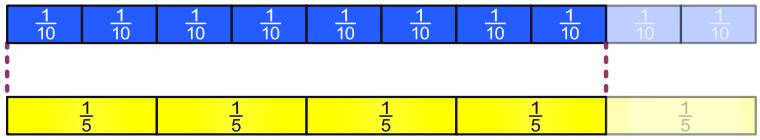
1 Brüche kürzen

Um einen Bruch zu erweitern, multiplizieren wir den Zähler und den Nenner dieses Bruchs mit der gleichen natürlichen Zahl (außer 0). So erhalten wir einen Bruch gleicher Größe. Auch der „umgekehrte“ Vorgang ist möglich.
Haben der Zähler und der Nenner eines Bruchs einen gemeinsamen Teiler, können wir beide durch diesen Teiler teilen. So erhalten wir einen Bruch gleicher Größe.

Betrachten wir dazu den Bruch $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$.
Wie wir sehen, gibt es einen Bruch, der genauso groß ist wie $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$, aber mit kleinerem Zähler und Nenner auskommt, nämlich $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.



Wenn wir den Nenner 10 durch 2 teilen, erhalten wir 5.
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ ist zweimal so groß wie $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$.
Um einen gleich großen Bruch zu erhalten, brauchen wir deshalb nur noch halb so viele Teile. Also teilen wir den Zähler 8 ebenfalls durch 2 und erhalten 4.
Es gilt:

$$\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}\,.$$

Diesen Zusammenhang können wir etwas ungenau, aber sehr kurz, so formulieren:

Je größer die Teile, desto geringer die Anzahl.

Den Vorgang, den Zähler und den Nenner eines Bruchs durch einen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner zu teilen, nennen wir **kürzen**. Durch das Kürzen eines Bruchs entsteht ein Bruch gleicher Größe.

> Werden der Zähler und der Nenner eines Bruchs durch einen gemeinsamen Teiler geteilt, entsteht ein Bruch gleicher Größe. Diesen Vorgang nennen wir **kürzen**.

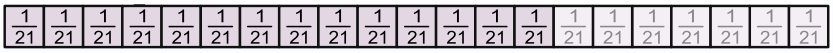
Sehr kurz können wir diesen Zusammenhang auch so notieren:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

Dabei steht $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ für einen beliebigen Bruch und **n** steht für einen beliebigen gemeinsamen Teiler von **a** und **b**. Um Unsinnigkeiten aus dem Weg zu gehen, wollen wir in Zukunft nur durch solche gemeinsamen Teiler **n** teilen, die größer als **1** sind.

Beispiel 1

Wir wollen den Bruch $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{21}}$ mit 7 kürzen.

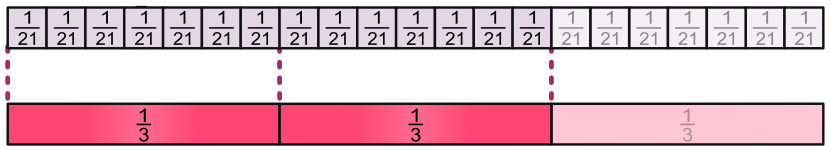


Teilen wir den Nenner 21 durch 7, erhalten wir 3.

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ ist siebenmal so groß wie $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}$.

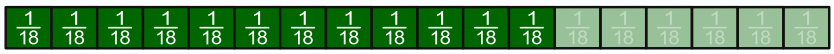
Für einen Bruch gleicher Größe brauchen wir deshalb nur ein Siebtel so viele Teile. Teilen wir den Zähler 14 durch 7, erhalten wir 2.

$$\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$$



Beispiel 2

Wir wollen den Bruch $\frac{12}{18}$ mit 3 kürzen.



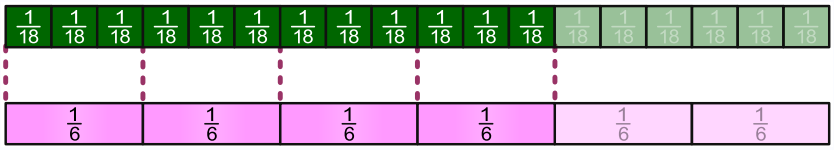
Teilen wir den Nenner 18 durch 3, erhalten wir 6.

$\frac{1}{6}$ ist dreimal so groß wie $\frac{1}{18}$.

