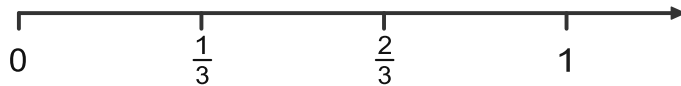


# Brüche

## Wie Brüche aussehen und was sie können

Wenn wir ein Ganzes in mehrere gleich große Teile teilen, entstehen Zahlen, die wir Brüche nennen. Unser Grundmodell ist die Strecke von 0 bis 1 auf dem Zahlenstrahl, die wir z.B. in drei gleich große Teile teilen können.

Dadurch entstehen die Brüche  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$ .

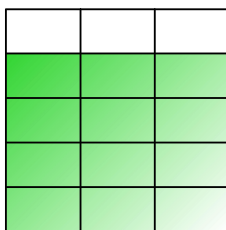


Brüche können wir in vielen weiteren Zusammenhängen wahrnehmen. Hier sind ein paar Beispiele:

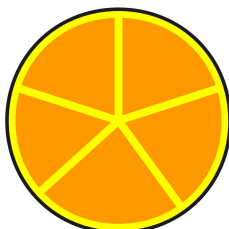
### 1. Brüche als Teile eines Ganzen



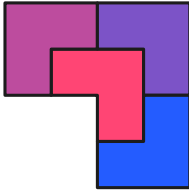
Wenn wir eine kreisrunde Pizza in 8 gleich große Sektoren teilen, ist jedes dieser Teile  $\frac{1}{8}$  der ganzen Pizza. Das funktioniert auch mit anderen kreisrunden Objekten und geometrischen Figuren wie z.B. Kreisflächen.



Wenn wir ein Rechteck in 15 gleich große Rechtecke einteilen, ist jedes kleine Rechteck  $\frac{1}{15}$  des großen Rechtecks. Hier sind  $\frac{12}{15}$  grün gefärbt.



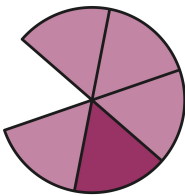
Wir bezeichnen Teile eines Ganzen nur dann mit Brüchen, wenn alle Teile gleich groß sind. Die links gezeigten orangefarbenen Flächen wollen wir nicht als Beispiele für Brüche betrachten.



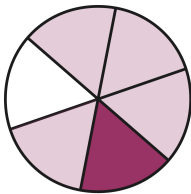
Die Einteilung in gleich große Teile darf auch ruhig „komisch“ aussehen. Solange alle Teile gleich groß sind, wollen wir sie als Beispiele für Brüche verstehen. Jede der Farbflächen ist  $\frac{1}{4}$  der Gesamtfläche.



Manchmal ist die Lage nicht eindeutig. Wie können wir die linke Figur interpretieren?



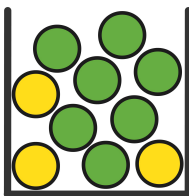
Ist ein Ganzes die bordeauxrote Farbfläche, von der  $\frac{1}{5}$  dunkel gefärbt ist?



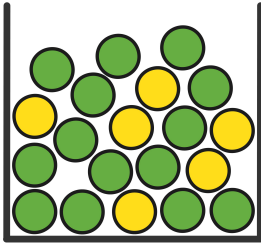
Oder ist ein Ganzes die gesamte Kreisfläche, von der  $\frac{1}{6}$  fehlt?

## 2. Brüche als Anteile

Mit einem Anteil geben wir an, wie groß ein Teil eines Ganzen im Vergleich zum Ganzen ist.

