

1 Brüche addieren

1.1 Gleichnamige Brüche addieren

Wir wissen, wie wir natürliche Zahlen addieren. Wir rechnen z. B.: $3 + 2 = 5$.
Mit Zahl-Streifen können wir uns das so vorstellen:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Brüche wollen wir in ähnlicher Weise addieren. So soll z. B. gelten: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
Das sieht mit den Bruchstreifen so aus:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \hline \end{array}$$

Wie wir sehen, können wir gleichnamigen Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren und die Nenner beibehalten. Deshalb legen wir fest:

Gleichnamige Brüche werden addiert,
indem die Zähler addiert werden.
Die Nenner bleiben gleich.

Diesen Zusammenhang können wir auch als Formel aufschreiben:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Immer, wenn wir die Variablen durch Zahlen ersetzen, entsteht eine richtige Gleichung.
Z. B.:

Ersetzen wir **a** durch **2**, **b** durch **5** und **c** durch **3**, erhalten wir die richtige Gleichung:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

Wir können auch **a** durch **7**, **b** durch **1** und **c** durch **9** ersetzen. Dann erhalten wir wieder eine richtige Gleichung:

$$\frac{7}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7+1}{9} = \frac{8}{9}$$

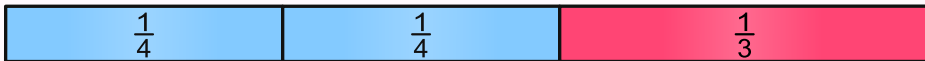
1.2 Ungleichnamige Brüche addieren

Problem: Wenn wir ungleichnamige Brüche addieren wollen, müssen wir anders vorgehen, denn die Nenner können nicht gleich bleiben, da sie unterschiedlich sind. Z. B.:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = ?$$

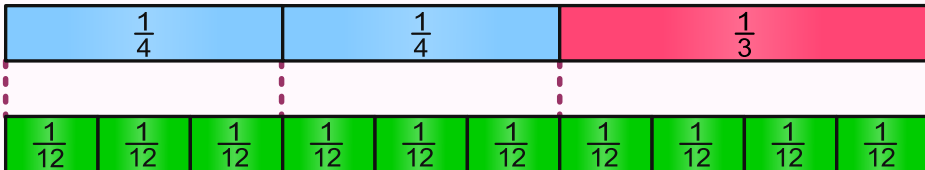
Lösung: Wir erweitern die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und addieren die erweiterten Brüche. Hier ist die Begründung:

Das Ergebnis von z. B. $\frac{2}{4} + \frac{1}{3}$ soll die Gesamtlänge der beiden Bruchstreifen sein.



Zu der gleichen Gesamtlänge kommen wir aber auch, wenn wir $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{3}$ durch andere Brüche gleicher Größe ersetzen.

Z. B. können wir $\frac{2}{4}$ durch $\frac{6}{12}$ und $\frac{1}{3}$ durch $\frac{4}{12}$ ersetzen.



Weil $\frac{6}{12}$ und $\frac{4}{12}$ gleiche Nenner haben, können wir die beiden Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren und die Nenner beibehalten.

Also: $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}$.

Beim Addieren von Brüchen sind noch drei Punkte zu beachten:

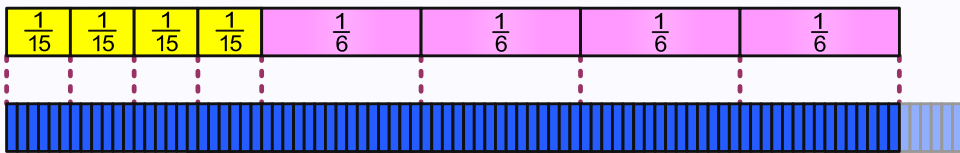
1. Hauptnenner

Wollen wir zwei ungleichnamige Brüche addieren, könnten wir einen gemeinsamen Nenner finden, indem wir die Nenner der beiden Brüche multiplizieren. Das kann aber zu unnötig großen Zahlen führen. Deshalb werden wir Brüche normalerweise nur auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner - also den Hauptnenner - erweitern.

Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:

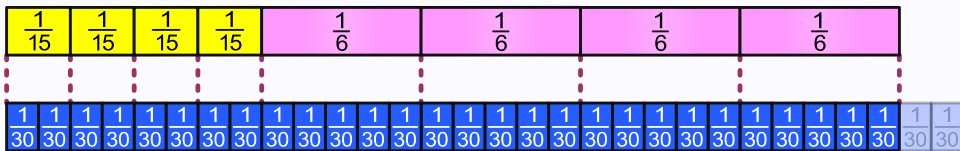
Möchten wir die Brüche $\frac{4}{15}$ und $\frac{4}{6}$ addieren, könnten wir jeden Bruch mit dem Nenner des jeweils anderen Bruchs erweitern. Dann müssten wir mit 90-steln weiterrechnen.

$$\frac{4}{15} + \frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 6}{15 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 15}{6 \cdot 15} = \frac{24}{90} + \frac{60}{90} = \frac{84}{90}$$



Weil das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 15 und 6 aber 30 ist, reicht es, auf 30-stel zu erweitern.

$$\frac{4}{15} + \frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{8}{30} + \frac{20}{30} = \frac{28}{30}$$



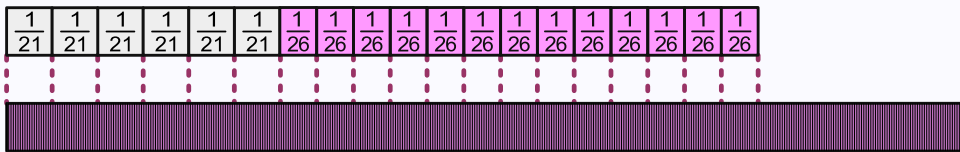
2. Am Anfang: kürzen

Um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen, werden wir zwei Brüche, die wir addieren möchten, erst so weit wie möglich kürzen, bevor wir sie addieren.

Schauen wir uns den Vorteil an einem Beispiel an:

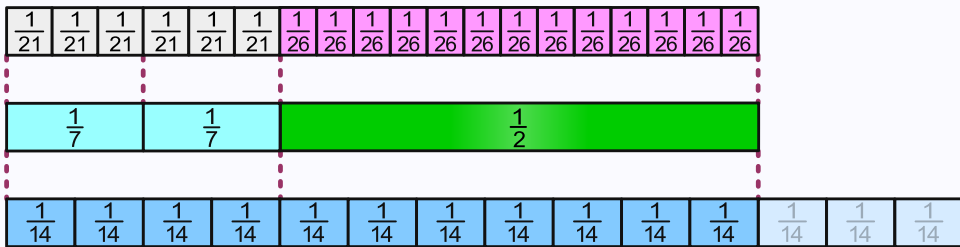
Möchten wir die Brüche $\frac{6}{21}$ und $\frac{13}{26}$ addieren, könnten wir beide Brüche auf das kgV von 21 und 26 erweitern. Dann müssten wir mit 546-steln weiterrechnen.

$$\frac{6}{21} + \frac{13}{26} = \frac{6 \cdot 26}{21 \cdot 26} + \frac{13 \cdot 21}{26 \cdot 21} = \frac{156}{546} + \frac{273}{546} = \frac{429}{546}$$



Wenn wir aber zunächst kürzen, erhalten wir einen viel kleineren Hauptnenner.