Für einen Bruch gleicher Größe brauchen wir deshalb nur ein Drittel so viele Teile.

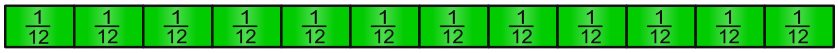
Teilen wir den Zähler 12 durch 3, erhalten wir 4.

$$\frac{12}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}\,.$$

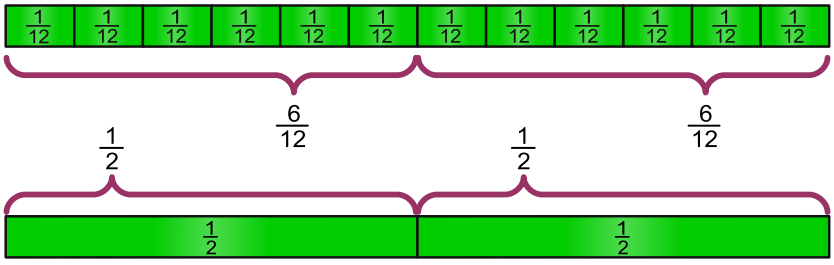


1.1 Kürzen durch alle Teiler des Nenners

Zu jedem Teiler eines Nenners gibt es Brüche, die wir durch diesen Teiler kürzen können. Schauen wir uns das an einem Beispiel an: Hier sind 12 Zwölftel.

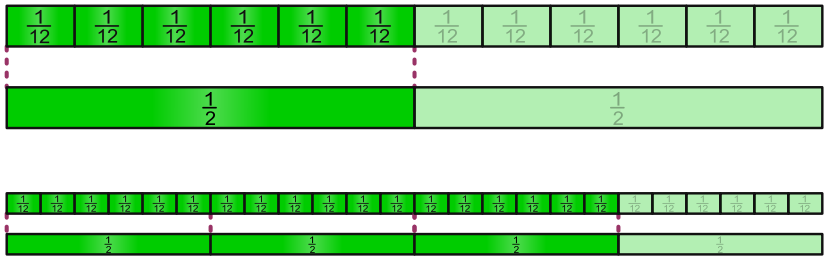


Weil 12 durch 6 teilbar ist, können wir jeweils 6 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen. Dann sind auf diesem Bruchstreifen $12 : 6 = 2$ dieser Teile. Es sind also Halbe.



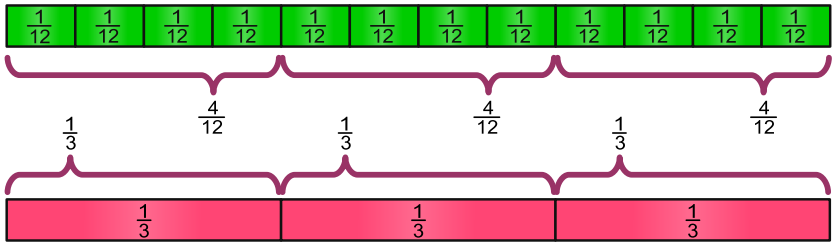
Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 6 teilbar ist, können wir den Bruch mit 6 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{18}{12} = \frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}.$$



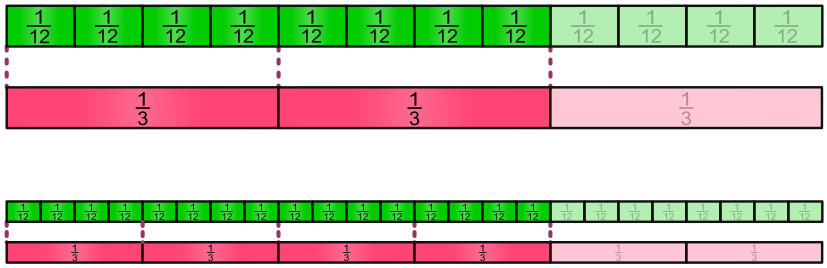
---

12 ist auch durch 4 teilbar. Deshalb können wir 12 Zwölftel in Vierer-Gruppen einteilen. Auf einem Ganzen haben wir dann 3 gleich große Teile. Jedes dieser Teile ist demnach gleich $\mathbf{\frac{1}{3}}$. Also: $\mathbf{\frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$.