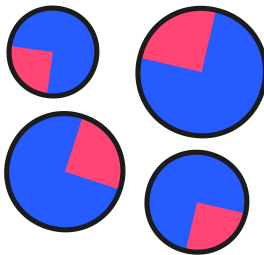
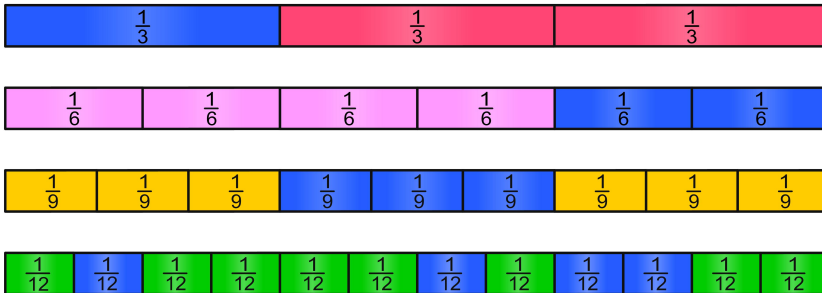


Der Anteil der grünen Kugeln an allen Kugeln ist gleich  $\frac{7}{10}$ , weil 7 der 10 Kugeln grün sind. Der Anteil der gelben Kugeln an allen Kugeln ist gleich  $\frac{3}{10}$ , weil 3 der 10 Kugeln gelb sind.

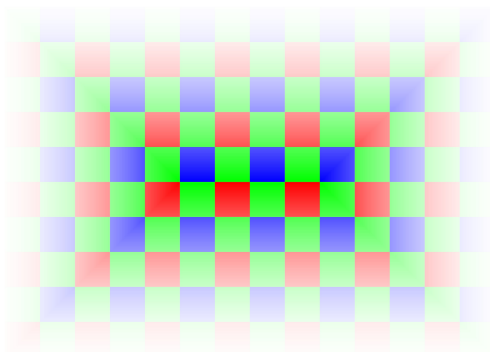


Nun sind zwar mehr Kugeln im Behälter, die Anteile der grünen und gelben Kugeln an allen Kugeln ist aber gleich geblieben. Der Anteil der grünen Kugeln an allen Kugeln ist gleich  $\frac{7}{10}$ , weil 14 der 20 Kugeln grün sind. Der Anteil der gelben Kugeln an allen Kugeln ist gleich  $\frac{3}{10}$ , weil 6 der 20 Kugeln gelb sind.

Der Anteil der blau gefärbten Fläche jedes Bruchstreifens an der Gesamtfläche des Bruchstreifens ist bei jedem Streifen gleich. Der Anteil der blau gefärbten Fläche des obersten Bruchstreifens ist ein Drittel, weil eines der drei Drittel blau ist. Der Anteil der blau gefärbten Fläche des zweiten Bruchstreifens ist ein Drittel, weil zwei der sechs Sechstel blau gefärbt sind usw.



Die links abgebildeten Kreisflächen sind unterschiedlich groß. Der Anteil der roten Fläche an der Gesamtfläche jedes Kreises ist aber gleich. Er ist jeweils gleich  $\frac{1}{4}$ .



Auch wenn wir nicht wissen, wie groß eine Fläche ist, können wir mitunter an der Struktur der Fläche erkennen, welche Anteile rot, gelb oder blau gefärbt sind. Der Flächenanteil von „rot“ und „blau“ ist jeweils  $\frac{1}{4}$  und der Flächenanteil von „grün“ ist  $\frac{1}{2}$ . (Die Abbildung gibt das Bayer-Pattern wieder. Es entspricht der Anordnung von Farbdioden in Bildsensoren digitaler Kameras.)

Besonders dann, wenn wir Anteile nicht sehen können, kann es nützlich sein, diese Anteile mit Hilfe von Brüchen anzugeben.

Lebensmittel können nicht nur nach Geschmack und Aussehen beurteilt werden, sondern es kann auch angegeben werden, was im Lebensmittel enthalten ist. Es ist üblich, die Nährwerte Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate zu unterscheiden.



Der Eiweiß-Anteil einer Pizza „Salamini“ beträgt ca.  $\frac{11}{100}$  (gesprochen: „zirka elf Hunderstel“). Der Fettanteil ist ca.  $\frac{10}{100}$  und der Anteil an Kohlenhydraten liegt bei ca.  $\frac{31}{100}$  (gesprochen: „bei zirka einunddreißig Hundertsteln“).