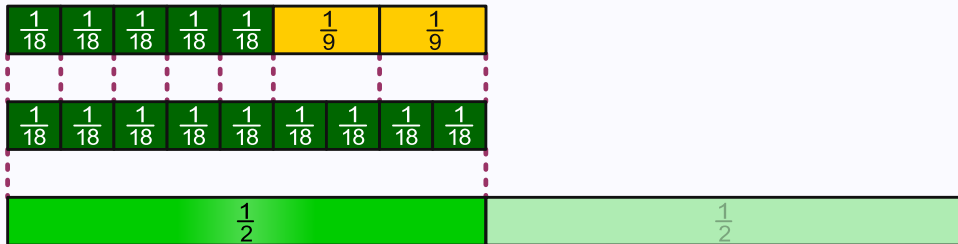
$$\frac{6}{21} + \frac{13}{26} = \frac{6 : 3}{21 : 3} + \frac{13 : 13}{26 : 13} = \frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{4}{14} + \frac{7}{14} = \frac{11}{14}$$



3. Am Ende: kürzen

Haben wir Brüche addiert, schreiben wir das Ergebnis in der einfachsten Form auf. Das bedeutet: Wenn wir den Ergebnisbruch kürzen können, dann machen wir das. Z. B.:

$$\frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{5}{18} + \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{9}{18} = \frac{9 : 9}{18 : 9} = \frac{1}{2}$$

