

1 Brüche multiplizieren

In der Mathematik hat sich die folgende Regel durchgesetzt:

Brüche werden multipliziert, indem
die Zähler und die Nenner multipliziert werden.

Diese Regel können wir kurz so zusammenfassen:

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.

Verwenden wir Variablen, können wir das sehr kurz so aufschreiben:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Dabei stehen a , b , c und d für natürlichen Zahlen, wobei b und d ungleich 0 sein sollen.

1.1 Beispiele

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Die Zahlen, die multipliziert werden, nennen wir **Faktoren**. Hier werden also die Faktoren $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ multipliziert.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Das Ergebnis einer Multiplikation nennen wir **Produkt**. Hier ist das Produkt der Bruch $\frac{8}{15}$.

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{6}{1} = \frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 1} = \frac{24}{1} = 24$$

Wenden wir die Bruchmultiplikation auf natürliche Zahlen an, erhalten wir die Ergebnisse, die wir vom Rechnen mit natürlichen Zahlen gewohnt sind, denn $\frac{4}{1}$ ist gleich **4**, $\frac{6}{1}$ ist gleich **6**, $\frac{24}{1}$ ist gleich **24** und $4 \cdot 6$ ist gleich **24**.

Um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen, kürzen wir Brüche, bevor wir sie multiplizieren.

$$\frac{15}{9} \cdot \frac{14}{21} = \frac{15 : 3}{9 : 3} \cdot \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

Wenn sich ein weiteres Mal die Möglichkeit ergibt, zu kürzen, dann machen wir das auch.

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{8} = \frac{6 : 3}{3 : 3} \cdot \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{1 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Manchmal schreiben wir eine Zahl als Produkt von Primzahlen auf, um kürzen zu können.

$$\frac{14}{21} \cdot \frac{25}{20} = \frac{14 : 7}{21 : 7} \cdot \frac{25 : 5}{20 : 5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

Gerade bei „größeren“ Zahlen kann es hilfreich sein, direkt am Anfang beide Zähler und Nenner als Produkte von Primzahlen zu schreiben.

Beispiel 1:

$$\frac{\textcolor{teal}{14}}{\textcolor{brown}{21}} \cdot \frac{\textcolor{red}{25}}{\textcolor{blue}{20}} = \frac{\textcolor{teal}{2} \cdot \textcolor{red}{7}}{\textcolor{brown}{3} \cdot \textcolor{red}{7}} \cdot \frac{\textcolor{red}{5} \cdot \textcolor{red}{5}}{\textcolor{blue}{2} \cdot \textcolor{blue}{2} \cdot \textcolor{blue}{5}} = \frac{\cancel{\textcolor{teal}{2}} \cdot \cancel{\textcolor{red}{7}}}{\textcolor{brown}{3} \cdot \cancel{\textcolor{red}{7}}} \cdot \frac{\textcolor{red}{5} \cdot \cancel{\textcolor{red}{5}}}{\cancel{\textcolor{blue}{2}} \cdot \textcolor{blue}{2} \cdot \cancel{\textcolor{blue}{5}}} = \frac{\textcolor{red}{5}}{\textcolor{brown}{3} \cdot \textcolor{blue}{2}} = \frac{5}{6}$$

Beispiel 2:

$$\frac{\textcolor{red}{198}}{\textcolor{brown}{140}} \cdot \frac{\textcolor{red}{60}}{\textcolor{blue}{99}} = \frac{\textcolor{teal}{2} \cdot \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{red}{3} \cdot \textcolor{red}{11}}{\textcolor{brown}{2} \cdot \textcolor{brown}{2} \cdot \textcolor{brown}{5} \cdot \textcolor{brown}{7}} \cdot \frac{\textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{5} \cdot \textcolor{red}{3}}{\textcolor{blue}{3} \cdot \textcolor{blue}{3} \cdot \textcolor{blue}{11}} = \frac{\cancel{\textcolor{teal}{2}} \cdot \cancel{\textcolor{red}{3}} \cdot \cancel{\textcolor{red}{3}} \cdot \cancel{\textcolor{red}{11}}}{\textcolor{brown}{2} \cdot \cancel{\textcolor{brown}{2}} \cdot \cancel{\textcolor{brown}{5}} \cdot \textcolor{brown}{7}} \cdot \frac{\cancel{\textcolor{red}{2}} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \cancel{\textcolor{red}{5}} \cdot \textcolor{red}{3}}{\cancel{\textcolor{blue}{3}} \cdot \cancel{\textcolor{blue}{3}} \cdot \cancel{\textcolor{blue}{11}}} = \frac{6}{7}$$

1.2 Sprechweisen

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ ist „ein Drittel mal ein Viertel“ oder „ein Drittel von ein Viertel“.

Wir sagen nicht: „ein Drittel von einem Viertel“ und auch nicht „ein Drittel eines Viertels“, weil nicht ein bestimmtes Viertel gemeint ist, sondern die Zahl $\frac{1}{4}$.

Dabei übertragen wie die Sprechweisen, die wie von den natürlichen Zahlen kennen, auf die Bruchrechnung, denn:

$3 \cdot 4$ ist „das dreifache von Vier“ und nicht „das dreifache von einer Vier“ oder „das dreifache einer Vier“ oder „das Dreifache eines Vierers“. Ebenso bezeichnen wir

$\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{7}$ mit „zwei Fünftel mal neun Siebtel“ oder mit „zwei Fünftel von neun Siebtel“.

Wir sagen nicht: „zwei Fünftel von neun Siebtel“ und auch nicht „zwei Fünftel des neunfachen eines Siebtels“.

1.3 Erklärung der Bruchmultiplikation

Wir kennen die Multiplikation natürlicher Zahlen als Abkürzung der Addition. Z.B.:

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Es ist also $3 \cdot 4$ das Dreifache von Vier.

Wenn wir eine natürliche Zahl mit einem Bruch multiplizieren, wollen wir das genauso verstehen. Dann ist z.B. $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Damit ist dann $3 \cdot \frac{1}{4}$ das Dreifache von ein Viertel.