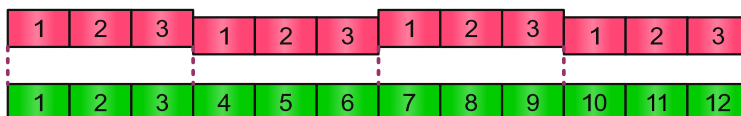


Nährwertangaben von Tiramisu:

Eiweiß	ca. $\frac{8}{100}$
Fett	ca. $\frac{13}{100}$
Kohlenhydrate	ca. $\frac{39}{100}$

### 3. Brüche als Ergebnisse von Divisionen

Wenn wir 12 durch 3 teilen, erhalten wir 4. Dieses Ergebnis können wir als Antwort auf die Frage verstehen: Wie oft passt 3 auf die 12? Und die Antwort ist 4, weil 3 viermal auf die 12 passt.

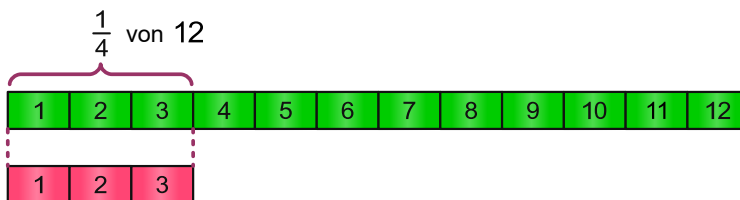


Mit unseren neuen Zahlen können wir diesen Zusammenhang auch anders ausdrücken: Weil 3 viermal auf 12 passt, ist 3 ein Viertel von 12.

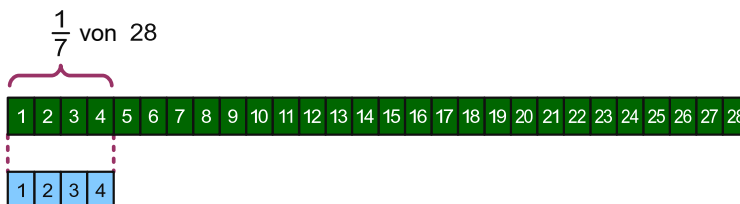
Mit den Brüchen können wir nun nicht nur 12 durch 3 teilen, sondern wir können auch 3 durch 12 teilen. Weil 12 größer als 3 ist, können wir nicht mehr fragen, wie oft 12 auf 3



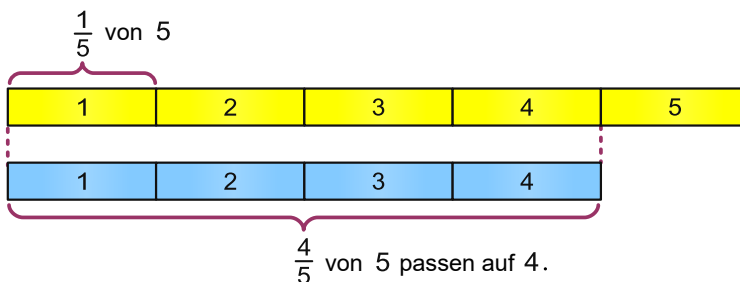
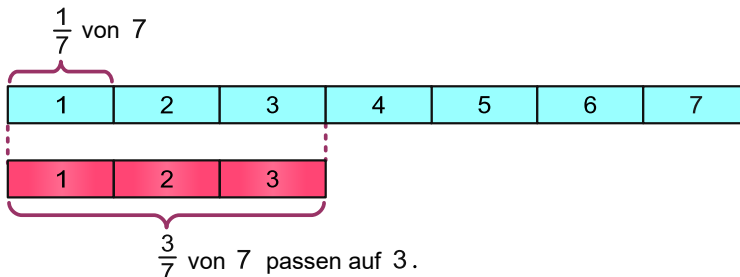
passt. Aber wir können fragen, welcher Teil von 12 auf 3 passt. Antwort:  $\frac{1}{4}$ .

