Addition. Z. B.:

$$3\cdot4=4+4+4=12\ .$$

Es ist also $3\cdot4$ das Dreifache von Vier.

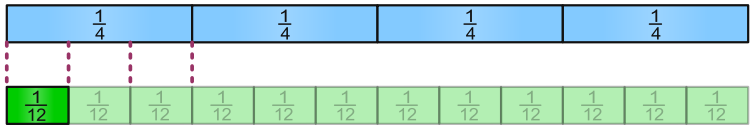
Wenn wir eine natürliche Zahl mit einem Bruch multiplizieren, wollen wir das genauso verstehen. Dann ist z. B. $\mathbf{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Damit ist dann $\mathbf{3}\cdot\frac{1}{4}$ das Dreifache von ein Viertel.

Auf dieses Ergebnis kommen wir auch, wenn wir die oben definierte Bruchmultiplikation verwenden:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Was könnte nun $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ sein?
Wenn $\mathbf{3} \cdot \frac{1}{4}$ das Dreifache von ein Viertel ist, könnte doch $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ ein Drittel von ein Viertel sein.

Wie wir z. B. an den Bruchstreifen sehen können, ist ein Drittel von ein Viertel ein Zwölftel, denn wenn wir jedes Viertel in drei gleich große Teile teilen, passen $\mathbf{3 \cdot 4 = 12}$ dieser Teile auf ein Ganzes.



Zu genau diesem Ergebnis kommen wir auch, wenn wir **Zähler mal Zähler** und **Nenner mal Nenner** rechnen.

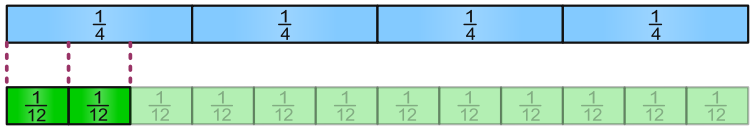
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Von den natürlichen Zahlen kennen wir die folgende Situation: Wenn wir z. B. $\mathbf{3} \cdot \mathbf{4}$ rechnen, erhalten wir **12**, und wenn wir $\mathbf{6} \cdot \mathbf{4}$ rechnen, erhalten wir das Doppelte von **12**, nämlich **24**. Dementsprechend soll das Ergebnis von $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ doppelt so groß sein wie das Ergebnis von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

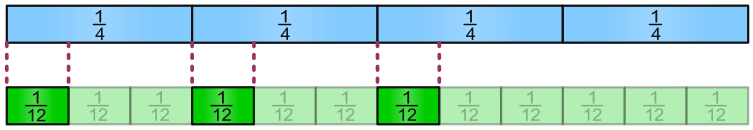
Genau dieses Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Definition verwenden.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12}$$

Auch das können wir an den Bruchstreifen nachvollziehen. Wenn wir ein Drittel von ein Viertel bilden, erhalten wir ein Zwölftel. Wenn wir *zwei* Drittel von ein Viertel bilden, erhalten wir *zwei* Zwölftel.



Um $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ mit den Bruchstreifen zu veranschaulichen, könnten wir $\frac{3}{4}$ in **3** gleich große Teile teilen. Das wäre zwar richtig und sinnvoll, aber dann könnten wir nicht so gut sehen, dass die Regel *Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner* sinnvoll ist.
Deshalb entscheiden wir uns für die folgende Methode: Wir bilden ein Drittel jedes der **3** Viertel des Bruchstreifens. Wie wir sehen, sind das $\frac{3}{12}$.



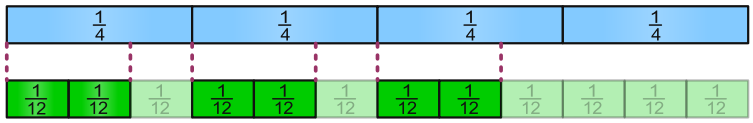
Multiplizieren wir entsprechend der Definition, tritt genau das gleiche ein:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12}$$

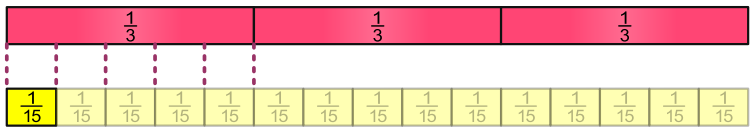
Folgen wir dieser Logik weiter, so soll $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ das dreifache von $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ sein.
Dieses Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Definition verwenden:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}$$

denn sechs Zwölftel sind dreimal so groß wie zwei Zwölftel.



Schauen wir uns die Bruchmultiplikation an einem weiteren Beispiel an:
Wenn wir ein Drittel in **5** gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile ein Fünfzehntel, weil $\mathbf{5 \cdot 3 = 15}$ dieser Teile auf ein Ganzes passen.

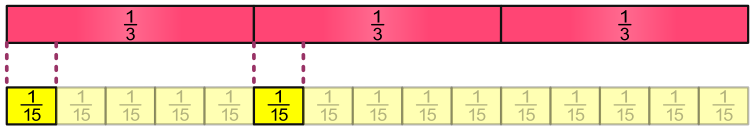


Das Ergebnis von $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$
soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{3}$?“

Wir rechnen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$$

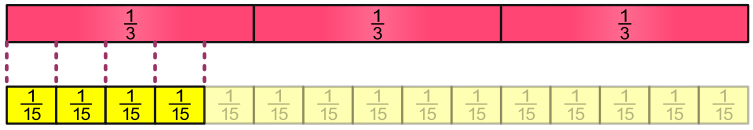
Das Ergebnis von $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$
soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{2}{3}$?“



Wir rechnen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

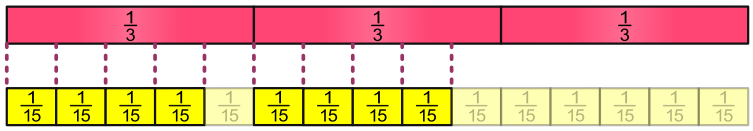
Das Ergebnis von $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$
soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel sind $\frac{4}{5}$ von $\frac{1}{3}$?“



Wir rechnen:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

Das Ergebnis von $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$
soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel sind $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$?“



Wir rechnen:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

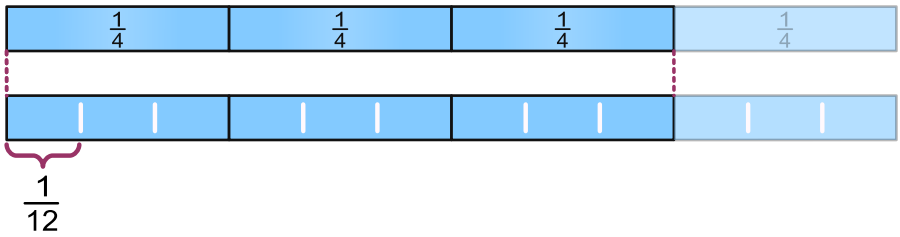
9.4 Beispiele

Schauen wir uns noch ein paar Beispiele an:

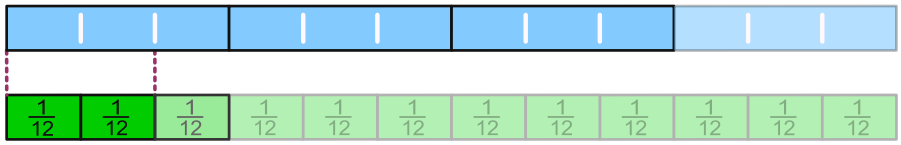
Beispiel 1

Wie wollen die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ multiplizieren, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ausrechnen.
Wir fragen uns: Was sind zwei Drittel von drei Viertel?

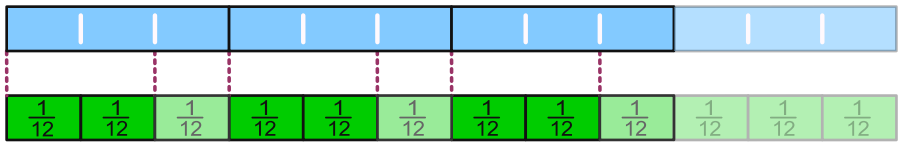
Zunächst teilen wir alle 4 Viertel in 3 Einheiten. Dadurch entstehen $3 \cdot 4 = 12$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{12}$ des Ganzen.



