Das Standardmodell

Das aufstellen von Zahlen

Wir können die Zahlen, die normalerweise auf der Zahlengerade einfach so herumliegen,

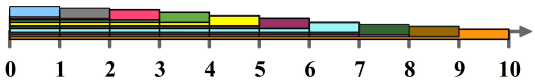


Abb. 1 Auf der Zahlengerade herumliegende Zahlen

aufstellen und sie damit sichtbar machen. Die oberen Enden der Zahlen liegen dann auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x$.

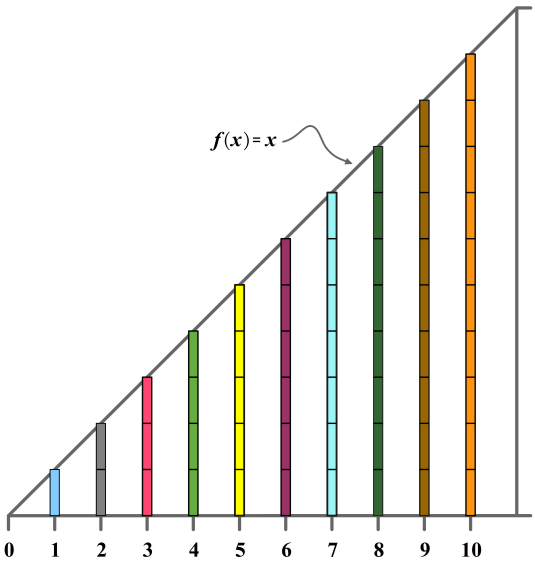


Abb. 2 Zahlen aufstellen mit proportionaler Funktion $f(x) = x$

Wenn wir uns vorstellen wollen, wie es aussieht, wenn diese Zahlen durch 2 geteilt werden, können wir den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ einzeichnen. Die Hälften der Zahlen liegen dann auf diesem Funktionsgraphen.

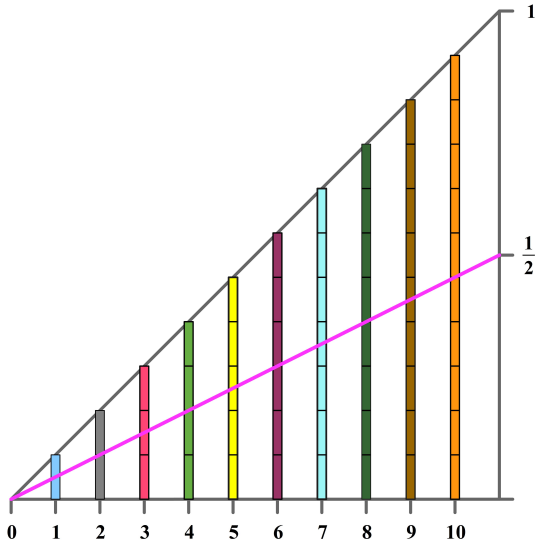


Abb. 3 Durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ halbierte Zahlen

Verwenden wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$, können wir alle Zahlen graphisch durch 3 teilen. Mit dem Schaubild lassen sich viele Zusammenhänge entdecken. Z. B.: Die Ergebnisse erhöhen sich von Zahl zu Zahl um jeweils $\frac{1}{3}$. Das sieht man an $6:3=2$, $7:3=2\frac{1}{3}$, $8:3=2\frac{2}{3}$ usw. Begründen lässt sich das z. B. damit, dass die Funktionswerte der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$ pro Einheit auf der x-Achse um $\frac{1}{3}$ wächst.

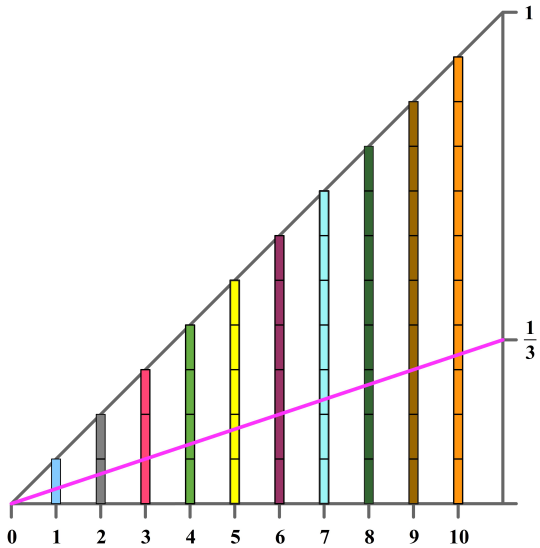


Abb. 4 Durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x$ gedrittelte Zahlen