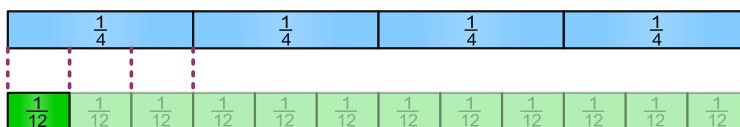
Auf dieses Ergebnis kommen wir auch, wenn wir die oben definierte Bruchmultiplikation verwenden:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Was könnte nun $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ sein?

Wenn $3 \cdot \frac{1}{4}$ das Dreifache von ein Viertel ist, könnte doch $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ ein Drittel von ein Viertel sein.

Wie wir z. B. an den Bruchstreifen sehen können, ist ein Drittel von ein Viertel ein Zwölftel, denn wenn wir jedes Viertel in drei gleich große Teile teilen, passen $3 \cdot 4 = 12$ dieser Teile auf ein Ganzes.



Zu genau diesem Ergebnis kommen wir auch, wenn wir **Zähler mal Zähler** und **Nenner mal Nenner** rechnen.

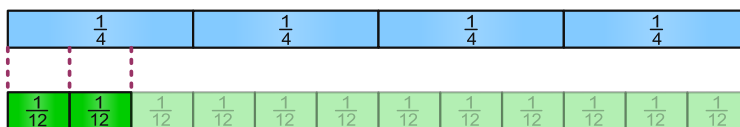
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Von den natürlichen Zahlen kennen wir die folgende Situation: Wenn wir z. B. $3 \cdot 4$ rechnen, erhalten wir **12**, und wenn wir $6 \cdot 4$ rechnen, erhalten wir das **Doppelte** von **12**, nämlich **24**. Dementsprechend soll das Ergebnis von $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ **doppelt** so groß sein wie das Ergebnis von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

Genau dieses Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Definition verwenden.

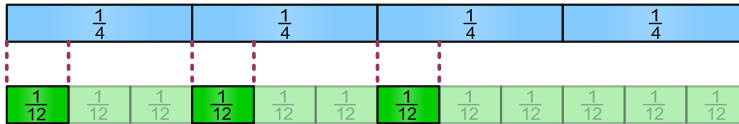
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12}$$

Auch das können wir an den Bruchstreifen nachvollziehen. Wenn wir ein Drittel von ein Viertel bilden, erhalten wir ein Zwölftel. Wenn wir *zwei* Drittel von ein Viertel bilden, erhalten wir *zwei* Zwölftel.



Um $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ mit den Bruchstreifen zu veranschaulichen, könnten wir $\frac{3}{4}$ in **3** gleich große Teile teilen. Das wäre zwar richtig und sinnvoll, aber dann könnten wir nicht so gut sehen, dass die Regel *Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner* sinnvoll ist.

Deshalb entscheiden wir uns für die folgende Methode: Wir bilden ein Drittel jedes der **3** Viertel des Bruchstreifens. Wie wir sehen, sind das $\frac{3}{12}$.



Multiplizieren wir entsprechend der Definition, tritt genau das gleiche ein:

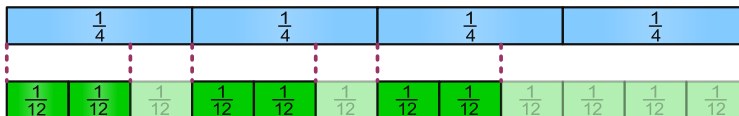
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12}$$

Folgen wir dieser Logik weiter, so soll $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ das dreifache von $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ sein.

Dieses Ergebnis erhalten wir, wenn wir die Definition verwenden:

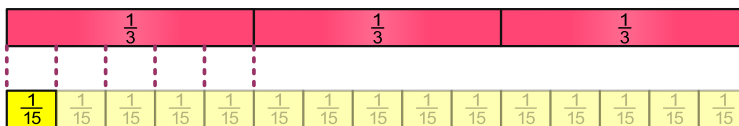
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}$$

denn sechs Zwölftel sind dreimal so groß wie zwei Zwölftel.



Schauen wir uns die Bruchmultiplikation an einem weiteren Beispiel an:

Wenn wir ein Drittel in **5** gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile ein Fünfzehntel, weil $5 \cdot 3 = 15$ dieser Teile auf ein Ganzes passen.



Das Ergebnis von $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$

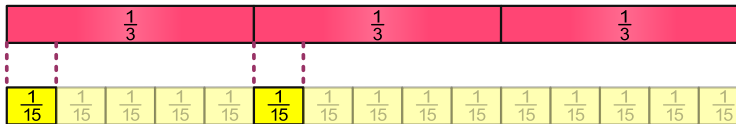
soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{3}$?“

Wir rechnen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$$

Das Ergebnis von $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$

soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{2}{3}$?“

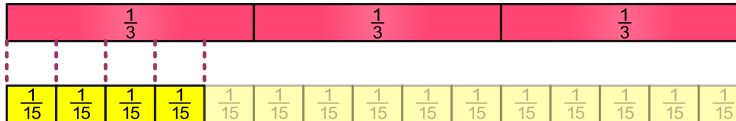


Wir rechnen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Das Ergebnis von $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$

soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel sind $\frac{4}{5}$ von $\frac{1}{3}$?“

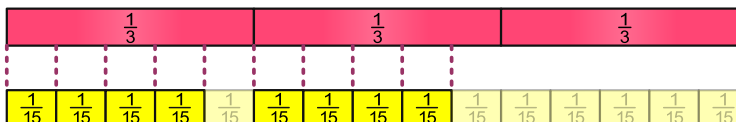


Wir rechnen:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

Das Ergebnis von $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

soll die Antwort auf die Frage sein: „Wie viel sind $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$?“



