

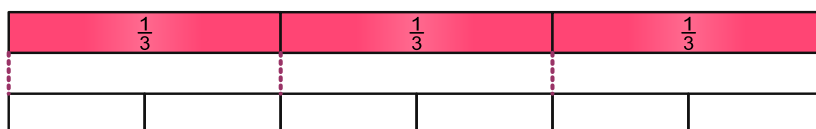
Brüche erweitern

Wir können uns das Rechnen mit Brüchen oft erleichtern, indem wir nicht mit den gegebenen Brüchen rechnen, sondern mit anderen Brüchen, die aber genauso groß sind. Deshalb gibt es mehrere Verfahren, mit denen wir zu einem gegebenen Bruch einen anderen Bruch gleicher Größe finden können. Eines dieser Verfahren heißt:

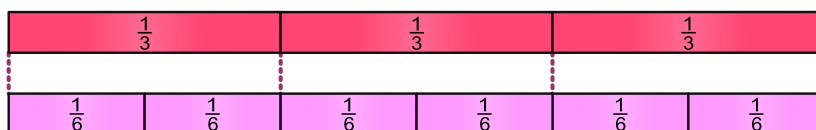
Erweitern von Brüchen. Rechnerisch erweitern wir einen Bruch, indem wir den Zähler und den Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl multiplizieren. Anschaulich erweitern wir einen Bruch, indem wir die Teile des Bruchs in weitere Teile unterteilen. Schauen wir uns dazu Beispiele an.

Beispiel 1

Wenn wir jedes Drittel in zwei gleich große Teile teilen, sind auf diesem Bruchstreifen $3 \cdot 2 = 6$ gleich große Teile.



Das sind Sechstel.



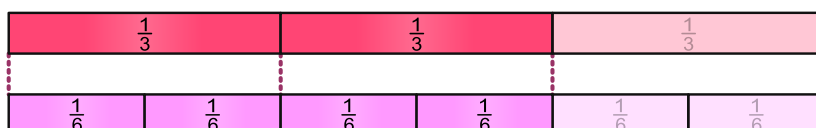
Weil wir jedes Drittel in 2 gleich große Teile geteilt haben, ist jedes dieser Teile nur halb so groß wie $\frac{1}{3}$.

Für einen Bruch mit dem Nenner 6, der so groß sein soll wie ein Bruch mit dem Nenner 3, brauchen wir deshalb 2-mal so viele Teile.

Wenn wir also den Zähler und den Nenner von $\frac{2}{3}$ mit 2 multiplizieren, erhalten wir einen Bruch gleicher Größe, nämlich $\frac{4}{6}$.

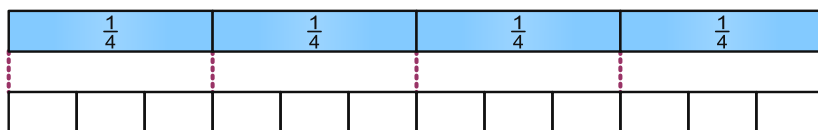
Es gilt:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6},$$

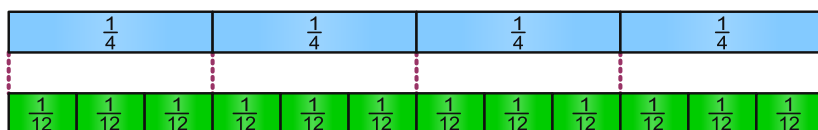


Beispiel 2

Wenn wir jedes Viertel in 3 gleich große Teile teilen, sind auf diesem Bruchstreifen $4 \cdot 3 = 12$ gleich große Teile.



Das sind Zwölftel.



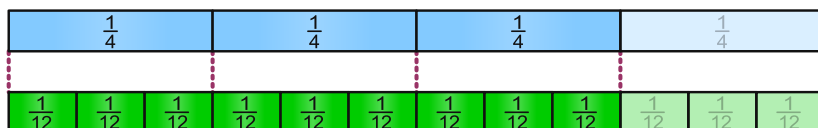
Weil wir jedes Viertel in 3 gleich große Teile geteilt haben, hat jedes dieser Teile ein Drittel der Größe von $\frac{1}{4}$.

Für einen Bruch mit dem Nenner 12, der genauso groß sein soll wie ein Bruch mit dem Nenner 4, brauchen wir deshalb 3-mal so viele Teile.