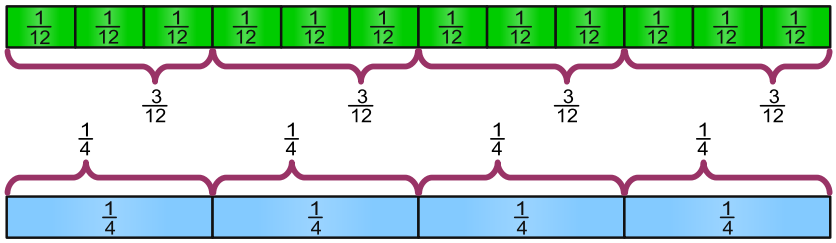
Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 4 teilbar ist, können wir den Bruch mit 4 kürzen. Z. B.:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{16}{12} = \frac{16:4}{12:4} = \frac{4}{3}.$$



---

12 ist auch durch 3 teilbar. Deshalb können wir jeweils 3 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen und erhalten Viertel.

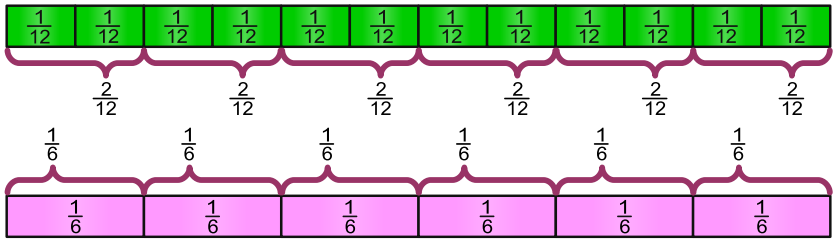


Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 3 teilbar ist, können wir den Bruch mit 3 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:3}{12:3} = \frac{2}{4} \quad \text{und} \quad \frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}.$$

---

12 ist auch durch 2 teilbar. Deshalb können wir jeweils 2 Zwölftel zu *einem* Teil zusammenfassen und erhalten Sechstel.



Hat ein Bruch den Nenner 12 und einen Zähler, der durch 2 teilbar ist, können wir den Bruch mit 2 kürzen. Z. B.:

$$\frac{6}{12} = \frac{6:2}{12:2} = \frac{3}{6} \quad \text{und} \quad \frac{28}{12} = \frac{28:2}{12:2} = \frac{14}{6}.$$

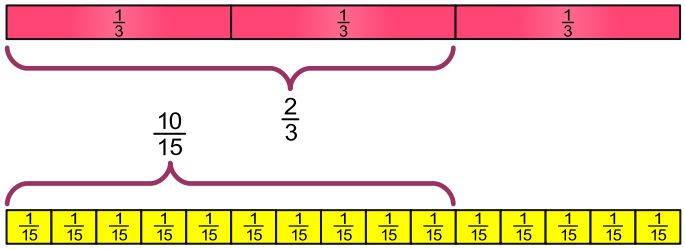
1.2 Kürzen als Umkehrung des Erweiterns

Wir können uns das Kürzen auch als Umkehrung des Erweiterns vorstellen. Erweitern bedeutet z. B.: Wir teilen jedes Drittel von $\frac{2}{3}$ in 5 gleich große Teile. Jedes dieser Teile hat dann noch ein Fünftel der Größe eines Drittels. Deshalb brauchen wir 5-mal so viele Teile für einen Bruch gleicher Größe.

Also: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$.

Nun können wir umgekehrt vorgehen und jeweils 5 der 10 Fünfzehntel wieder zu größeren Teilen zusammenfassen. Diese Teile sind dann 5-mal so groß wie die vorherigen Teile und deshalb brauchen wir für einen Bruch gleicher Größe nur noch $10 : 5 = 2$ Teile.

Also: $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$.



1.3 Einen Bruch kürzen

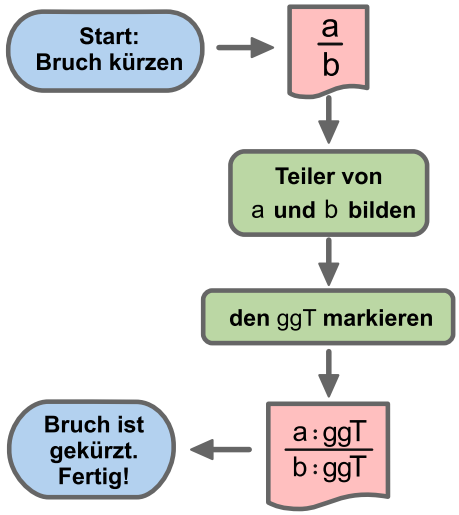
Mit gekürzten Brüchen zu rechnen ist meist einfacher als mit ungekürzten Brüchen zu rechnen. Einen Bruch kürzen wir normalerweise mit dem größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner.