Wir rechnen:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

1.4 Beispiele

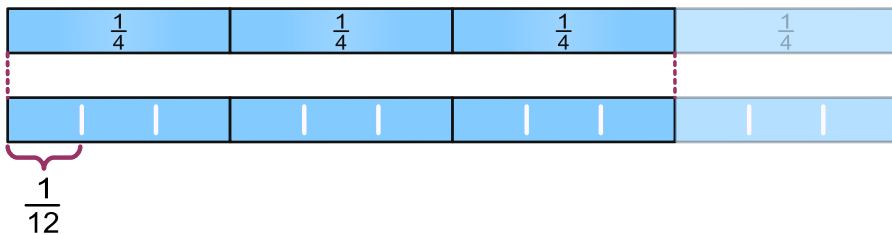
Schauen wir uns noch ein paar Beispiele an:

Beispiel 1

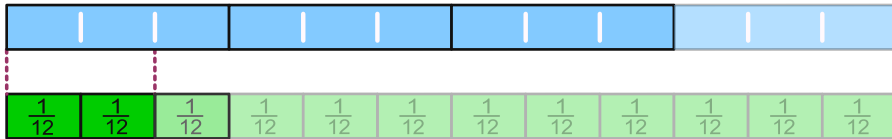
Wie wollen die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ multiplizieren, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ausrechnen.

Wir fragen uns: Was sind zwei Drittel von drei Viertel?

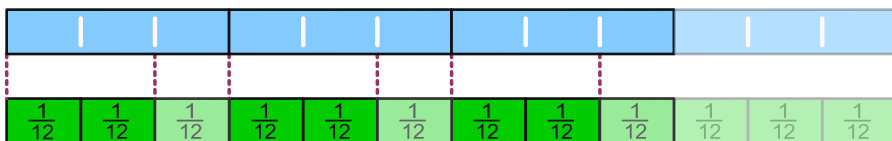
Zunächst teilen wir alle 4 Viertel in 3 Einheiten. Dadurch entstehen $3 \cdot 4 = 12$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{12}$ des Ganzen.



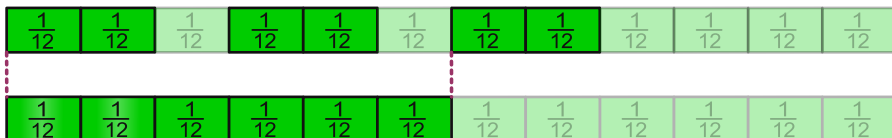
$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{4}$ sind 2 Einheiten.



$\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ sind dann $2 \cdot 3 = 6$ Einheiten.

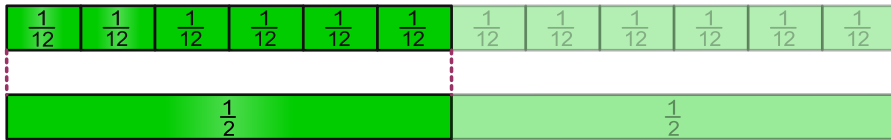


Zusammen sind das $\frac{6}{12}$.



Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

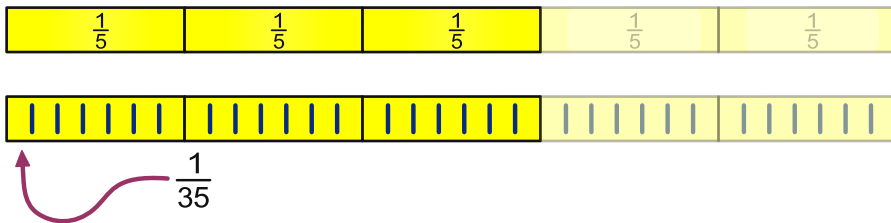
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{6 : 6}{12 : 6} = \frac{1}{2}$$



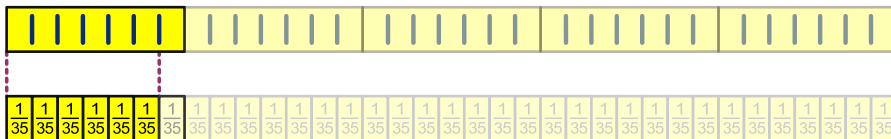
Beispiel 2

Wie wollen die Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{3}{5}$ multiplizieren, also $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5}$ ausrechnen.
Wir fragen uns: Was sind sechs Siebtel von drei Fünftel?

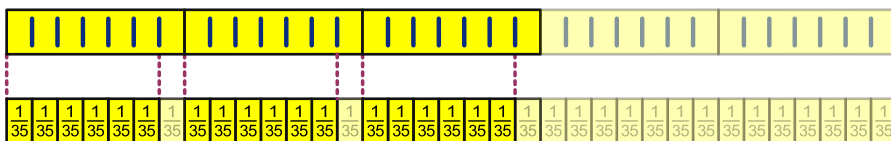
Zunächst teilen wir alle 5 Fünftel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 5 = 35$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{35}$ des Ganzen.



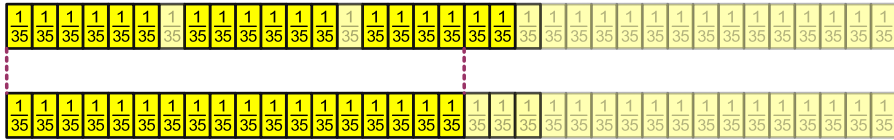
$\frac{6}{7}$ von $\frac{1}{5}$ sind 6 Einheiten.



$\frac{6}{7}$ von $\frac{3}{5}$ sind dann $6 \cdot 3 = 18$ Einheiten.



Zusammen sind das $\frac{18}{35}$.



Hier ist die vollständige Rechnung dazu:

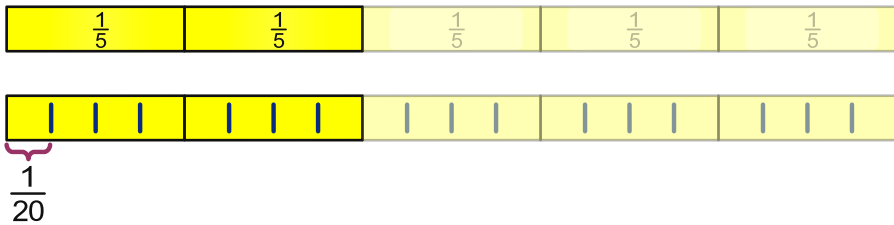
$$\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{18}{35}$$

Beispiel 3

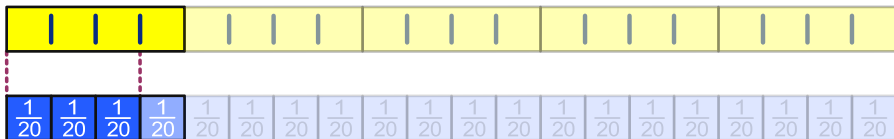
Wie wollen die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ multiplizieren, also $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ ausrechnen.