Wenn wir also den Zähler und den Nenner von $\frac{3}{4}$ mit 3 multiplizieren, erhalten wir einen Bruch gleicher Größe, nämlich $\frac{9}{12}$.

Es gilt:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}.$$



Was wir hier gesehen haben, gilt auch für alle anderen Brüche. Der folgende Satz gilt für alle natürlichen Zahlen, die größer als 0 sind.

Wird der Zähler und der Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl multipliziert, entsteht ein Bruch gleicher Größe.

Wir können das auch übersichtlich mit Variablen aufschreiben: Möchte man in der Mathematik etwas über irgendeinen Bruch aussagen, notiert man diesen Bruch mit Variablen - also mit Buchstaben, für die wir Zahlen einsetzen können. Ein beliebiger Bruch wird dann z. B. mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Soll mit einer beliebigen natürlichen Zahl multipliziert werden, bezeichnen wir diese Zahl ebenfalls mit einer Variable, z. B. mit **n**.

Den oben formulierten Satz können wir nun so aufschreiben:

Für einen beliebigen Bruch $\frac{a}{b}$ und eine beliebige natürliche Zahl **n** (außer 0) gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

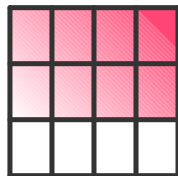
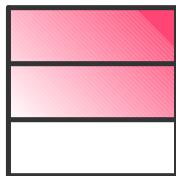
Den Vorgang, den Zähler und den Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl zu multiplizieren, nennen wir „den Bruch **erweitern**“.

Anschauliches Erweitern von Brüchen

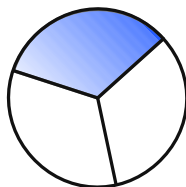
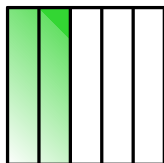
Es gibt viele Möglichkeiten, sich das Erweitern von Brüchen vorzustellen.



Dass ein Bruch seinen Wert nicht ändert, wenn wir seine Teile unterteilen, können wir uns anhand von Pizza vorstellen: Eine Pizza bleibt immer gleich groß, unabhängig davon, ob wir sie in 2, 4, 6, 8, ... Teile einteilen. Statt also eine halbe Pizza zu essen, können wir auch $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ... der Pizza essen.



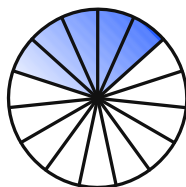
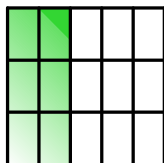
$\frac{2}{3}$ der Fläche des linken Quadrats ist rot gefärbt. Das rechte Quadrat hat noch eine zusätzliche Einteilung der Fläche. Der Anteil der roten Fläche ist aber gleich geblieben. Es gilt: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.



Die Flächen des Quadrats und des Kreises sind gleich groß. $\frac{2}{5}$ der Quadratfläche sind grün gefärbt und $\frac{1}{3}$ der Kreisfläche ist blau gefärbt. Welche gefärbte Fläche ist größer?

Wir können jedes Fünftel der Quadratfläche in 3 Teile teilen. Dann ist die gefärbte

Fläche gleich $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$.



Und wir können jedes Drittel der Kreisfläche in 5 Teile teilen. Dann ist die gefärbte Fläche gleich

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}.$$

Weil $\frac{6}{15}$ größer sind als $\frac{5}{15}$, ist die grüne Fläche die größere von beiden.



Haben wir ein Satellitenfoto und möchten abschätzen, welcher Anteil der Fläche mit Wasser bedeckt ist, können wir das Foto in gleich große Einheiten einteilen und nachzählen, wie viele der Einheiten Landflächen und wie viele Wasserflächen zeigen.

Die Einteilung in 16-stel ist hier vermutlich zu grob, um dieses Verfahren sinnvoll nutzen zu können. Wir werden also die 16-stel in weitere Einheiten unterteilen müssen. Mit welcher Zahl wir erweitern sollten, hängt davon ab, wie genau unsere Schätzung sein soll. Auch könnten wir uns überlegen, ob die Einteilung in Rechtecke die beste Lösung ist oder ob vielleicht eine Einteilung in Quadrate nützlicher wäre.