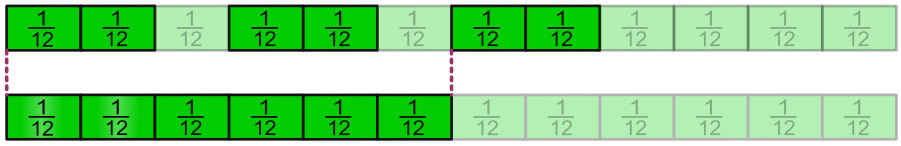
$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ sind 2 Einheiten.



$\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ sind dann $2 \cdot 3 = 6$ Einheiten.

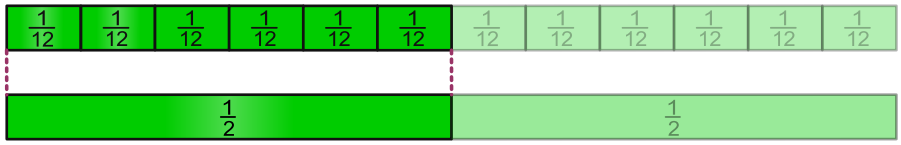


Zusammen sind das $\frac{6}{12}$.



Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

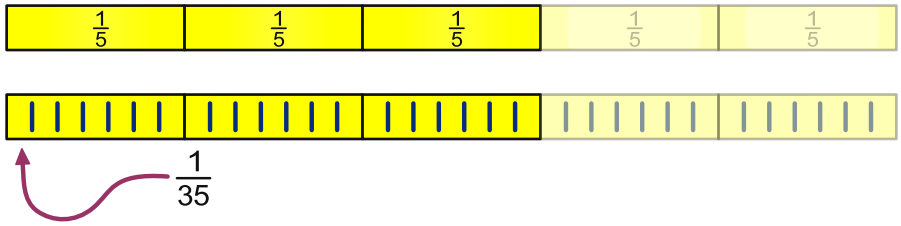
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{6 : 6}{12 : 6} = \frac{1}{2}$$



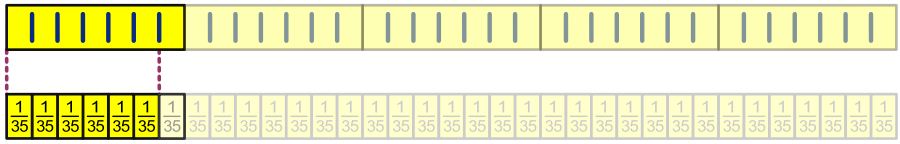
Beispiel 2

Wie wollen die Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{3}{5}$ multiplizieren, also $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5}$ ausrechnen.
Wir fragen uns: Was sind sechs Siebtel von drei Fünftel?

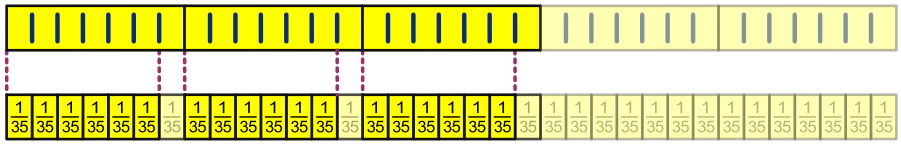
Zunächst teilen wir alle 5 Fünftel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 5 = 35$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{35}$ des Ganzen.



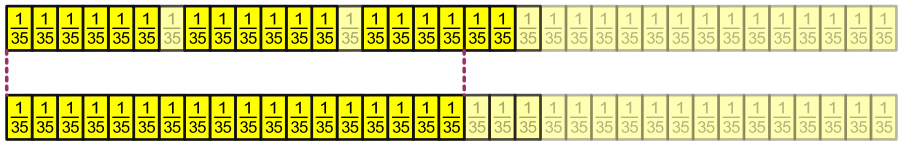
$\frac{6}{7}$ von $\frac{1}{5}$ sind 6 Einheiten.



$\frac{6}{7}$ von $\frac{3}{5}$ sind dann $6 \cdot 3 = 18$ Einheiten.



Zusammen sind das $\frac{18}{35}$.

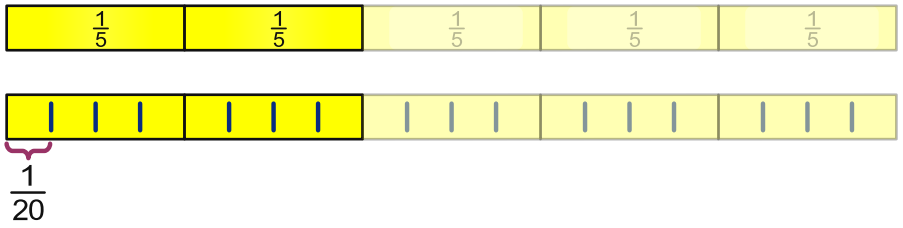


Hier ist die vollständige Rechnung dazu:

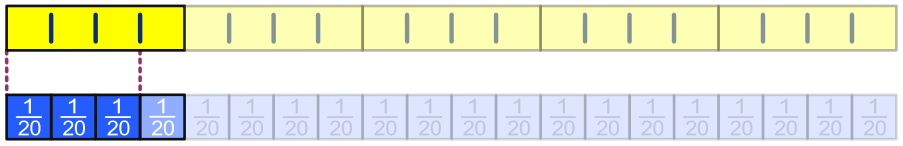
$$\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{18}{35}$$

Beispiel 3

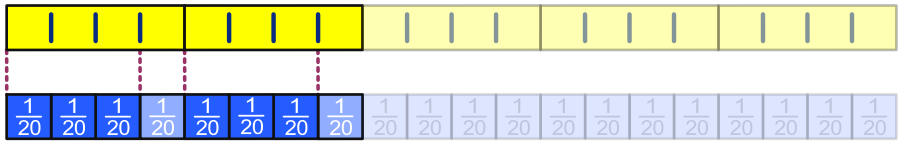
Wie wollen die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ multiplizieren, also $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ ausrechnen.
Wir fragen uns: Was sind drei Viertel von zwei Fünftel?
Zunächst teilen wir alle 5 Fünftel in 4 Einheiten. Dadurch entstehen $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{20}$ des Ganzen.



$\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{5}$ sind 3 Einheiten.



$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ sind dann $3 \cdot 2 = 6$ Einheiten.



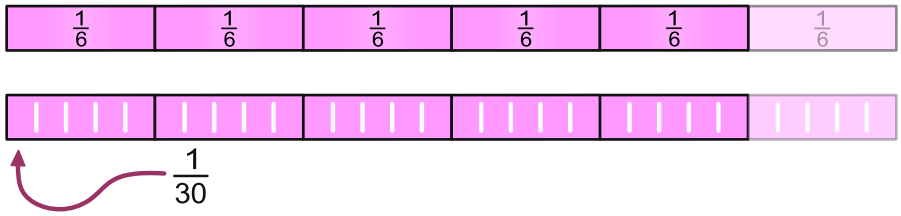
Zusammen sind das $\frac{6}{20}$.

Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

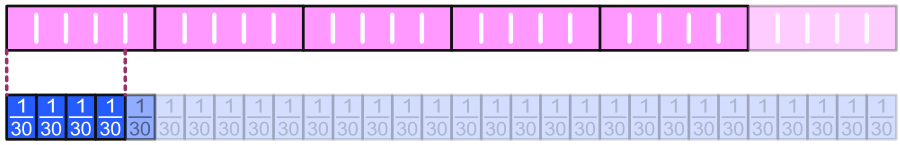
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{6 : 2}{20 : 2} = \frac{3}{10}$$

Beispiel 4

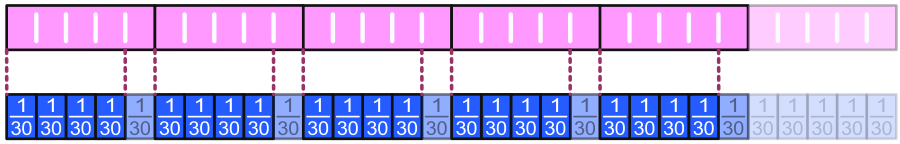
Wie wollen die Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ multiplizieren, also $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$ ausrechnen.
Wir fragen uns: Was sind vier Fünftel von fünf Sechstel?
Zunächst teilen wir alle 6 Sechstel in 5 Einheiten. Dadurch entstehen $5 \cdot 6 = 30$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{30}$ des Ganzen.



