

Brüche dividieren

In der Mathematik hat sich die folgende Regel durchgesetzt:

Es wird durch einen Bruch geteilt, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

Verwenden wir Variablen, können wir das sehr kurz aufschreiben:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Dabei stehen a , b , c und d (in diesem Text) für natürlichen Zahlen, wobei b und d größer als 0 sein sollen.

Beispiele

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Anders als beim Dividieren natürlicher Zahlen kann das Ergebnis größer sein als die Zahl, die geteilt wird.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Der Bruch, der geteilt wird, heißt **Divident**. Der Bruch, durch den geteilt wird, heißt **Divisor**.

$$\frac{4}{1} : \frac{6}{1} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wenden wir die Division von Brüchen auf natürliche Zahlen an, erhalten wir die Ergebnisse, die wir vom Rechnen mit natürlichen Zahlen gewohnt sind, denn $\frac{4}{1}$ ist gleich 4, $\frac{6}{1}$ ist gleich 6, und das Ergebnis von $4 : 6$ ist gleich $\frac{2}{3}$.

Erklärung der Division durch Brüche

Was wir Menschen darunter verstehen möchten, müssen wir selbst entscheiden. Es gibt nichts in der Natur, was uns dazu zwingt, der Division durch Brüchen eine bestimmte Bedeutung zu geben. Im Folgenden schauen wir uns an, warum die obige Definition sinnvoll sein kann.

Eine Methode, sich zu überlegen, was die Division durch Brüchen bedeuten könnte, ist, die Eigenschaften der Division natürlicher Zahlen in den Bereich der Brüche fortzuschreiben. Diese Methode wird im Weiteren verfolgt.

Wenn wir 12 durch 3 teilen, erhalten wir 4, weil 3 viermal auf die 12 passt.

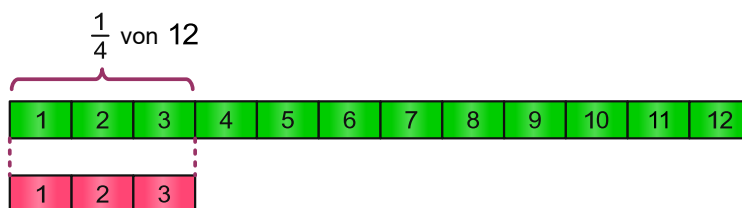
Wenn wir 3 durch 12 teilen, fragen wir nicht, wie oft 12 auf 3 passt, sondern wir fragen:

- Welcher Teil von 12 passt auf 3.

oder auch:

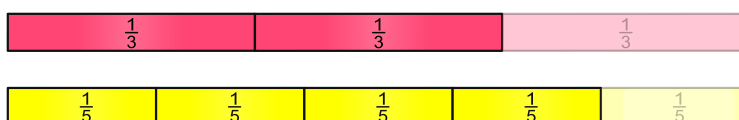
- Wie viel von 12 passt auf 3?

Die Antwort ist $\frac{1}{4}$, weil $\frac{1}{4}$ von 12 gleich 3 ist.

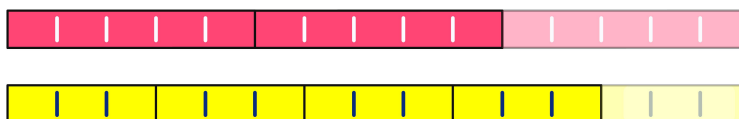


Wenn wir durch Brüche teilen, stellen wir die gleiche Frage. Z.B. können wir die Aufgabe $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ so formulieren: Welcher Teil von $\frac{4}{5}$ passt auf $\frac{2}{3}$?

Um uns die Rechnung vorstellen zu können, legen wir uns die Bruchstreifen zurecht.



Um die Frage, wie viel von $\frac{4}{5}$ auf $\frac{2}{3}$ passt, beantworten zu können, teilen wir die Brüche in kleinere Einheiten ein. Alle Drittel teilen wir in 5 und alle Fünftel teilen wir in 3 Einheiten ein. Alle kleinen Einheiten sind nun gleich groß.



Auf den 4 Fünfteln befinden sich nun $3 \cdot 4 = 12$ Einheiten.

Also ist jede Einheit $\frac{1}{12}$ von $\frac{4}{5}$.