Wir fragen uns: Was sind drei Viertel von zwei Fünftel?

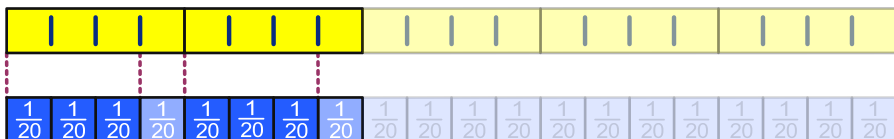
Zunächst teilen wir alle 5 Fünftel in 4 Einheiten. Dadurch entstehen $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{20}$ des Ganzen.



$\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{5}$ sind 3 Einheiten.



$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ sind dann $3 \cdot 2 = 6$ Einheiten.



Zusammen sind das $\frac{6}{20}$.



Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{6 : 2}{20 : 2} = \frac{3}{10}$$

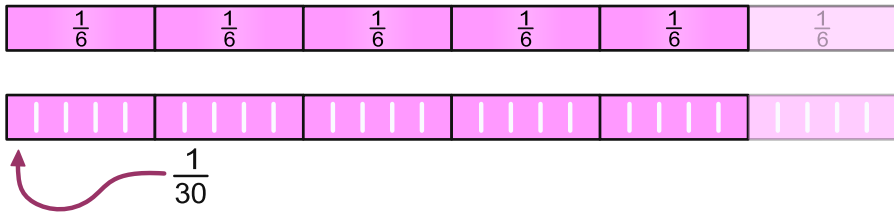


Beispiel 4

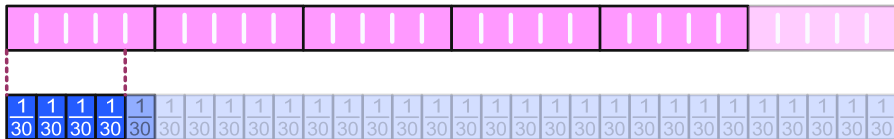
Wie wollen die Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ multiplizieren, also $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$ ausrechnen.

Wir fragen uns: Was sind vier Fünftel von fünf Sechstel?

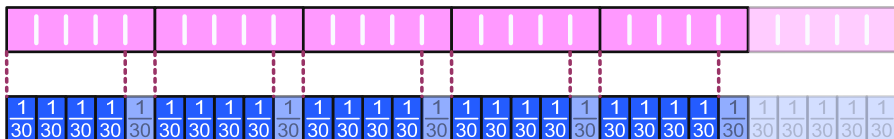
Zunächst teilen wir alle 6 Sechstel in 5 Einheiten. Dadurch entstehen $5 \cdot 6 = 30$ Einheiten. Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{30}$ des Ganzen.



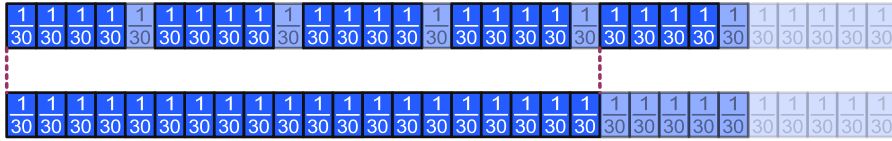
$\frac{4}{5}$ von $\frac{1}{6}$ sind 4 Einheiten.



$\frac{4}{5}$ von $\frac{5}{6}$ sind dann $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten.

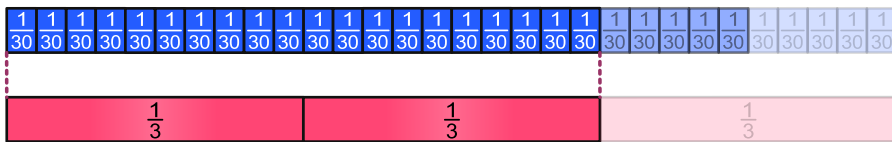


Zusammen sind das $\frac{20}{30}$.



Weil wir das Ergebnis noch kürzen, haben wir nun die folgende Rechnung:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}$$



Dieses Ergebnis hätte wir übrigens auch erhalten, wenn wir die Brüche vor der Multiplikation gekürzt hätten. Aber dann hätten wir nichts mehr zu multiplizieren gehabt.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

1.5 Anschauliche Bruchmultiplikation

Wir können uns die Multiplikation von Brüchen nach einem Standardverfahren vorstellen. Hier sind ein paar Beispiele.

Beispiel 1

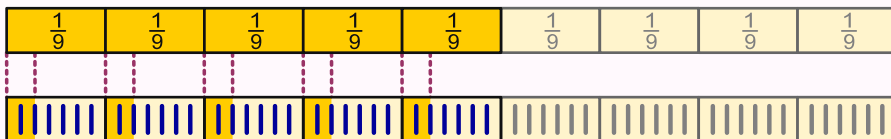
Wir wollen $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9}$ veranschaulichen. Dazu markieren wir 5 von 9 Neunteln.



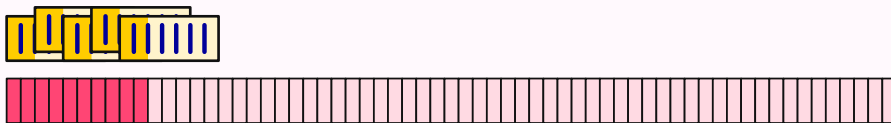
Jedes dieser Neuntel teilen wir in 7 Einheiten ein. Damit gibt es insgesamt $7 \cdot 9 = 63$ Einheiten, also ist jede Einheit $\frac{1}{63}$.



