Anschauliche Erklärung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

Um diesen Artikel zu verstehen, sollten Sie wissen, was Ableitungen und Integrale sind. Außerdem sollten Sie Steigungsdreiecke und Flächeninhaltsfunktionen kennen.

Um die intuitiven Ideen hinter dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung möglichst deutlich herauszustellen, wird etwas an der Exaktheit und Vollständigkeit der Darstellung gespart. So werden z. B. nicht alle Voraussetzungen des Hauptsatzes genannt oder es werden Zusammenhänge für eine bestimmte Funktion gezeigt, ohne immer darauf hinzuweisen, für welche Klasse von Funktionen diese Zusammenhänge ebenfalls richtig sind.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird auch Fundamentalsatz der Analysis genannt. Wie diese Bezeichnungen vermuten lassen, ist dies ein ganz wichtiger Satz. Um zu verstehen, was die Aussage dieses Satzes ist, schauen wir uns die Funktion ***f(x)*** an; außerdem noch deren Graph zwischen **x=0** und **x=4** und die dazugehörige Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$. Der Funktionswert von $\boldsymbol{F_0(x)}$ an einer bestimmten Stelle **x** ist gleich dem Flächeninhalt der Fläche, die sich unter dem Graphen von ***f(x)*** im Intervall von 0 bis **x** befindet.

Der Vollständigkeit halber sei angegeben, um welche Funktionen es sich dabei konkret handelt. Es sind:

$$f(x) = \frac{3}{5}x\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$$

und

$$F_0(x) = \frac{3}{80}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2 \ .$$

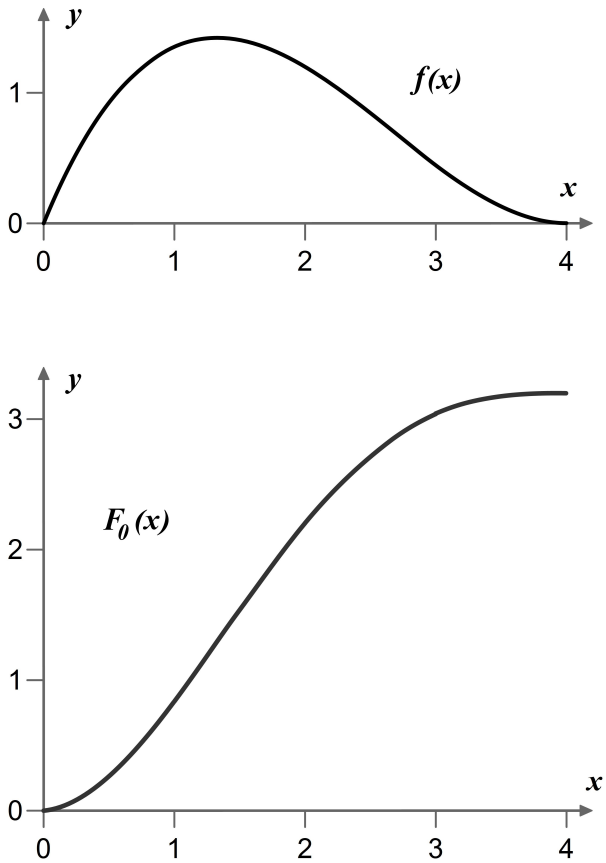

Abb. 1 Funktion und Flächeninhaltsfunktion

Der Funktionswert von $F_0(x)$ ist bei **1** z. B. gleich **0,8375**, weil der Flächeninhalt der blauen Fläche gleich **0,8375** Flächeneinheiten (FE) ist.