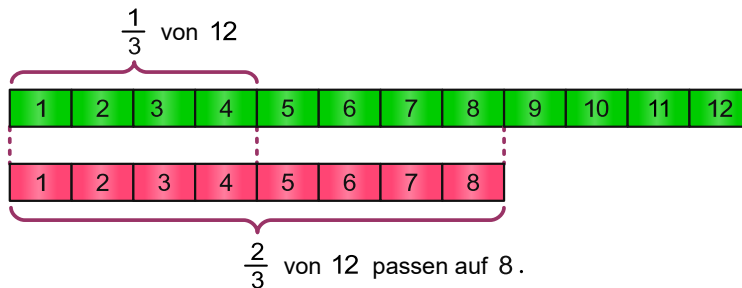


Das funktioniert auch mit anderen Zahlen. Wie wir wissen, ist  $7 \cdot 4 = 28$ . Also ist 28 das 7-fache von 4. Und deshalb passt ein Siebtel von 28 auf 4.



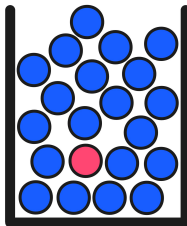
Bisher haben wir, wenn wir eine „kleine“ Zahl durch eine „große“ Zahl geteilt haben, nur durch solche kleinen Zahlen geteilt, die Teiler der großen Zahl waren. Wir können aber auch beliebige natürliche Zahlen teilen. Schauen wir uns das an Beispielen an.





#### 4. Was Brüche sonst noch können

##### Brüche bezeichnen Größenverhältnisse

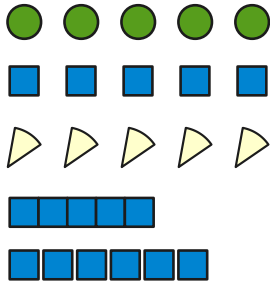


Das Verhältnis der roten Kugel zu den blauen Kugeln in der Box ist wie 1 zu 20. Der Bruch  $\frac{1}{20}$  beschreibt dieser Verhältnis. Zieht man zufällig eine Kugel aus dieser Box, sagt man deshalb, die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, sei 1 zu 20. Das ist zwar richtig, aber  $\frac{1}{20}$  ist nicht die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen. In der Mathematik berechnen wir diese Wahrscheinlichkeit, indem wir die Anzahl der roten Kugeln - also 1 - durch die Anzahl aller Kugeln - also 21 teilen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, gleich  $\frac{1}{21}$ .



Um Beton herzustellen, vermischt man Zement mit Sand. Meistens wird das Mischungsverhältnis mit 1 : 4 (gesprochen: „eins zu vier“) angegeben. Der Bruch  $\frac{1}{4}$  beschreibt dieses Verhältnis. Möchte man also Beton in einem Betonmischer herstellen, kann man eine Schippe Zement und danach 4 Schippen Sand in den Mischer einfüllen. Reicht das noch nicht, kann man noch einen Durchgang mit einer Schippe Zement und 4 Schippen Sand drauflegen usw. Der Anteil des Zements an der gesamten Mischung ist dann aber nicht  $\frac{1}{4}$ , sondern  $\frac{1}{5}$ , weil pro Durchgang 5 Schippen eingefüllt werden, von denen eine Schippe Zement dabei ist.