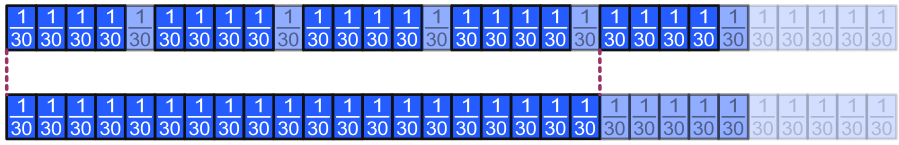
$\frac{4}{5}$ von $\frac{1}{6}$ sind 4 Einheiten.



$\frac{4}{5}$ von $\frac{5}{6}$ sind dann $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten.

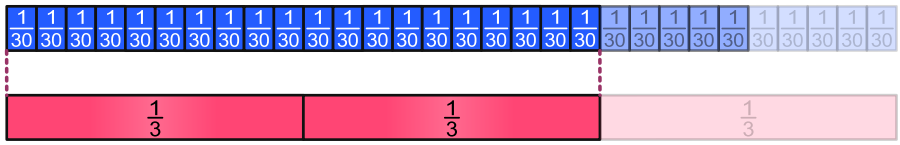


Zusammen sind das $\frac{20}{30}$.



Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}$$



Dieses Ergebnis hätte wir übrigens auch erhalten, wenn wir die Brüche vor der Multiplikation gekürzt hätten. Aber dann hätten wir nichts mehr zu multiplizieren gehabt.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

9.5 Anschauliche Bruchmultiplikation

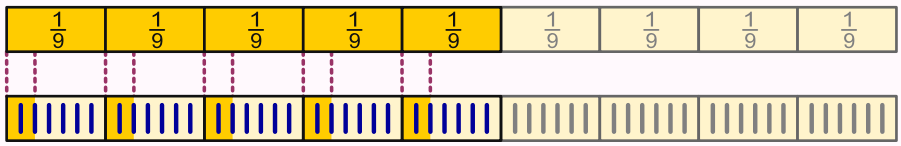
Wir können uns die Multiplikation von Brüchen nach einem Standardverfahren vorstellen. Hier sind ein paar Beispiele.

Beispiel 1

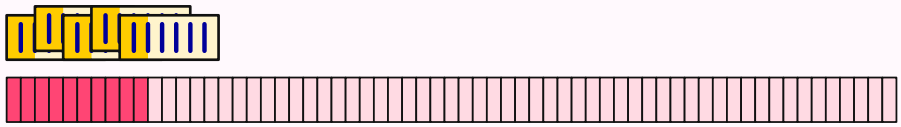
Wir wollen $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9}$ veranschaulichen. Dazu markieren wir 5 von 9 Neunteln.

Jedes dieser Neuntel teilen wir in 7 Einheiten ein. Damit gibt es insgesamt $7 \cdot 9 = 63$ Einheiten, also ist jede Einheit $\frac{1}{63}$.

Wir markieren jeweils 2 der 5 Neuntel. Das sind insgesamt $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Die markeirten Einheiten schieben wir zusammen und lesen das Ergebnis ab.



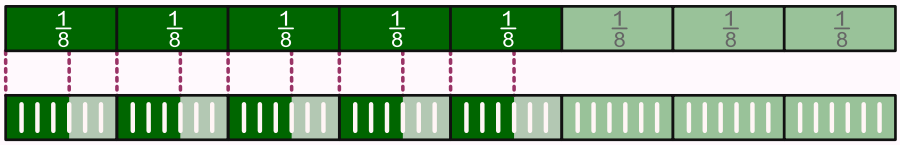
Also ist $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{10}{63}$.

Beispiel 2

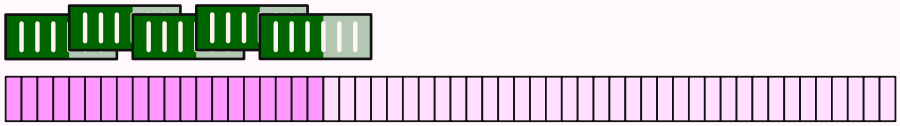
Wir wollen $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}$ veranschaulichen. Dazu markieren wir 5 von 8 Achteln.

Jedes dieser Achtel teilen wir in 7 Einheiten ein. Damit gibt es insgesamt $7 \cdot 8 = 56$ Einheiten, also ist jede Einheit $\frac{1}{56}$.

Wir markieren jeweils 4 der 5 Achtel. Das sind insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten.

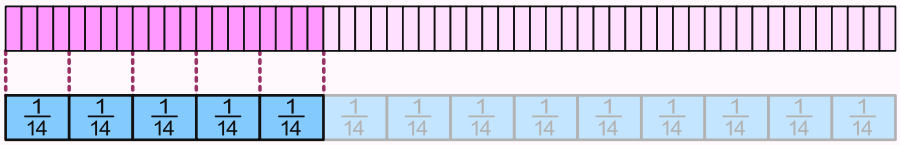


Die markeirten Einheiten schieben wir zusammen und lesen das Ergebnis ab.



Also ist $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{20}{56}$.

Das Ergebnis können wir noch kürzen und wir erhalten: $\frac{20}{56} = \frac{20:4}{56:4} = \frac{5}{14}$



Wir hätten auch am Anfang kürzen können: $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = \frac{5}{14}$

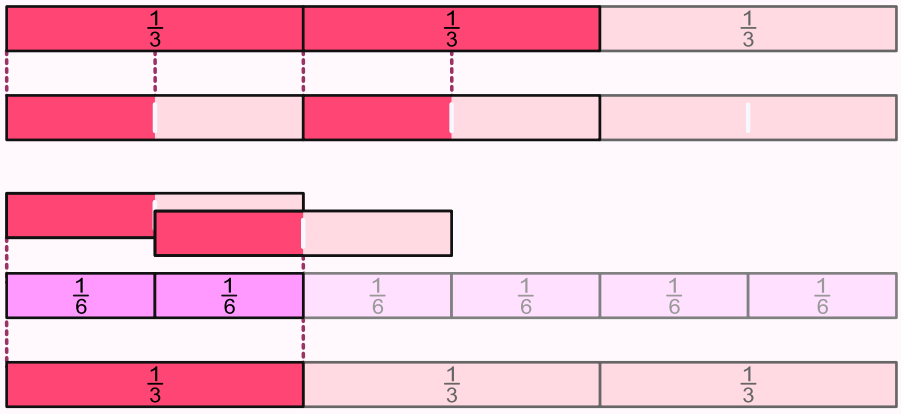
Aber dann hätten wir nicht sehen können, wie die Bruchmultiplikation funktioniert.

Wenn wir die einzelnen Schritt beherrschen, können wir die anschauliche Bruchmultiplikation auch so zusammenfassen.

Beispiel 3

Wir wollen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ veranschaulichen.

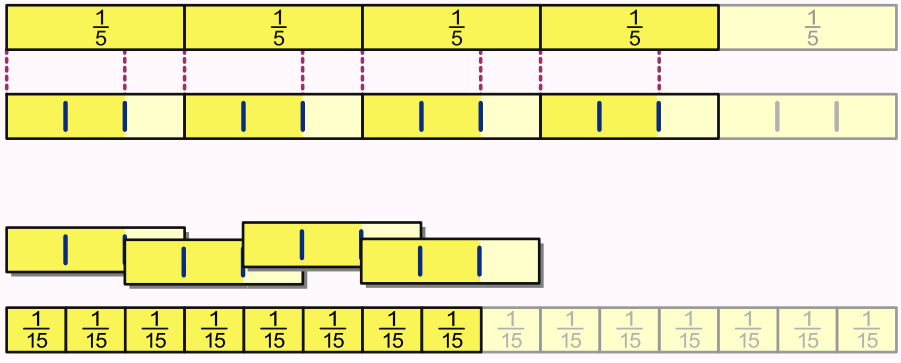
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



Beispiel 4

Wir wollen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ veranschaulichen.