Wir markieren jeweils 2 der 5 Neuntel. Das sind insgesamt $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Die markierten Einheiten schieben wir zusammen und lesen das Ergebnis ab.



Also ist $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{10}{63}$.

Beispiel 2

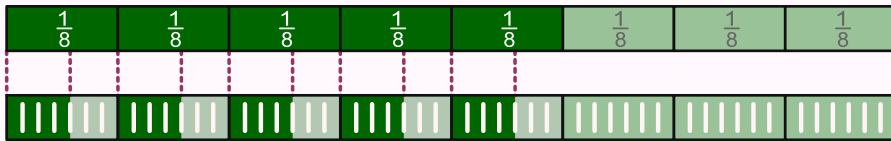
Wir wollen $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}$ veranschaulichen. Dazu markieren wir 5 von 8 Achteln.



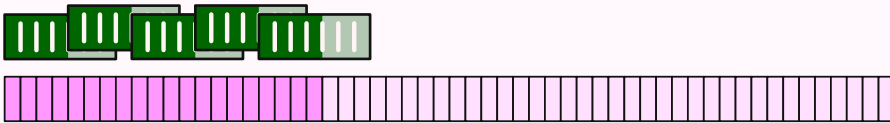
Jedes dieser Achtel teilen wir in 7 Einheiten ein. Damit gibt es insgesamt $7 \cdot 8 = 56$ Einheiten, also ist jede Einheit $\frac{1}{56}$.



Wir markieren jeweils 4 der 5 Achtel. Das sind insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ Einheiten.

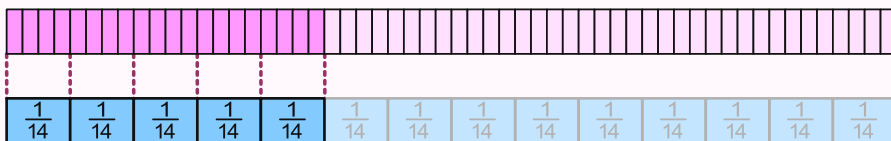


Die markierten Einheiten schieben wir zusammen und lesen das Ergebnis ab.



Also ist $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{20}{56}$.

Das Ergebnis können wir noch kürzen und wir erhalten: $\frac{20}{56} = \frac{20 : 4}{56 : 4} = \frac{5}{14}$



Wir hätten auch am Anfang kürzen können: $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{7 \cdot \cancel{2} \cdot 4} = \frac{5}{14}$

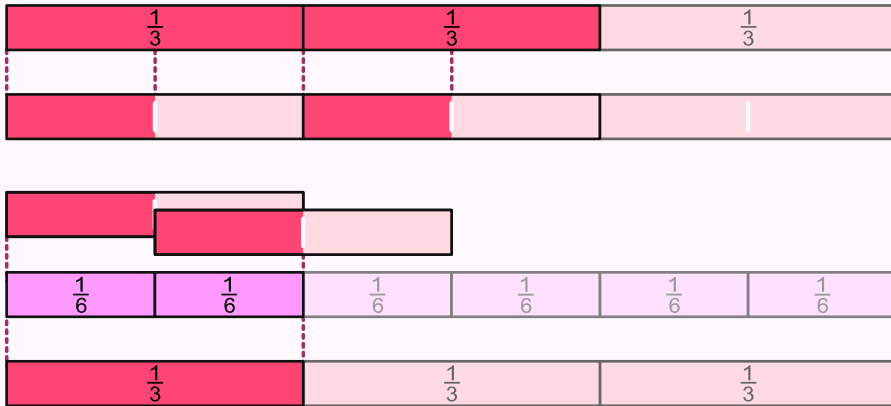
Aber dann hätten wir nicht sehen können, wie die Bruchmultiplikation funktioniert.

Wenn wir die einzelnen Schritt beherrschen, können wir die anschauliche Bruchmultiplikation auch so zusammenfassen.

Beispiel 3

Wir wollen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ veranschaulichen.

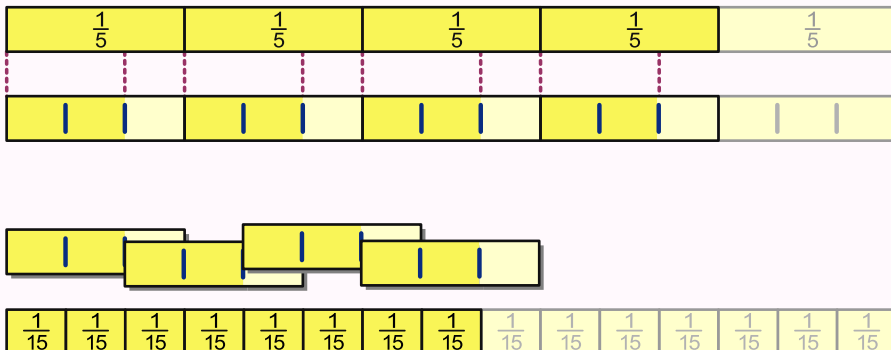
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



Beispiel 4

Wir wollen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ veranschaulichen.

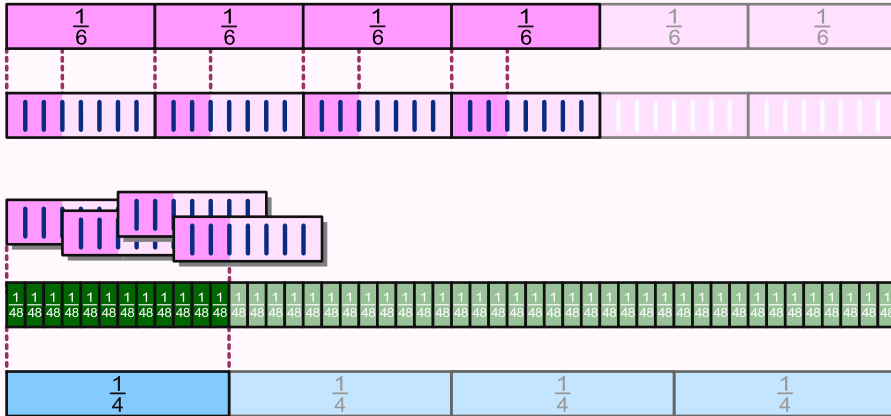
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$