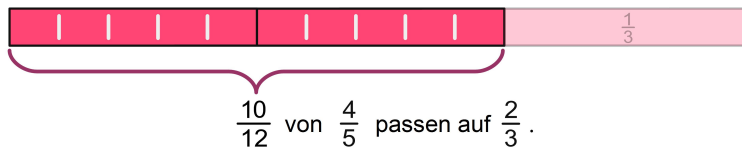
Um auf den Nenner 12 des Ergebnisbruchs zu kommen, haben wir den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors multipliziert. Das ist der eine Teil der Kehrwertregel.



Auf den 2 Dritteln befinden sich $2 \cdot 5 = 10$ dieser Einheiten.

Also passen $\frac{10}{12}$ von $\frac{4}{5}$ auf $\frac{2}{3}$.

Um auf den Zähler 10 des Ergebnisbruchs zu kommen, haben wir den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors multipliziert. Das ist der andere Teil der Kehrwertregel.



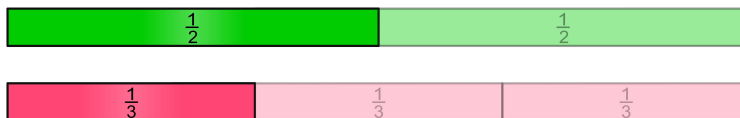
Die Rechnung schreiben wir so auf:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{10 : 2}{12 : 2} = \frac{5}{6}$$

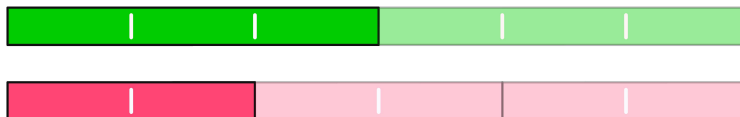
Also haben wir als Ergebnis: $\frac{5}{6}$ von $\frac{4}{5}$ passen auf $\frac{2}{3}$.

Weitere Beispiele

Was ist $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$? Also: Wie viel von $\frac{1}{3}$ passt auf $\frac{1}{2}$?



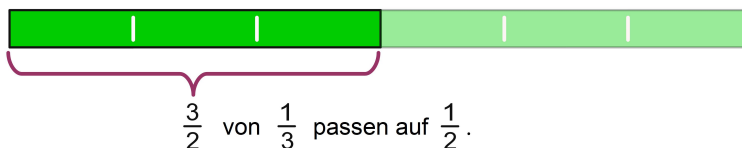
Wir teilen ein Halb in 3 Einheiten und ein Drittel in 2 Einheiten ein.



Wir haben ein Drittel in $2 \cdot 1 = 2$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$.



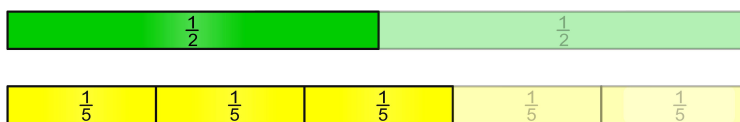
Wir haben ein Halb in $1 \cdot 3 = 3$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{3}{2}$ von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$.



Die Rechnung:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

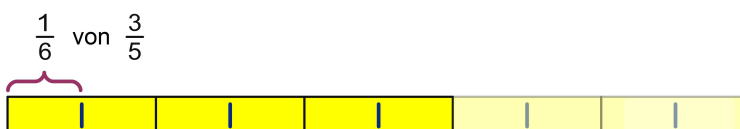
Was ist $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{3}{5}$ passt auf $\frac{1}{2}$



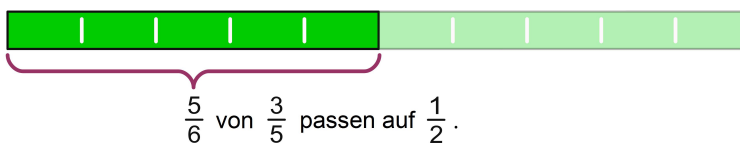
Wir teilen ein Halb in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 2 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $2 \cdot 3 = 6$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{6}$ von $\frac{3}{5}$.



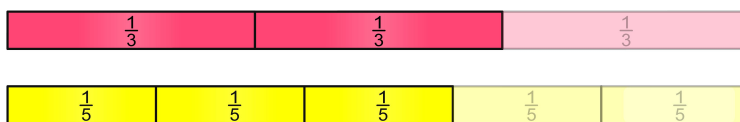
Wir haben ein Halb in $1 \cdot 5 = 5$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{5}$ auf $\frac{1}{2}$.