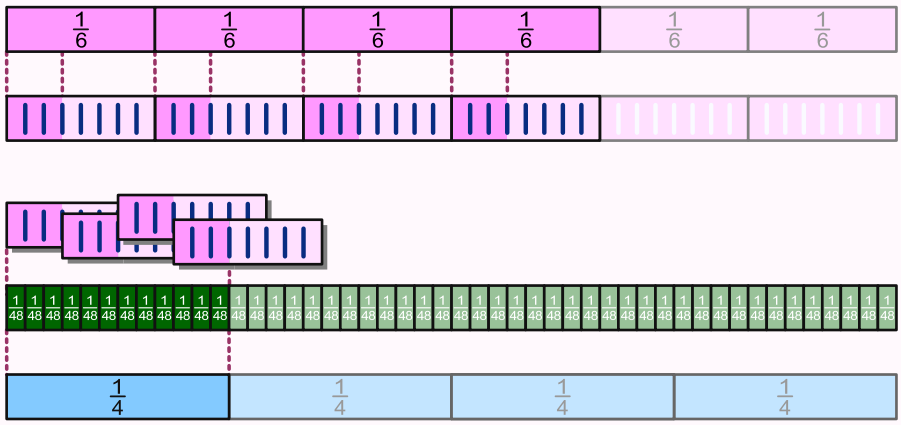
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$



Beispiel 4

Wir wollen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ veranschaulichen.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 6} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

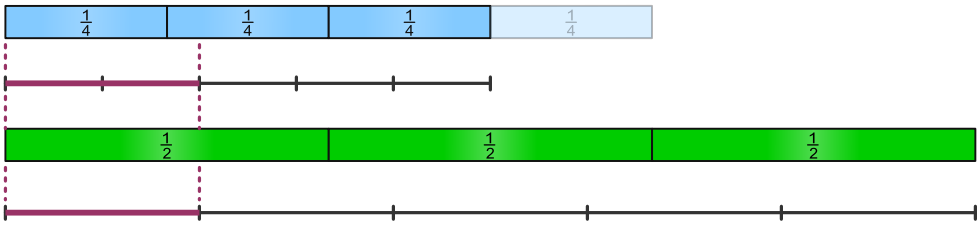


9.6 Über Kreuz kürzen

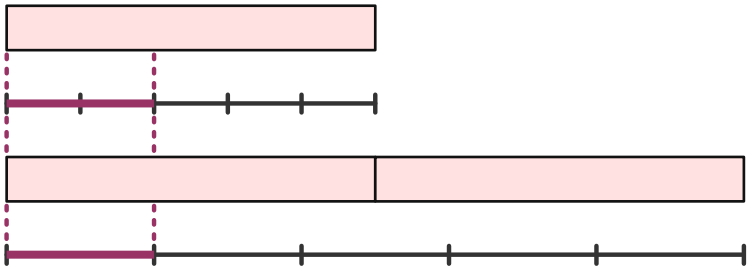
Wenn wir $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ ausrechnen möchten, kürzen wir, bevor wir rechnen. Also:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Aber warum funktioniert das? Warum können wir „über Kreuz“ kürzen?
Schauen wir uns diesen Zusammenhang an den Bruchstreifen an: Wie wir sehen, sind $\frac{3}{2}$ doppelt so groß wie $\frac{3}{4}$.
Statt also *zwei* Fünftel von $\frac{3}{4}$ zu bestimmen, berechnen wir nur *ein* Fünftel von einem Bruch, der doppelt so groß ist wie $\frac{3}{4}$, nämlich von $\frac{3}{2}$.



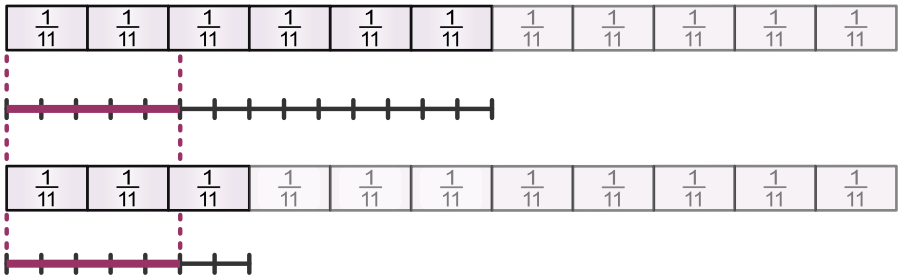
Wir können uns das auch etwas allgemeiner vorstellen: Wir haben irgendeine Länge gegeben und möchten $\frac{2}{5}$ dieser Länge bestimmen. Dann können wir ebenso gut nur $\frac{1}{5}$ der doppelten Länge bestimmen und erhalten das gleiche Ergebnis.



Weitere Beispiele

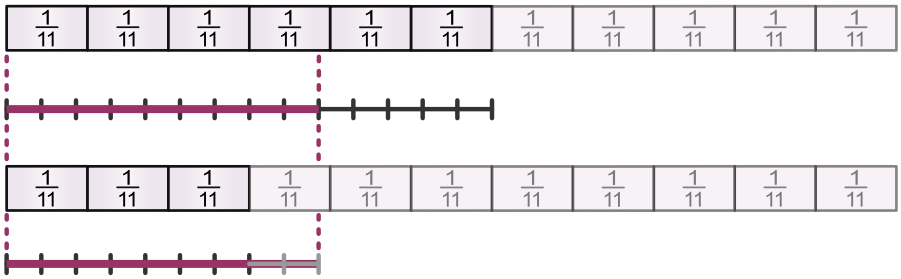
$$\frac{5}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11}$$

Wir haben eine Strecke in **14** Teile geteilt. Und wir haben eine halb so große Strecke in **7** Teile geteilt. Wie wir sehen, sind die Siebtel der halben Strecke so groß wie die Vierzehntel der ganzen Strecke.



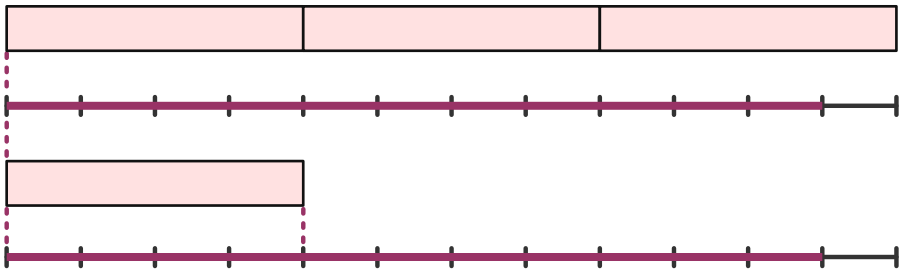
Diese Darstellung funktioniert sogar dann, wenn durch das Kürzen der Zähler des ersten Bruchs größer wird als dessen Nenner.

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{9}{7} \cdot \frac{3}{11}$$



In diesem Beispiel geht es um eine beliebig lange Strecke **a**. Die Zwölftel des dreifachen von **a** sind genauso lang wie die Viertel der einfachen Strecke.

$$\frac{11}{12} \cdot 3a = \frac{11}{4}a$$



9.7 Vertauschung von Zählern und Nennern

Wenn wir zwei Brüche multiplizieren, können wir die Zähler vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern. Das Gleiche gilt für die Nenner. Z. B.:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}$$

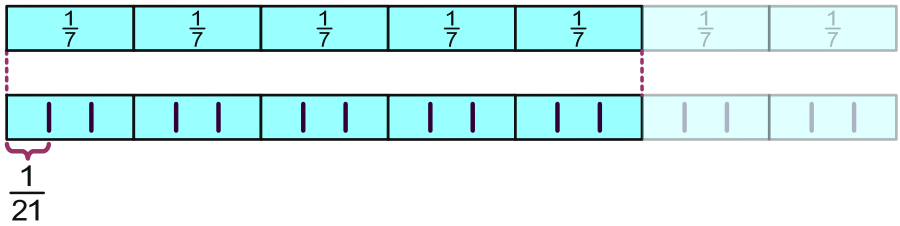
Warum ist das so?