Beispiel 4

Wir wollen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ veranschaulichen.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 6} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$



1.6 Über Kreuz kürzen

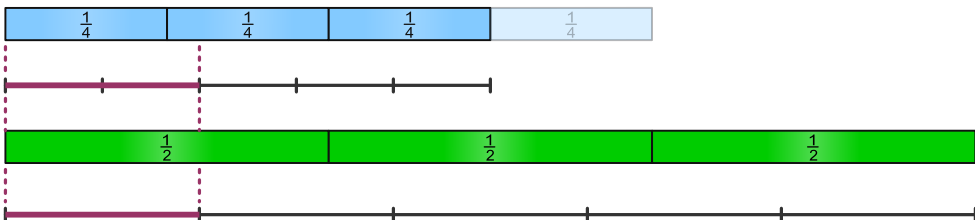
Wenn wir $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ ausrechnen möchten, kürzen wir, bevor wir rechnen. Also:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2} \cdot 2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

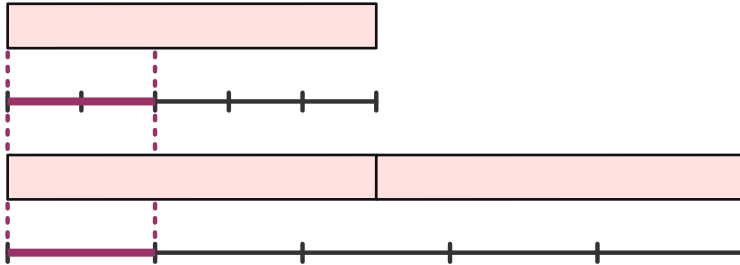
Aber warum funktioniert das? Warum können wir „über Kreuz“ kürzen?

Schauen wir uns diesen Zusammenhang an den Bruchstreifen an: Wie wir sehen, sind $\frac{3}{2}$ doppelt so groß wie $\frac{3}{4}$.

Statt also *zwei* Fünftel von $\frac{3}{4}$ zu bestimmen, berechnen wir nur *ein* Fünftel von einem Bruch, der doppelt so groß ist wie $\frac{3}{4}$, nämlich von $\frac{3}{2}$.



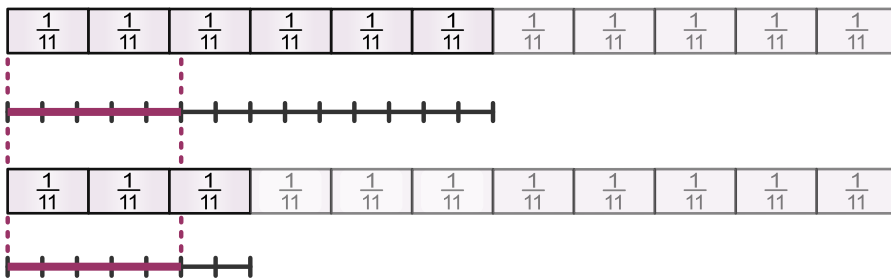
Wir können uns das auch etwas allgemeiner vorstellen: Wir haben irgendeine Länge gegeben und möchten $\frac{2}{5}$ dieser Länge bestimmen. Dann können wir ebenso gut nur $\frac{1}{5}$ der doppelten Länge bestimmen und erhalten das gleiche Ergebnis.



Weitere Beispiele

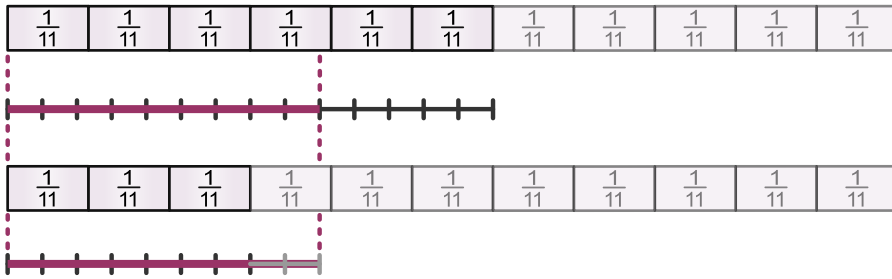
$$\frac{5}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11}$$

Wir haben eine Strecke in **14** Teile geteilt. Und wir haben eine halb so große Strecke in **7** Teile geteilt. Wie wir sehen, sind die Siebtel der halben Strecke so groß wie die Vierzehntel der ganzen Strecke.



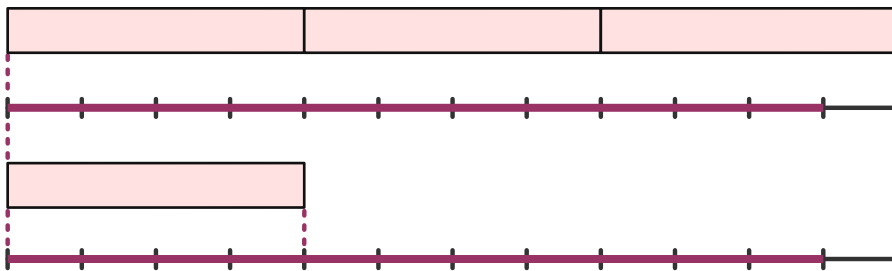
Diese Darstellung funktioniert sogar dann, wenn durch das Kürzen der Zähler des ersten Bruchs größer wird als dessen Nenner.