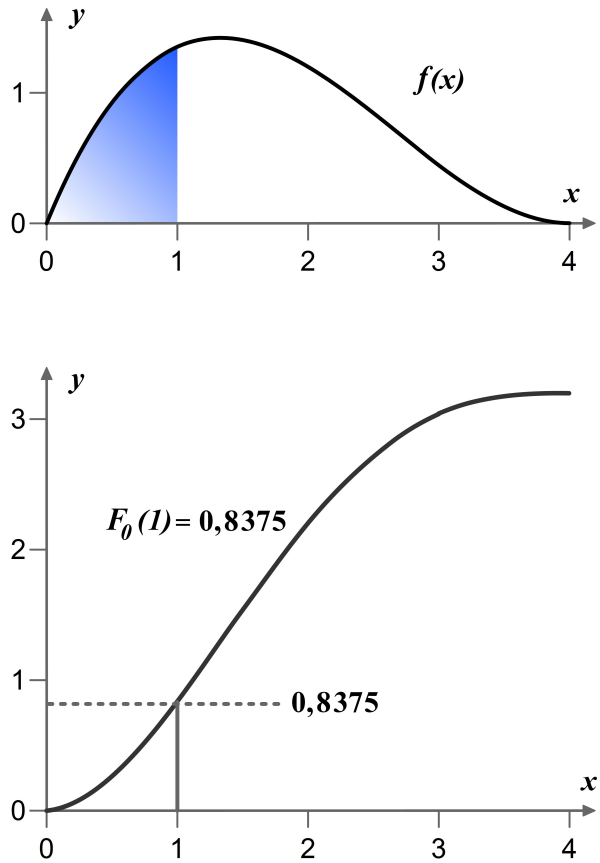

Abb. 2 Funktion und Flächeninhaltsfunktion an der Stelle $x = 1$

Der Funktionswert von $\boldsymbol{F_0(x)}$ ist bei **2** gleich **2,2**, weil der Flächeninhalt der blauen und roten Fläche zusammen gleich **2,2** FE ist.

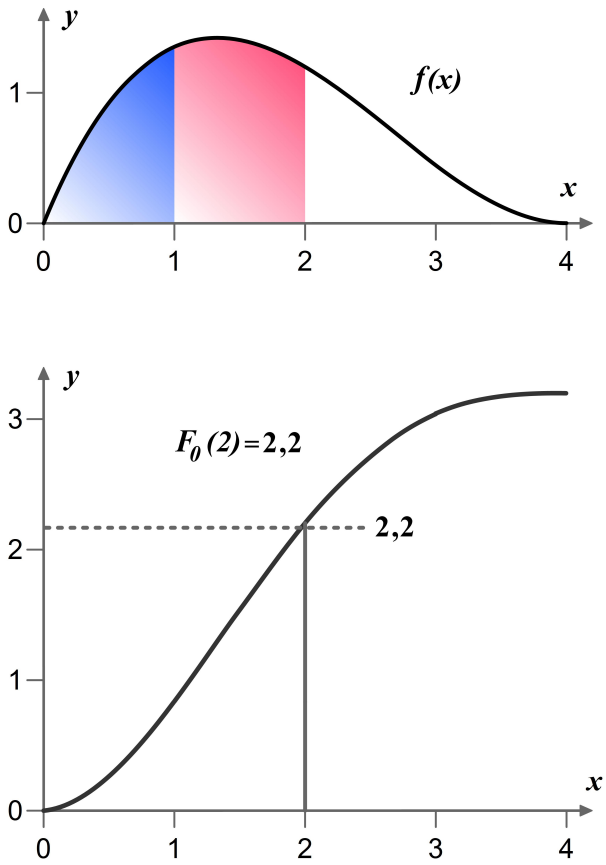

Abb. 3 Funktion und Flächeninhaltsfunktion an der Stelle $x = 2$

Der Hauptsatz besagt nun: Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$ an jeder Stelle $\boldsymbol{x}$ ist genauso groß wie der Funktionswert von $\boldsymbol{f(x)}$ an dieser Stelle. In kurz also:

$$\left(F_0(x)\right)' = f(x)$$

Das bedeutet: Die Steigung des Graphen der Flächeninhaltsfunktion an irgendeiner Stelle ist genauso groß wie der Funktionswert *der* Funktion, deren Fläche unter dem Graphen die Flächeninhaltsfunktion angibt. Das ist zumindest erstaunlich! Schließlich haben die Bestimmung der Fläche unter einem Graphen und die Bestimmung der Steigung eines Graphen vordergründig nichts miteinander zu tun.

Schauen wir uns genauer an, was das für unser Beispiel bedeutet: Wir suchen uns irgendeinen Punkt aus, z. B. $(3|F_0(3))$ und zeichnen die Tangente an den Graphen in diesem Punkt ein. Wenn wir dann ein Steigungsdreieck einzeichnen, deren horizontale Seite die Länge 1 hat, dann ist die vertikale Seite genauso groß wie der Funktionswert der Funktion $\boldsymbol{f(x)}$ an der Stelle 3.