9.7.1 Ausgangsbrüche

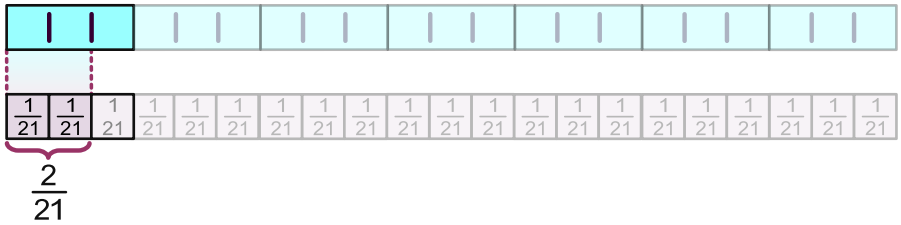
Schauen wir uns an, wie wir $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ multiplizieren:

Zunächst teilen wir alle 7 Siebtel in 3 Einheiten ein. Dadurch entstehen $3 \cdot 7 = 21$ Einheiten.

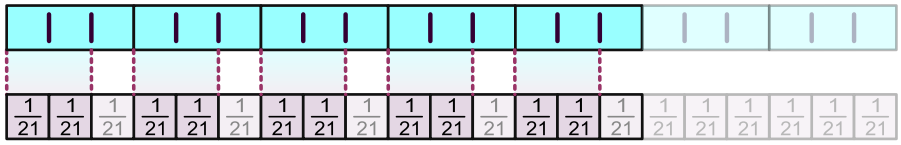
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



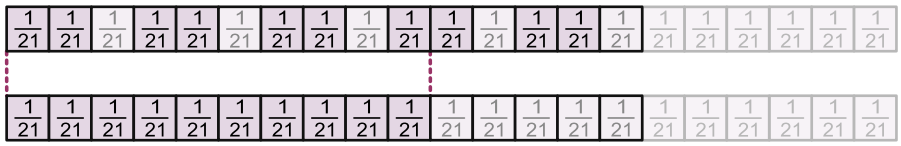
$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{7}$ sind *zwei* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{2}{21}$.



$\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$, sind jeweils *zwei* Einheiten von *fünf* Bruchteilen,
also sind es $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.

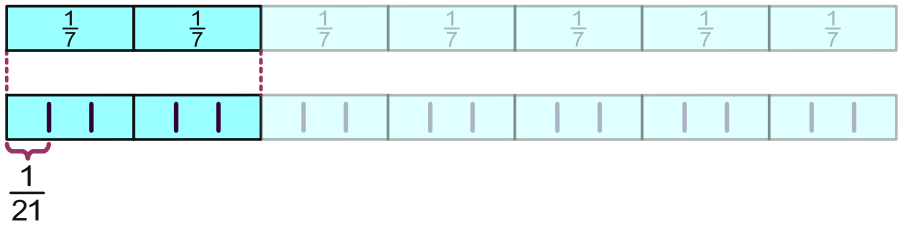


9.7.2 Vertauschte Zähler

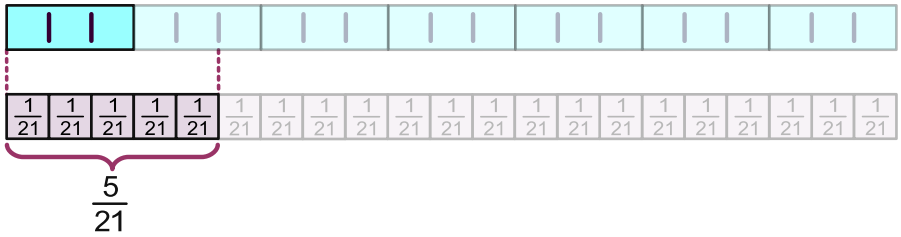
Schauen wir uns nun $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$ an:

Zunächst teilen wir alle 7 Siebtel in 3 Einheiten. Dadurch entstehen $3 \cdot 7 = 21$ Einheiten.

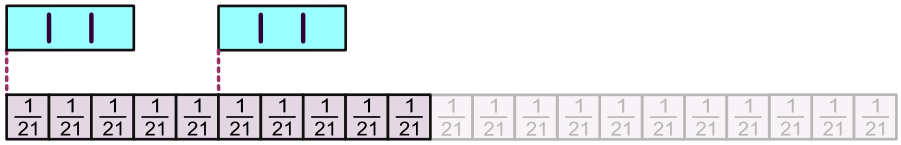
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



$\frac{5}{3}$ von $\frac{1}{7}$ sind *fünf* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{5}{21}$.



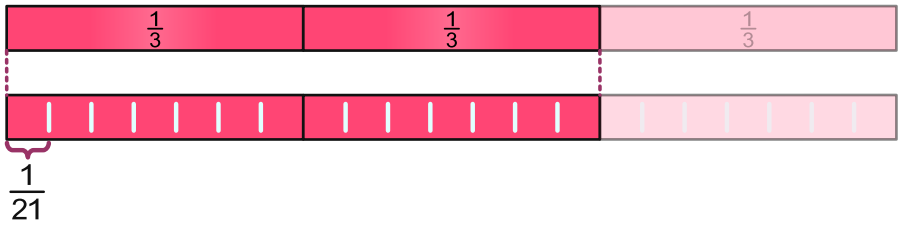
$\frac{5}{3}$ von $\frac{2}{7}$, sind jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen,
also sind es $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten. Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



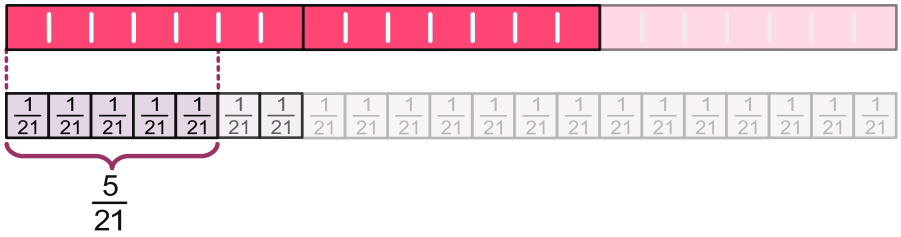
Warum kommt nun das gleiche Ergebnis heraus?
Da die Nenner gleich geblieben sind, sind auch die Einheiten gleich geblieben. Es sind 21-stel.
Die Anzahl der Einheiten im Ergebnis ist gleich geblieben, weil wir im ersten Fall jeweils zwei Einheiten von fünf Teilen bestimmt haben und im zweiten Fall jeweils fünf Einheiten von zwei Teilen bestimmt haben. In beiden Fällen sind es 10 Einheiten.

9.7.3 Vertauschte Nenner

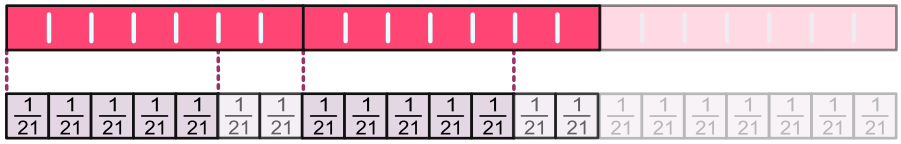
Kommen wir nun zu $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$:
Zunächst teilen wir alle 3 Drittel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 3 = 21$ Einheiten.
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



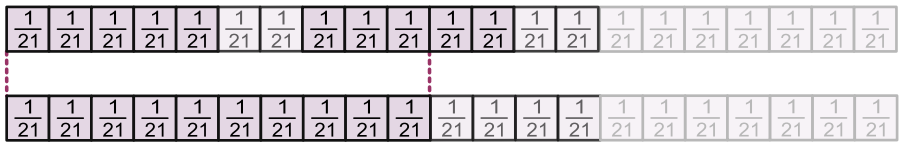
$\frac{5}{7}$ von $\frac{1}{3}$ sind *fünf* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{5}{21}$.