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{6}{11} = \frac{9}{7} \cdot \frac{3}{11}$$



In diesem Beispiel geht es um eine beliebig lange Strecke **a**. Die Zwölftel des dreifachen von **a** sind genauso lang wie die Viertel der einfachen Strecke.

$$\frac{11}{12} \cdot 3a = \frac{11}{4}a$$



1.7 Vertauschung von Zählern und Nennern

Wenn wir zwei Brüche multiplizieren, können wir die Zähler vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern. Das Gleiche gilt für die Nenner. Z. B.:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}$$

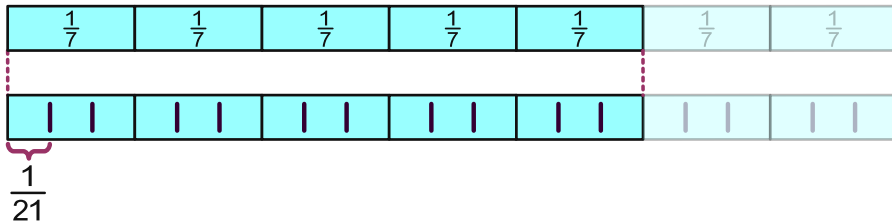
Warum ist das so?

1.7.1 Ausgangsbrüche

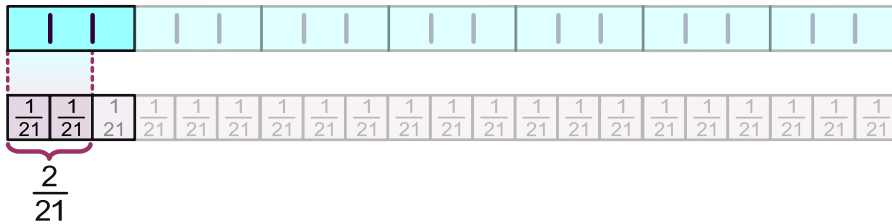
Schauen wir uns an, wie wir $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ multiplizieren:

Zunächst teilen wir alle 7 Siebtel in 3 Einheiten ein. Dadurch entstehen $3 \cdot 7 = 21$ Einheiten.

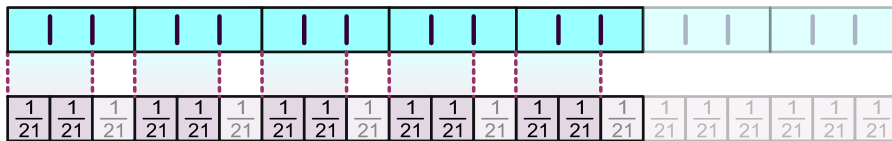
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



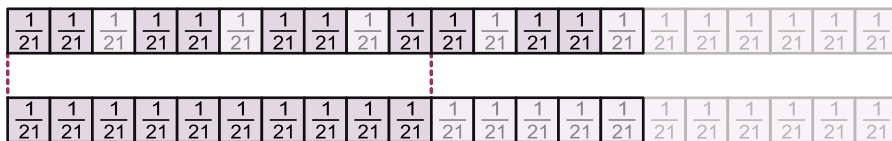
$\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{7}$ sind *zwei* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{2}{21}$.



$\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$, sind jeweils *zwei* Einheiten von *fünf* Bruchteilen, also sind es $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.

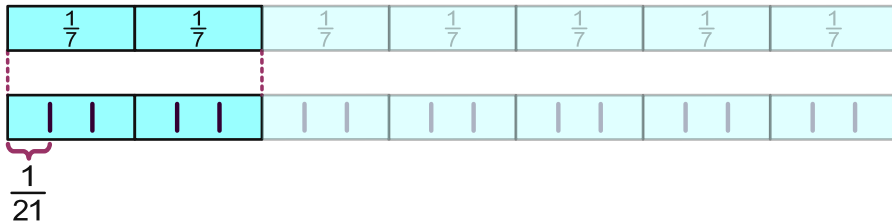


1.7.2 Vertauschte Zähler

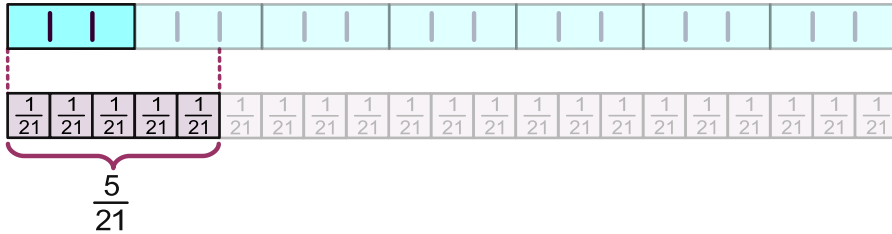
Schauen wir uns nun $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$ an:

Zunächst teilen wir alle 7 Siebtel in 3 Einheiten. Dadurch entstehen $3 \cdot 7 = 21$ Einheiten.

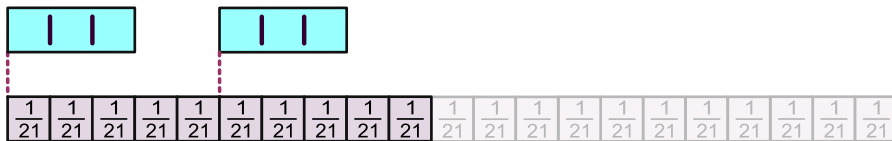
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



$\frac{5}{3}$ von $\frac{1}{7}$ sind *fünf* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{5}{21}$.



$\frac{5}{3}$ von $\frac{2}{7}$, sind jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen,
also sind es $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten. Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



Warum kommt nun das gleiche Ergebnis heraus?

Da die Nenner gleich geblieben sind, sind auch die Einheiten gleich geblieben.

Es sind 21-stel.

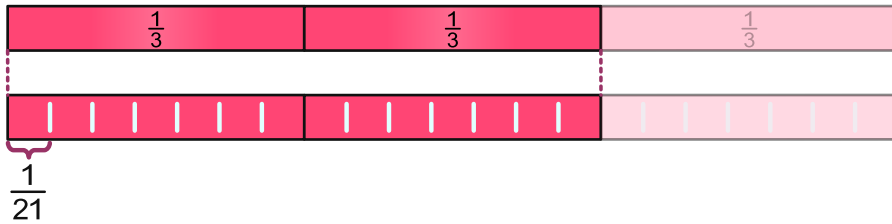
Die Anzahl der Einheiten im Ergebnis ist gleich geblieben, weil wir im ersten Fall jeweils zwei Einheiten von fünf Teilen bestimmt haben und im zweiten Fall jeweils fünf Einheiten von zwei Teilen bestimmt haben. In beiden Fällen sind es 10 Einheiten.