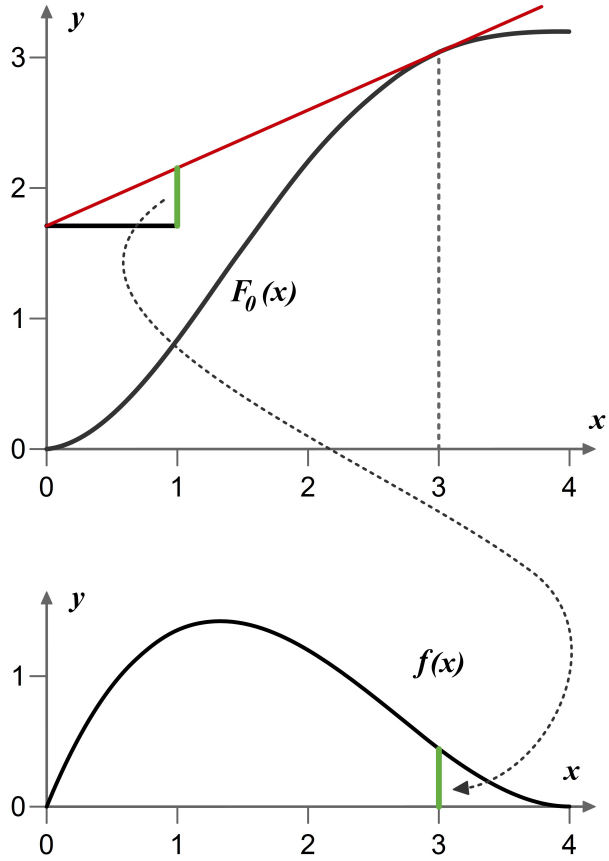

Abb. 4 Steigung der Flächeninhaltsfunktion bei $x = 3$

Warum ist das so?

Betrachten wir zunächst, wie die Funktionswerte der Ausgangsfunktion ***f(x)*** etwas mit der Steigung der Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$ zu tun haben.

Im nächsten Schaubild sehen wir, wie die Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$ z. B. im roten Bereich stärker steigt als im orangefarbigen Bereich. Das ist so, weil die Funktionswerte der Ausgangsfunktion ***f(x)*** im roten Bereich größer sind und deshalb zwischen $x = 1$ und $x = 2$ mehr Fläche hinzu kommt als im orangefarbigen Bereich zwischen $x = 3$ und $x = 4$, wo die Funktionswerte von ***f(x)*** kleiner sind.

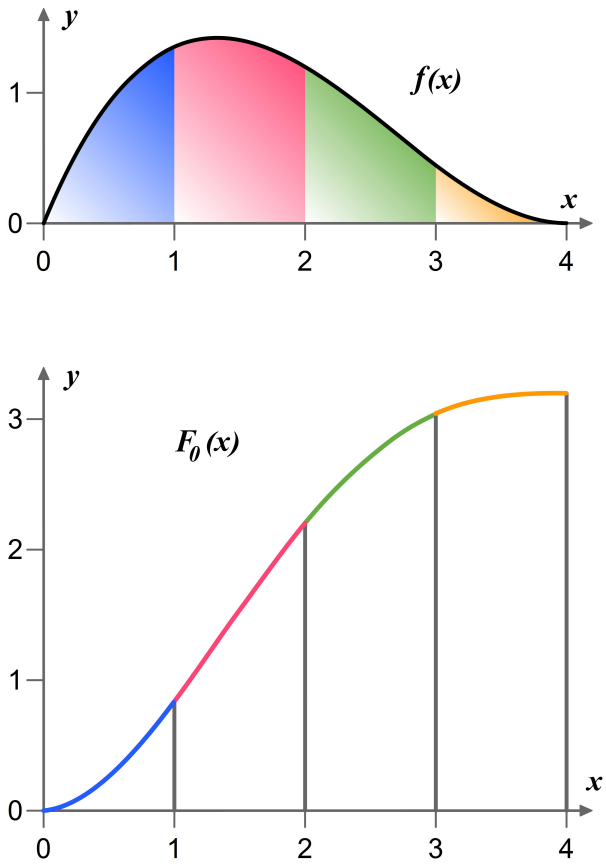

Abb. 5 Funktionswerte von $f(x)$ und Steigungen von $F_0(x)$

Wir sehen also: Je größer die Steigung der Flächeninhaltsfunktion $F_0(x)$ ist, desto größer müssen auch die Funktionswerte von $f(x)$ sein.