$\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{3}$, sind jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen,
also sind es $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



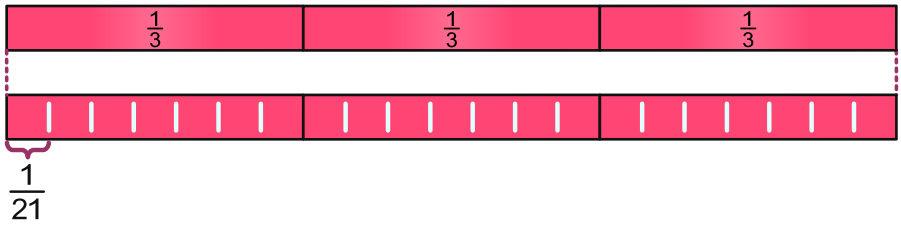
Warum kommt nun bei $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$ das gleiche Ergebnis heraus wie bei $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$?
Da die Zähler gleich geblieben sind, bilden wir wieder jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen. Das sind 10 Einheiten.

In der vorherigen Rechnung haben wir alle 7 Siebtel in jeweils 3 Einheiten geteilt. Das Ergebnis waren 21-stel. In dieser Rechnung haben wir 3 Drittel in jeweils 7 Einheiten geteilt. Das Ergebnis waren wieder 21-stel. Deshalb ist auch der Nenner gleich geblieben.

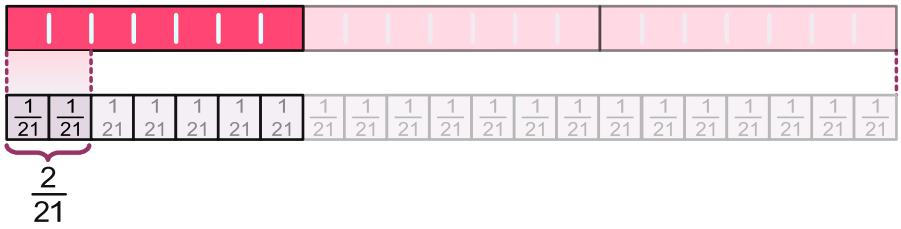
9.7.4 Vertauschte Zähler

Zum guten Schluss haben wir noch $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}$:

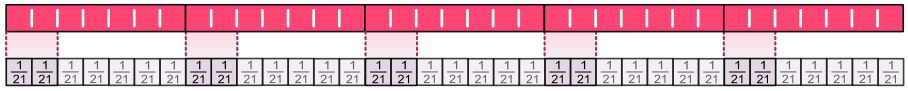
Zunächst teilen wir alle 3 Drittel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 3 = 21$ Einheiten.
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



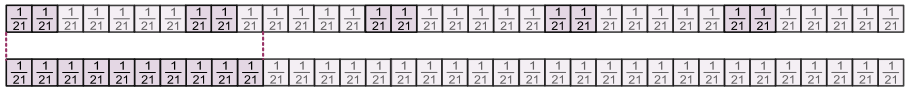
$\frac{2}{7}$ von $\frac{1}{3}$ sind *zwei* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{2}{21}$.



$\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{5}$, sind jeweils *zwei* Einheiten von *fünf* Bruchteilen,
also sind es $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



Warum kommt nun bei $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$ wieder das gleiche wie bei allen anderen Produkten heraus?
Der Zähler bleibt gleich, weil wir entweder *fünf* Einheiten von *zwei* Teilen nehmen oder *zwei* Einheiten von *fünf* Teilen. Die Anzahl bleibt immer gleich.
Der Nenner bleibt gleich, weil wir entweder 3 Drittel in jeweils 7 Einheiten teilen oder 7 Siebtel in jeweils 3 Einheiten. Die Anzahl bleibt immer gleich.

10 Brüche dividieren

In der Mathematik hat sich die folgende Regel durchgesetzt:

> Es wird durch einen Bruch geteilt, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

Verwenden wir Variablen, können wir das sehr kurz aufschreiben:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Dabei stehen a, b, c und d (in diesem Text) für natürliche Zahlen, wobei b und d größer als 0 sein sollen.

10.1 Beispiele

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

Anders als beim Dividieren natürlicher Zahlen kann das Ergebnis größer sein als die Zahl, die geteilt wird.

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Der Bruch, der geteilt wird, heißt **Divident**. Der Bruch, durch den geteilt wird, heißt **Divisor**.

$\frac{4}{1} : \frac{6}{1} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Wenden wir die Division von Brüchen auf natürliche Zahlen an, erhalten wir die Ergebnisse, die wir vom Rechnen mit natürlichen Zahlen gewohnt sind, denn $\frac{4}{1}$ ist gleich 4, $\frac{6}{1}$ ist gleich 6, und das Ergebnis von $4 : 6$ ist gleich $\frac{2}{3}$.

10.2 Erklärung der Division durch Brüche

Was wir Menschen unter der Division von Brüchen verstehen möchten, müssen wir selbst entscheiden. Es gibt nichts in der Natur, was uns dazu zwingt, der Division durch Brüchen eine bestimmte Bedeutung zu geben. Im Folgenden schauen wir uns an, warum die obige Definition sinnvoll sein kann.

Eine Methode, sich zu überlegen, was die Division durch Brüchen bedeuten könnte, ist, die Eigenschaften der Division natürlicher Zahlen in den Bereich der Brüche fortzuschreiben. Diese Methode wird im Weiteren verfolgt.

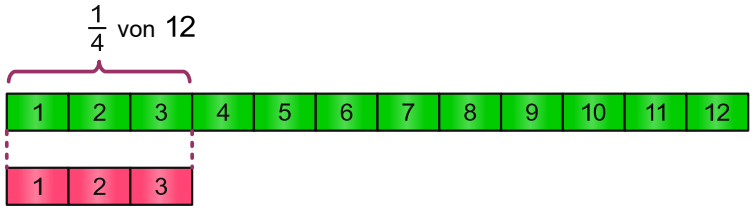
Wenn wir 12 durch 3 teilen, erhalten wir 4, weil 3 viermal auf die 12 passt.
Wenn wir 3 durch 12 teilen, fragen wir nicht, wie oft 12 auf 3 passt, sondern wir fragen:

- Welcher Teil von 12 passt auf 3.

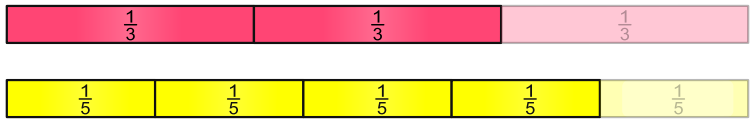
oder auch:

- Wie viel von 12 passt auf 3?

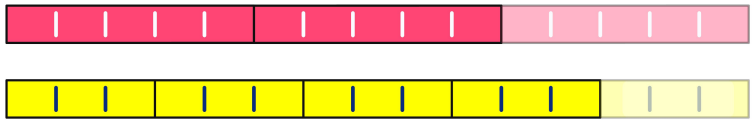
Die Antwort ist $\frac{1}{4}$, weil $\frac{1}{4}$ von 12 gleich 3 ist.



Wenn wir durch Brüche teilen, stellen wir die gleiche Frage. Z. B. können wir die Aufgabe $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ so formulieren: Welcher Teil von $\frac{4}{5}$ passt auf $\frac{2}{3}$?
Damit wir uns die Rechnung vorstellen, legen wir uns die Bruchstreifen zurecht.



Um die Frage, wie viel von $\frac{4}{5}$ auf $\frac{2}{3}$ passt, beantworten zu können, teilen wir die Brüche in kleinere Einheiten ein. Alle Drittel teilen wir in 5 und alle Fünftel teilen wir in 3 Einheiten ein. Alle kleinen Einheiten sind nun gleich groß.