1.7.3 Vertauschte Nenner

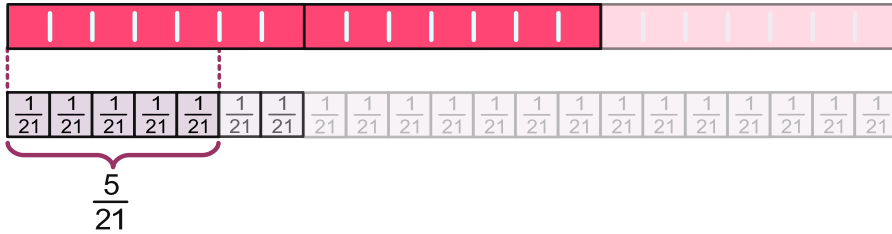
Kommen wir nun zu $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$:

Zunächst teilen wir alle 3 Drittel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 3 = 21$ Einheiten.

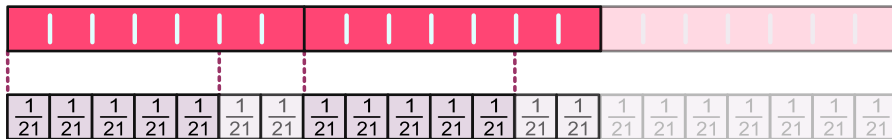
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



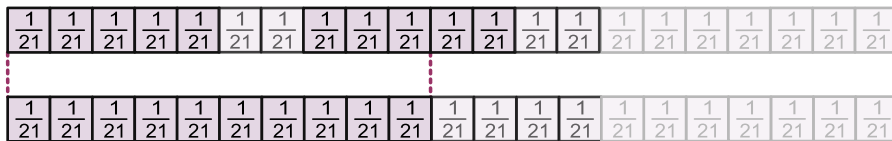
$\frac{5}{7}$ von $\frac{1}{3}$ sind *fünf* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{5}{21}$.



$\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{3}$, sind jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen, also sind es $5 \cdot 2 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



Warum kommt nun bei $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$ das gleiche Ergebnis heraus wie bei $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$?

Da die Zähler gleich geblieben sind, bilden wir wieder jeweils *fünf* Einheiten von *zwei* Bruchteilen. Das sind 10 Einheiten.

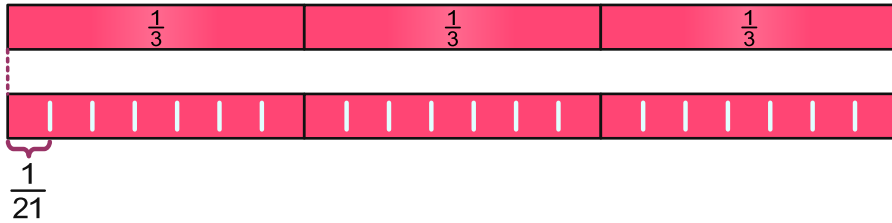
In der vorherigen Rechnung haben wir alle 7 Siebtel in jeweils 3 Einheiten geteilt. Das Ergebnis waren 21-stel. In dieser Rechnung haben wir 3 Drittel in jeweils 7 Einheiten geteilt. Das Ergebnis waren wieder 21-stel. Deshalb ist auch der Nenner gleich geblieben.

1.7.4 Vertauschte Zähler

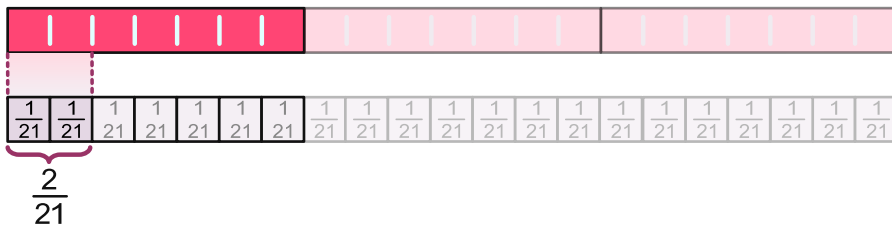
Zum guten Schluss haben wir noch $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}$:

Zunächst teilen wir alle 3 Drittel in 7 Einheiten. Dadurch entstehen $7 \cdot 3 = 21$ Einheiten.

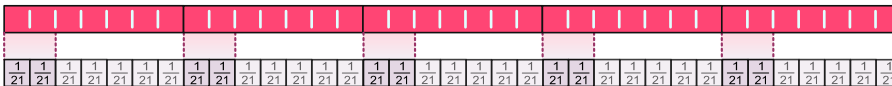
Deshalb ist eine Einheit $\frac{1}{21}$ des Ganzen.



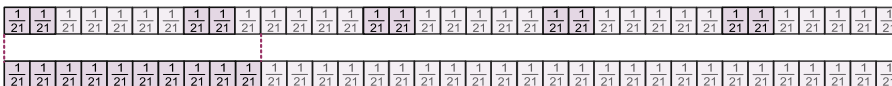
$\frac{2}{7}$ von $\frac{1}{3}$ sind *zwei* Einheiten von *einem* Bruchteil, also $\frac{2}{21}$.



$\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{5}$, sind jeweils *zwei* Einheiten von *fünf* Bruchteilen, also sind es $2 \cdot 5 = 10$ Einheiten.



Das Ergebnis ist $\frac{10}{21}$.



Warum kommt nun bei $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$ wieder das gleiche wie bei allen anderen Produkten heraus?

Der Zähler bleibt gleich, weil wir entweder *fünf* Einheiten von *zwei* Teilen nehmen oder *zwei* Einheiten von *fünf* Teilen. Die Anzahl bleibt immer gleich.

Der Nenner bleibt gleich, weil wir entweder 3 Drittel in jeweils 7 Einheiten teilen oder 7 Siebtel in jeweils 3 Einheiten. Die Anzahl bleibt immer gleich.