Wir könnten es nun damit bewenden lassen und stolz darauf sein, den großen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf eine geradezu vulgär einfache Idee zurückgeführt zu haben. Doch wir wollen noch weiter gehen und uns anschaulich klar machen, wie die Steigung der Flächeninhaltsfunktion $F_0(x)$ an jeder Stelle tatsächlich exakt so groß sein muss wie der Funktionswert von $f(x)$.

Um das ganz genau sehen zu können, definieren wir eine stückweise konstante Funktion $k(x)$ mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt der blauen Flächen unter dem Graphen von $f(x)$ genauso groß sein soll wie der Flächeninhalt der blauen Fläche unter dem Graphen von $k(x)$. Das gleiche soll auch für die andersfarbigen Flächen gelten.

Weil die Funktion $k(x)$ auf dem Intervall $(0;1)$ konstant ist, hat die Flächeninhaltsfunktion $K_0(x)$ auf diesem Intervall eine konstante Steigung. Das gleiche gilt auch für alle anderen Intervalle, auf denen $k(x)$ konstant ist.

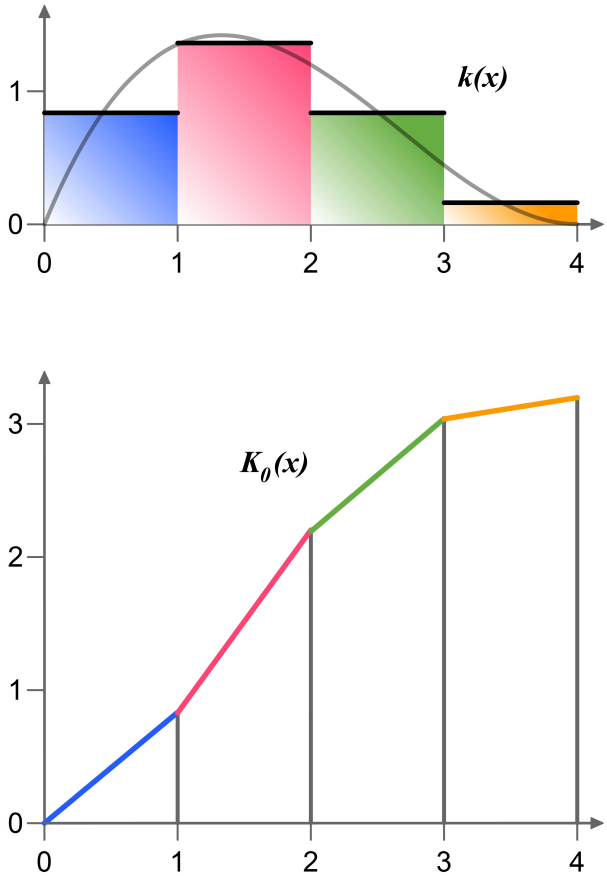

Abb. 6 Funktion und Flächeninhaltsfunktion

Und jetzt kommt der entscheidende Gedanke: Die Fläche des blauen Rechtecks unter dem Graphen von ***k(x)*** berechnen wir mit *Höhe mal Breite*. Weil die Breite gleich 1 ist, ist die Höhe des Rechtecks exakt gleich dem Wert des Flächeninhalts. In diesem Fall gleich 0,8375.

Der Funktionswert der Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{K_0(x)}$ ist bei $x = 1$ gleich dem Flächeninhalt des blauen Rechtecks - also gleich 0,8375. Die Steigung der Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{K_0(x)}$ auf dem Intervall $(0;1)$ ist gleich: *vertikale blaue Strecke* ***v*** *durch horizontale schwarze Strecke* ***h***, also gleich $0,8375 : 1$ und damit gleich $0,8375$ - also exakt gleich dem Funktionswert der Funktion ***k(x)*** auf diesem Intervall!