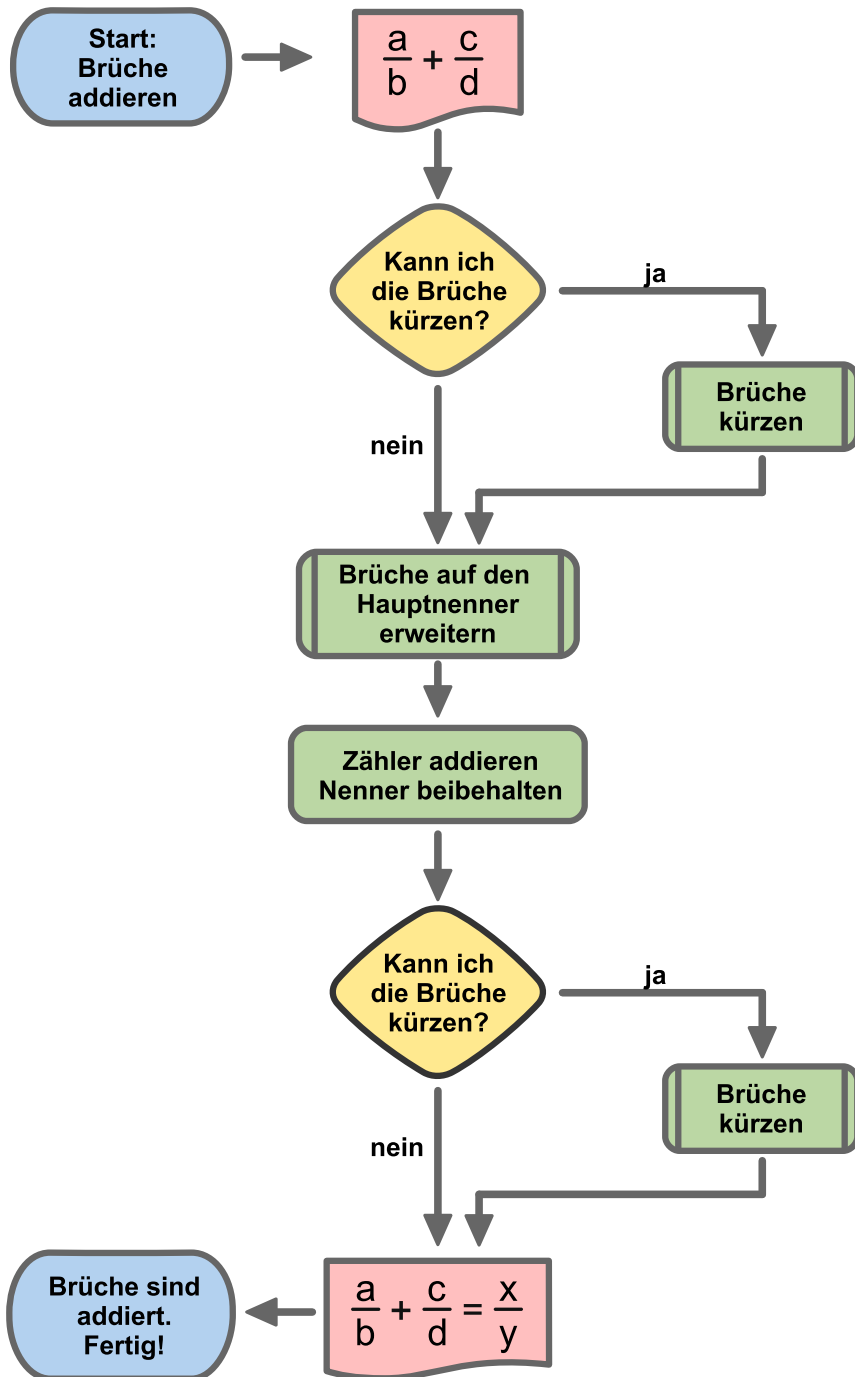


Ist der Ergebnisbruch gleich einer natürlichen Zahl, dann schreiben wir die Zahl als Ergebnis hin und nicht den Bruch. Z. B.:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = \frac{8 : 4}{4 : 4} = \frac{2}{1} = 2$$

1.3 Flussdiagramm

Das Verfahren der Addition von Brüchen mit allen Schritten ist in dem folgenden Flussdiagramm dargestellt.



1.4 Beispiele

Schauen wir uns dazu Beispiele an.

Beispiel 1

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{1}{8}$ und $\frac{3}{9}$ addieren.

2. Kürzen?

$\frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$ Ab jetzt addieren wir $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{3}$.

3. Hauptnenner

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24} ; \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$$

4. Addieren

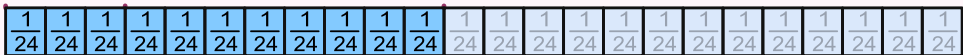
$$\frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}$$

5. Kürzen?

$\frac{11}{24}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{9} = \frac{1}{8} + \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}$$



Beispiel 2

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{7}{9}$ und $\frac{1}{2}$ addieren.

2. Kürzen?

$\frac{7}{9}$ und $\frac{1}{2}$ können wir nicht kürzen.

3. Hauptnenner

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18} ; \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18}$$

4. Addieren

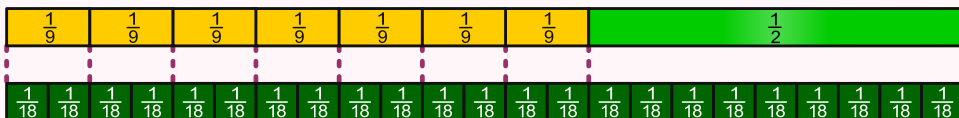
$$\frac{14}{18} + \frac{9}{18} = \frac{23}{18}$$

5. Kürzen?

$\frac{23}{18}$ können wir nicht kürzen.

6. Ergebnis

$$\frac{7}{9} + \frac{1}{2} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{14}{18} + \frac{9}{18} = \frac{23}{18}$$



Beispiel 3

1. Ziel?

Wir möchten die beiden Brüche $\frac{3}{18}$ und $\frac{6}{20}$ addieren.

2. Kürzen?

$$\frac{3}{18} = \frac{3:3}{18:3} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{6}{20} = \frac{6:2}{20:2} = \frac{3}{10}$$

3. Hauptnenner

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30} ; \quad \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{9}{30}$$

4. Addieren

$$\frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30}$$

5. Kürzen?

$$\frac{14}{30} = \frac{14:2}{30:2} = \frac{7}{15}$$

6. Ergebnis

$$\frac{3}{18} + \frac{6}{20} = \frac{3:3}{18:3} + \frac{6:2}{20:2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{14:2}{30:2} = \frac{7}{15}$$