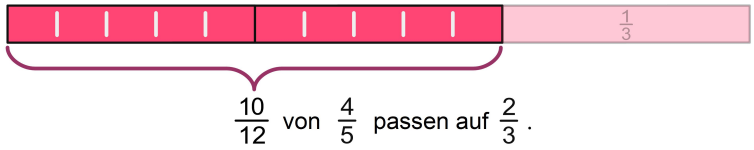


Auf den 4 Fünfteln befinden sich nun $3 \cdot 4 = 12$ Einheiten.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{12}$ von $\frac{4}{5}$.
Um auf den Nenner 12 des Ergebnisbruchs zu kommen, haben wir den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors multipliziert. Das ist der eine Teil der Kehrwertregel.

Auf den 2 Dritteln befinden sich $2 \cdot 5 = 10$ dieser Einheiten.

Also passen $\mathbf{\frac{10}{12}}$ von $\mathbf{\frac{4}{5}}$ auf $\mathbf{\frac{2}{3}}$.

Um auf den Zähler 10 des Ergebnisbruchs zu kommen, haben wir den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors multipliziert. Das ist der andere Teil der Kehrwertregel.



Die Rechnung schreiben wir so auf:

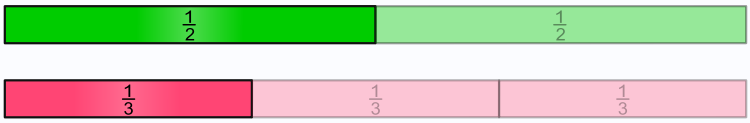
$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{10 : 2}{12 : 2} = \frac{5}{6}$$

Also haben wir als Ergebnis: $\frac{5}{6}$ von $\frac{4}{5}$ passen auf $\frac{2}{3}$.

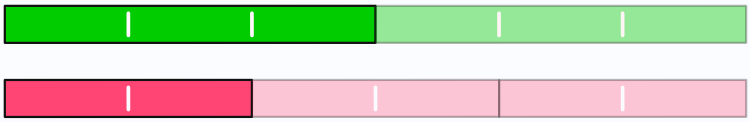
10.3 Weitere Beispiele

Beispiel 1

Was ist $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$? Also: Wie viel von $\frac{1}{3}$ passt auf $\frac{1}{2}$?

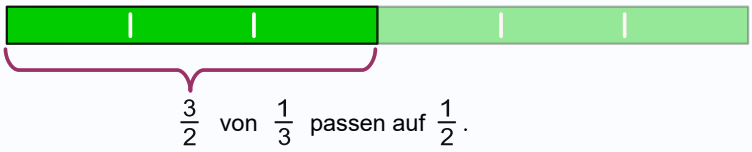


Wir teilen ein Halb in 3 Einheiten und ein Drittel in 2 Einheiten ein.



Wir haben ein Drittel in $2 \cdot 1 = 2$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$.

Wir haben ein Halb in $1 \cdot 3 = 3$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{3}{2}$ von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$.

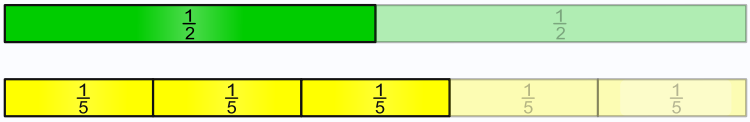


Die Rechnung:

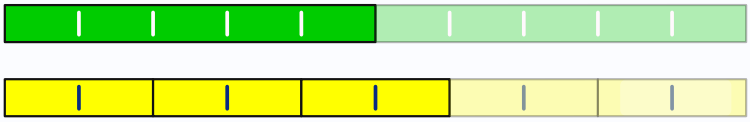
$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Beispiel 2

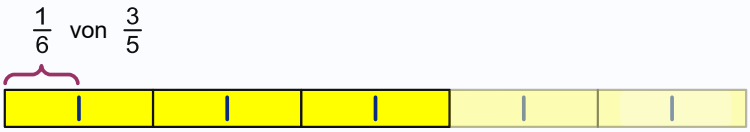
Was ist $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{3}{5}$ passt auf $\frac{1}{2}$?



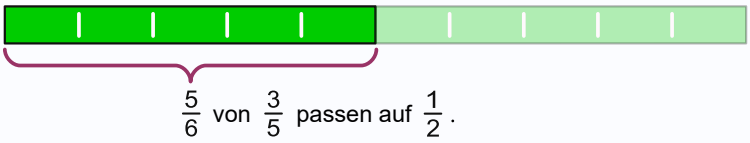
Wir teilen ein Halb in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 2 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $2 \cdot 3 = 6$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{6}$ von $\frac{3}{5}$.



Wir haben ein Halb in $1 \cdot 5 = 5$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{5}$ auf $\frac{1}{2}$.

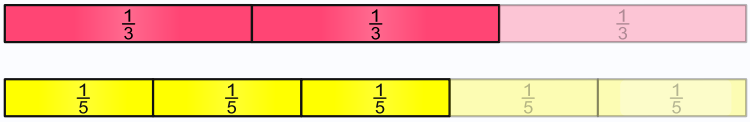


Die Rechnung:

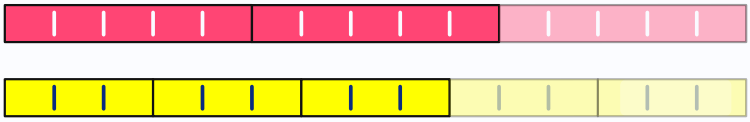
$$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Beispiel 3

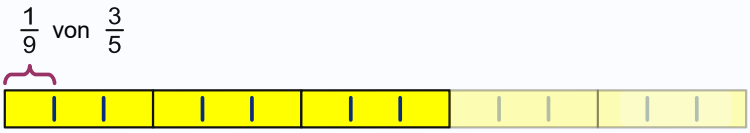
Was ist $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{3}{5}$ passt auf $\frac{2}{3}$?



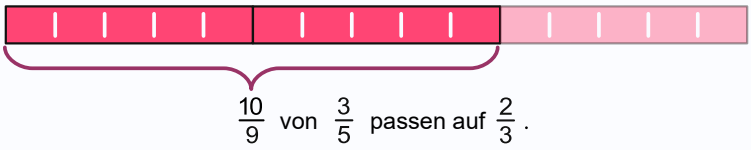
Wir teilen jedes Drittel in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 3 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{9}$ von $\frac{3}{5}$.



Wir haben die Drittel in $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{10}{9}$ von $\frac{3}{5}$ auf $\frac{2}{3}$.

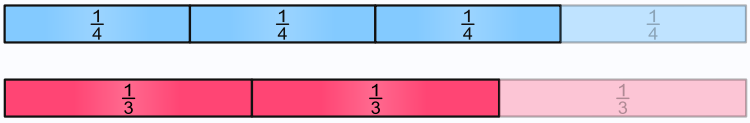


Die Rechnung:

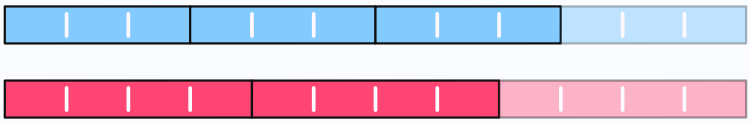
$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

Beispiel 4

Was ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{2}{3}$ passt auf $\frac{3}{4}$?

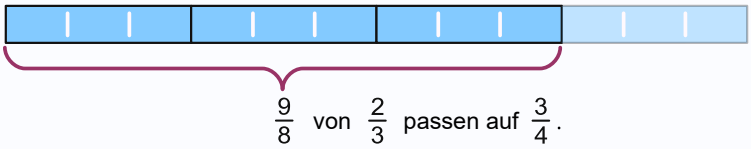


Wir teilen jedes Viertel in 3 Einheiten und jedes Drittel in 4 Einheiten ein.



Wir haben die Drittel in $4 \cdot 2 = 8$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{8}$ von $\frac{2}{3}$.