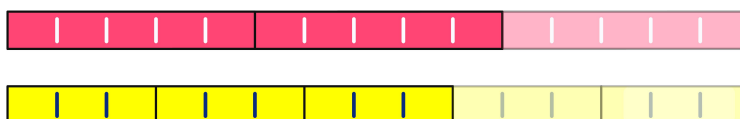
Die Rechnung:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

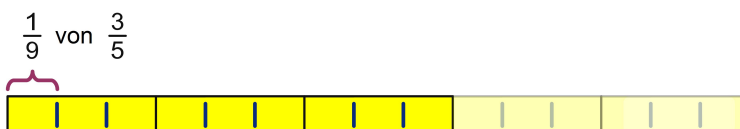
Was ist $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{3}{5}$ passt auf $\frac{2}{3}$



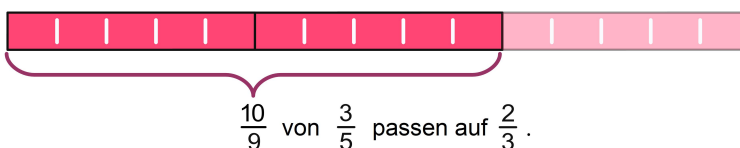
Wir teilen jedes Drittel in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 3 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{9}$ von $\frac{3}{5}$.



Wir haben die Drittel in $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{10}{9}$ von $\frac{3}{5}$ auf $\frac{2}{3}$.



Die Rechnung:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

Was ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{2}{3}$ passt auf $\frac{3}{4}$



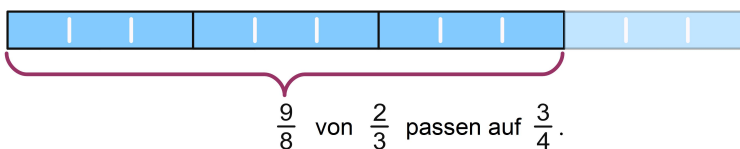
Wir teilen jedes Viertel in 3 Einheiten und jedes Drittel in 4 Einheiten ein.



Wir haben die Drittel in $4 \cdot 2 = 8$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{8}$ von $\frac{2}{3}$.



Wir haben die Viertel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{9}{8}$ von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{3}{4}$.



Die Rechnung:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

Was ist $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{2}{3}$ passt auf $\frac{4}{5}$



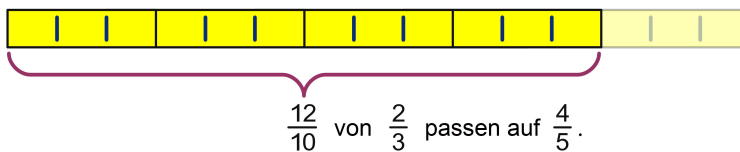
Wir teilen jedes Fünftel in 3 Einheiten und jedes Drittel in 5 Einheiten ein.



Wir haben die Drittel in $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{10}$ von $\frac{2}{3}$.



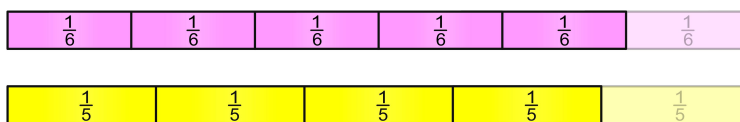
Wir haben die Fünftel in $4 \cdot 3 = 12$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{12}{10}$ von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{4}{5}$.



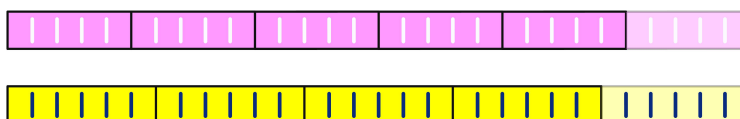
Die Rechnung:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{12 : 2}{10 : 2} = \frac{6}{5}$$

Was ist $\frac{5}{6} : \frac{4}{5}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{4}{5}$ passt auf $\frac{5}{6}$



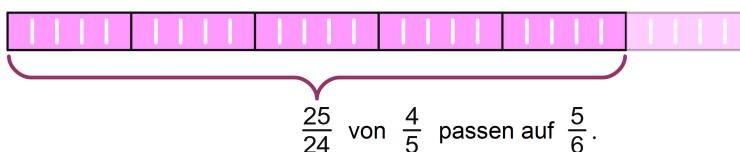
Wir teilen jedes Sechstel in 5 Einheiten und jedes Fünftel in 6 Einheiten ein.



Wir haben die Fünftel in $6 \cdot 4 = 24$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{24}$ von $\frac{4}{5}$.