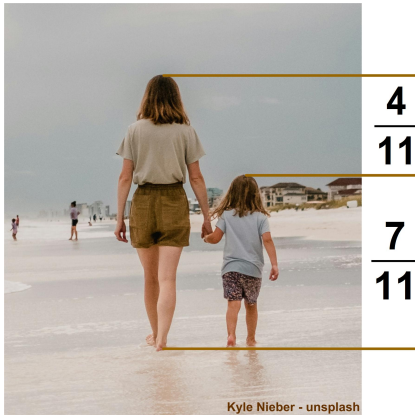
### Mit Brüchen zählen



Mit natürlichen Zahlen können wir viele Dinge zählen. Und auch mit Brüchen können wir Dinge zählen, wenn diese Dinge Teile eines Ganzen sind. In der oberen Reihe sehen wir 5 grüne Kreise. In der mittleren Reihe sind 5 blaue Quadrate und in der unteren Reihe befinden sich 5 Achtel. Das können wir auch so aufschreiben:  $\frac{5}{8}$ .

Wir können die blauen Quadrate aber auch zu einem zu einem blauen Balken zusammenschieben. Dann sehen wir in der untersten Reihe  $\frac{6}{5}$  des blauen Balkens.

### Mit Brüchen Größen vergleichen



Mit Brüchen können wir Größen vergleichen.

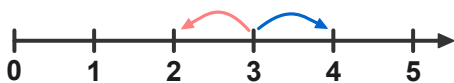
Die Körpergröße des Kindes beträgt  $\frac{7}{11}$  der Körpergröße der Frau. Der Größenunterschied ist gleich  $\frac{4}{11}$  der Körpergröße der Frau.



Kann man hier auch Brüche sehen?

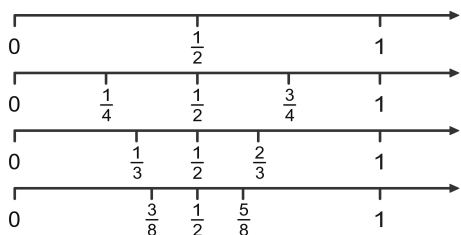
## Brüche - weitere Aspekte

### Brüche ohne Nachfolger und Vorgänger



Jede natürliche Zahl hat auf dem Zahlenstrahl einen Nachfolger. Der Nachfolger von z. B. 3 ist 4.

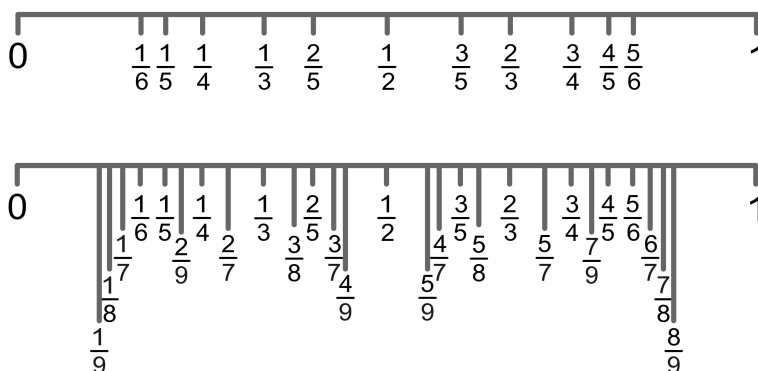
Jede natürliche Zahl, die größer als 0 ist, hat auf dem Zahlenstrahl auch einen Vorgänger. Der Vorgänger von z. B. 3 ist 2.



Brüche haben keinen direkten Nachfolger und keinen direkten Vorgänger. Es ist z. B.  $1$  nicht der direkte Nachfolger von  $\frac{1}{2}$ , weil  $\frac{3}{4}$  zwischen beiden Zahlen liegt. Ebenso ist  $\frac{1}{2}$  nicht der direkte Vorgänger von  $\frac{1}{3}$ , weil  $\frac{2}{3}$  zwischen diesen Zahlen liegt usw.

## Brüche liegen dicht

Wir können zwischen den den Zahlen 0 und 1 beliebig viele Brüche unterbringen. Das gilt auch für jeden anderen Abschnitt der Zahlengeraden. Deshalb sagt man, die Brüche liegen dicht auf der Zahlengeraden.



## Unendlich viele Brüche an einer Stelle

Gibt es an Stellen des Zahlenstrahls tatsächlich unendlich viele Brüche oder sind es nur endlos viele?