Wir haben die Viertel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{9}{8}$ von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{3}{4}$.

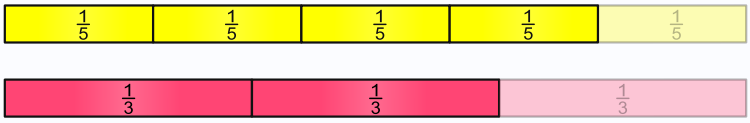


Die Rechnung:

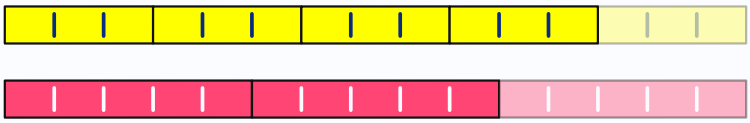
$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

Beispiel 5

Was ist $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{2}{3}$ passt auf $\frac{4}{5}$?

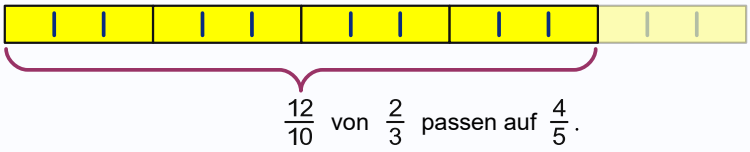


Wir teilen jedes Fünftel in 3 Einheiten und jedes Drittel in 5 Einheiten ein.



Wir haben die Drittel in $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{10}$ von $\frac{2}{3}$.

Wir haben die Fünftel in $4 \cdot 3 = 12$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{12}{10}$ von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{4}{5}$.

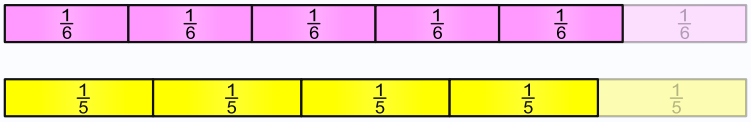


Die Rechnung:

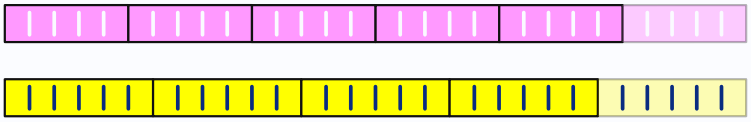
$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{12 : 2}{10 : 2} = \frac{6}{5}$$

Beispiel 6

Was ist $\frac{5}{6} : \frac{4}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{4}{5}$ passt auf $\frac{5}{6}$?

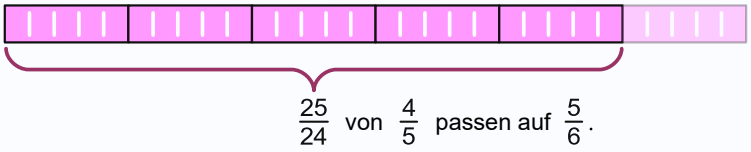


Wir teilen jedes Sechstel in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 6 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $6 \cdot 4 = 24$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{24}$ von $\frac{4}{5}$.

Wir haben die Sechstel in $5 \cdot 5 = 25$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{25}{24}$ von $\frac{4}{5}$ auf $\frac{5}{6}$.

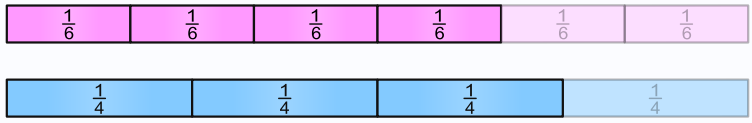


Die Rechnung:

$$\frac{5}{6} : \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{25}{24}$$

Beispiel 7

Wir wollen $\frac{4}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ teilen.

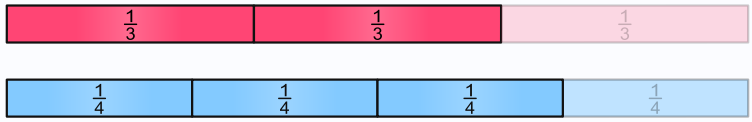


Dazu kürzen wie zunächst die Brüche, falls das möglich ist. Also:

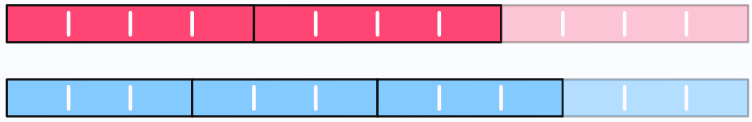
$$\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

Die neue Aufgabe lautet nun:

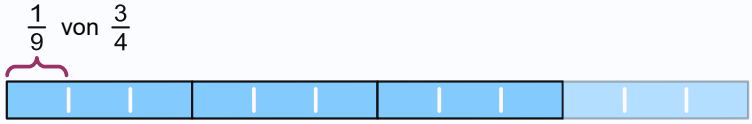
Was ist $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$? Also: Wie viel von $\frac{3}{4}$ passt auf $\frac{2}{3}$?



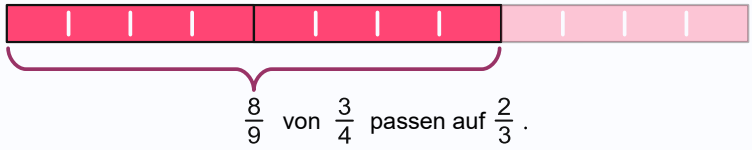
Wir teilen jedes Drittel in 4 Einheiten und jedes Viertel in 3 Einheiten ein.



Wir haben die Viertel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{9}$ von $\frac{3}{4}$.



Wir haben die Drittel in $2 \cdot 4 = 8$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{8}{9}$ von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{2}{3}$.

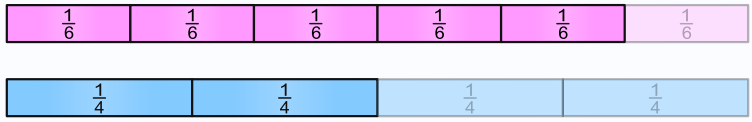


Die Rechnung:

$$\frac{4}{6} : \frac{3}{4} = \frac{4:2}{6:2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

Beispiel 8

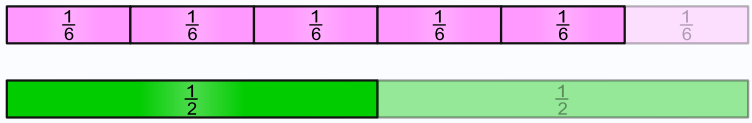
Wir wollen $\frac{5}{6}$ durch $\frac{2}{4}$ teilen.



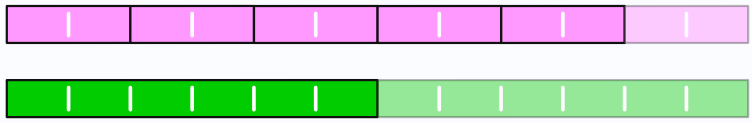
Dazu kürzen wie zunächst die Brüche, falls das möglich ist. Also:

$$\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

Die neue Aufgabe lautet nun:
Was ist $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{1}{2}$ passt auf $\frac{5}{6}$?

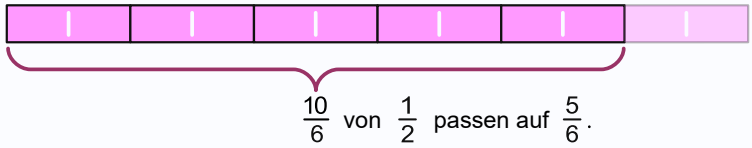


Wir teilen jedes Sechstel in 2 Einheiten und wir teilen ein Halb in 6 Einheiten ein.



Wir haben ein Halb in $6 \cdot 1 = 6$ Einheiten eingeteilt.
Also ist jede Einheit $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{2}$.

Wir haben die Sechstel in $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten eingeteilt.
Also passen $\frac{10}{6}$ von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{5}{6}$.



Die Rechnung:

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 1} = \frac{10}{6} = \frac{10:2}{6:2} = \frac{5}{3}$$