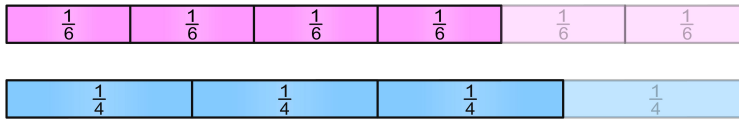
Wir haben die Sechstel in $5 \cdot 5 = 25$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{25}{24}$ von $\frac{4}{5}$ auf $\frac{5}{6}$.



Die Rechnung:

$$\frac{5}{6} : \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{25}{24}$$

Wir wollen $\frac{4}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ teilen.

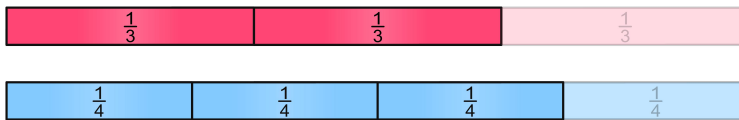


Dazu kürzen wir zunächst die Brüche, falls das möglich ist. Also:

$$\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

Die neue Aufgabe lautet nun:

Was ist $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$? Also: Wie viel von $\frac{3}{4}$ passt auf $\frac{2}{3}$



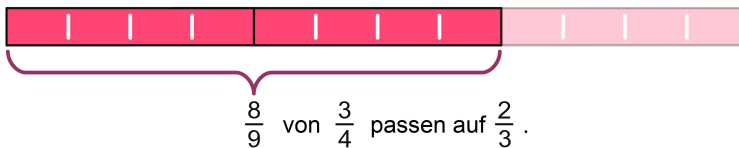
Wir teilen jedes Drittel in 4 Einheiten und jedes Viertel in 3 Einheiten ein.



Wir haben die Viertel in $3 \cdot 3 = 9$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{9}$ von $\frac{3}{4}$.



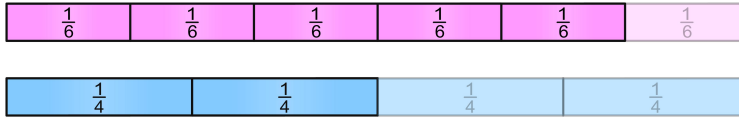
Wir haben die Drittel in $2 \cdot 4 = 8$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{8}{9}$ von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{2}{3}$.



Die Rechnung:

$$\frac{4}{6} : \frac{3}{4} = \frac{4:2}{6:2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

Wir wollen $\frac{5}{6}$ durch $\frac{2}{4}$ teilen.

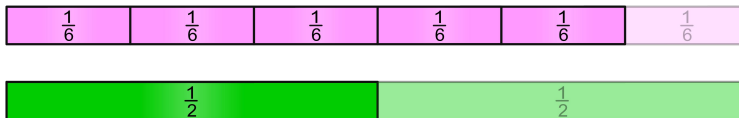


Dazu kürzen wir zunächst die Brüche, falls das möglich ist. Also:

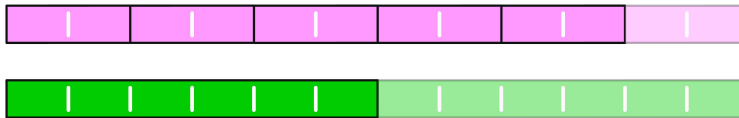
$$\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

Die neue Aufgabe lautet nun:

Was ist $\frac{5}{6} : \frac{1}{2}$? Anders gesagt: Wie viel von $\frac{1}{2}$ passt auf $\frac{5}{6}$



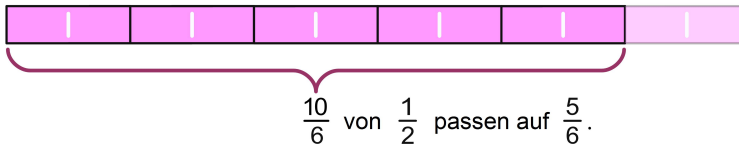
Wir teilen jedes Sechstel in 2 Einheiten und wir teilen ein Halb in 6 Einheiten ein.



Wir haben ein Halb in $6 \cdot 1 = 6$ Einheiten eingeteilt. Also ist jede Einheit $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{2}$.



Wir haben die Sechstel in $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten eingeteilt. Also passen $\frac{10}{6}$ von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{5}{6}$.



Die Rechnung:

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 1} = \frac{10}{6} = \frac{10:2}{6:2} = \frac{5}{3}$$