Haben wir einen Bruch gegeben, können wir dabei so vorgehen:

1. Alle Teiler des Zählers aufschreiben.
2. Alle Teiler des Nenners aufschreiben.
3. Den größten gemeinsamen Teiler **ggT** von Zähler und Nenner markieren.
4. Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler **ggT** teilen.

Wenn wir in Zukunft davon sprechen, einen Bruch zu kürzen, meinen wir damit *immer*, einen Bruch den **ggT** zu kürzen.

Dieses Verfahren können wir auch als Flussdiagramm aufschreiben.



1.4 Beispiele

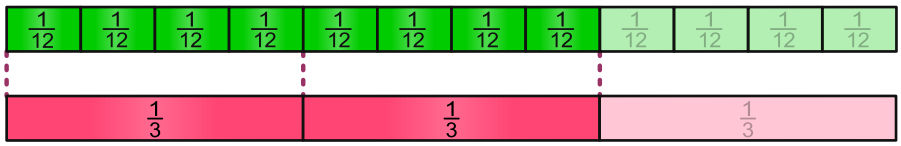
Schauen wir uns dazu Beispiele an:

Beispiel 1

Der Bruch $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}$ hat den Zähler 8 und den Nenner 12.
Die Teiler von 8 sind: $1; 2; 4; 8$.
Die Teiler von 12 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 12$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

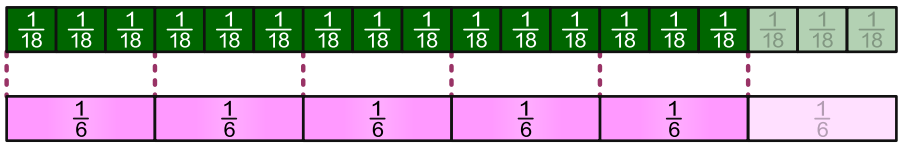


Beispiel 2

Der Bruch $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{18}}$ hat den Zähler 15 und den Nenner 18.
Die Teiler von 15 sind: $1; 3; 5; 15$.
Die Teiler von 18 sind: $1; 2; 3; 6; 9; 18$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3} = \frac{5}{6}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{18}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$.

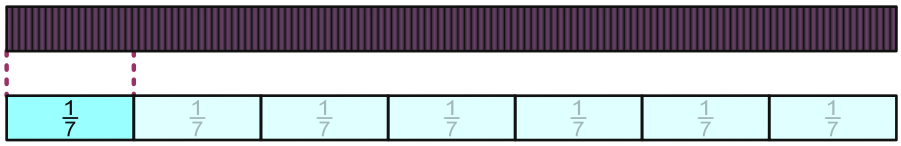


Beispiel 3

Der Bruch $\frac{\mathbf{108}}{\mathbf{756}}$ hat den Zähler 108 und den Nenner 756.
Die Teiler von 108 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108$.
Die Teiler von 756 sind: $1; 2; 3; 4; 6; 7; 9; 12; 14; 18; 21; 27; 28; 36; 42; 54; 63; 84; 108; 126; 189; 252; 378; 756$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Nun teilen wir den Zähler und den Nenner durch den ggT.

$$\frac{108}{756} = \frac{108 : 108}{756 : 108} = \frac{1}{7}$$

Wenn wir also $\frac{\mathbf{108}}{\mathbf{756}}$ kürzen, erhalten wir $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$.



Beispiel 4

Der Bruch $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{81}}$ hat den Zähler 40 und den Nenner 81.
Die Teiler von 40 sind: $1; 2; 4; 5; 10; 20; 40$.
Die Teiler von 81 sind: $1; 3; 9; 27; 81$.
Den **ggT** haben wir rot markiert.
Weil der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner gleich 1 ist, können wir diesen Bruch nicht sinnvoll kürzen.