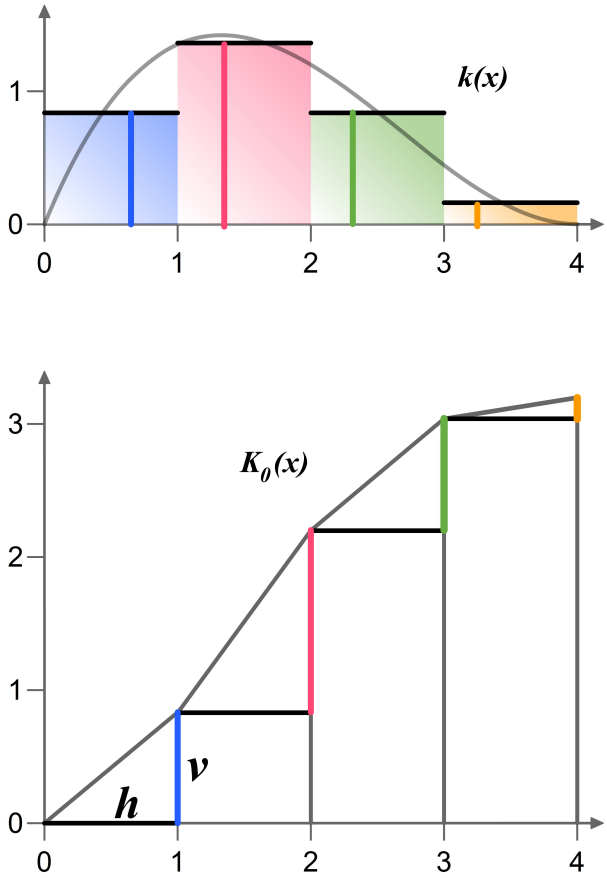

Abb. 7 Stückweise konstante Funktion ***k(x)*** und stückweise lineare Flächeninhaltsfunktion $K_0(x)$

Das gleiche gilt auch für die anderen farblich markierten Intervalle.

Nun haben wir zwar nicht den Hauptsatz in seiner ganzen Allgemeinheit anschaulich bewiesen, aber wir haben eine sehr simple Idee gefunden, die deutlich macht, warum die Funktionswerte der Ausgangsfunktion genau so groß sein müssen wie Steigungen der Flächeninhaltsfunktion - zumindest für eine stückweise konstante Funktion ***k(x)***, die so ähnlich ist wie ***f(x)***.

Wenn wir unsere Überlegungen auf alle möglichen stückweise konstanten Funktionen ausweiten, haben wir sogar eine anschauliche Erklärung des Hauptsatzes für solche Funktionen, die der Ausgangsfunktion ***f(x)*** beliebig nahe kommen können.

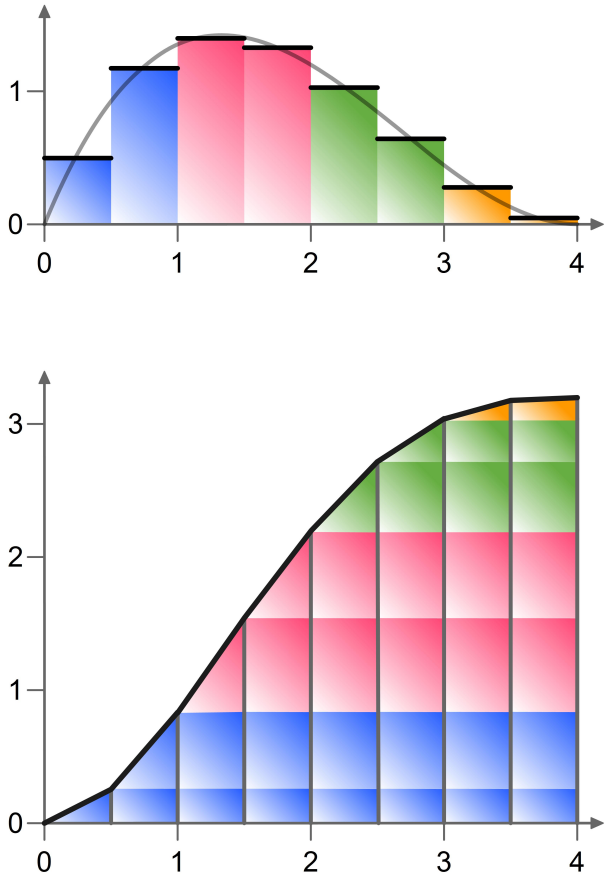

Abb. 8 Feinere Einteilung