Diesen Zusammenhang am Schaubild zu sehen, ist ziemlich einfach. Aber ohne

Schaubild würde wohl kaum ein Schüler auf der Frage nach 8 : 3 auf das Ergebnis $2\frac{2}{3}$ mit der Begründung kommen, dass das Ergebnis um $\frac{1}{3}$ kleiner sein muss als das Ergebnis von 9 : 3.

Diese Überlegungen lassen sich auch auf andere Zahlen und Rechnungen übertragen. Es ist z. B. $17 : 7 = 2\frac{3}{7}$, weil 17 um 3 größer ist als 14 und $14 : 7 = 2$ ist.

Mit diesem Modell des Zahlen-Aufstellens können wir auch die Zahlen sichtbar machen, die sich auf dem Intervall von 0 bis 1 befinden. Das sind z. B. Brüche, deren Werte nun ganz gut vergleichbar sind. Dabei sieht man auch, dass Brüche wie $\frac{18}{25}$ nicht unbedingt groß sein müssen, nur weil die Zahlen im Zähler und im Nenner „groß“ sind.

Es kann für Schüler hilfreich sein, einen Ort zu haben, an dem sie einen Bruch gedanklich fixieren können. Hat man zusätzlich noch die Drittel, Viertel und Fünftel im Dreieck positioniert, fallen die Größenvergleiche sehr leicht.

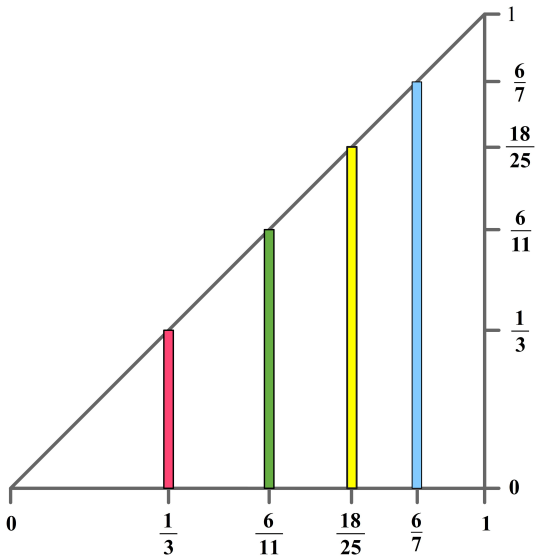
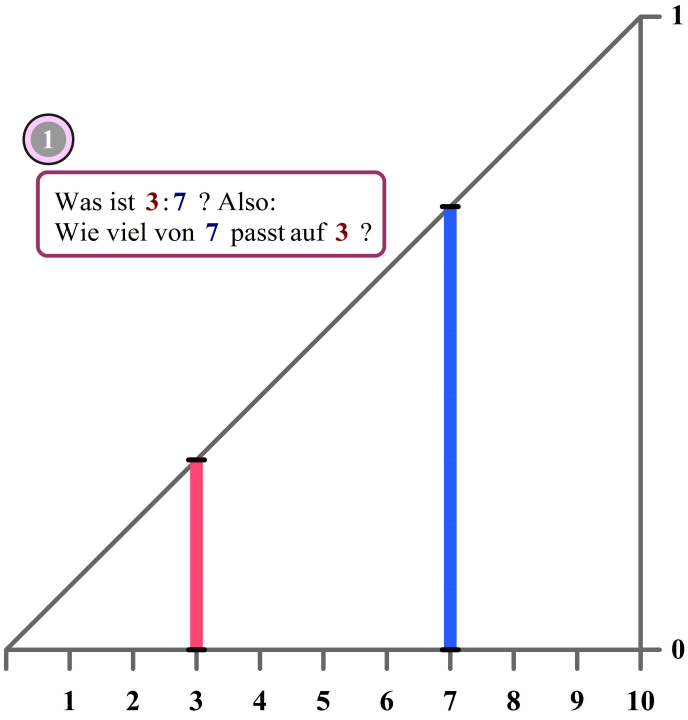
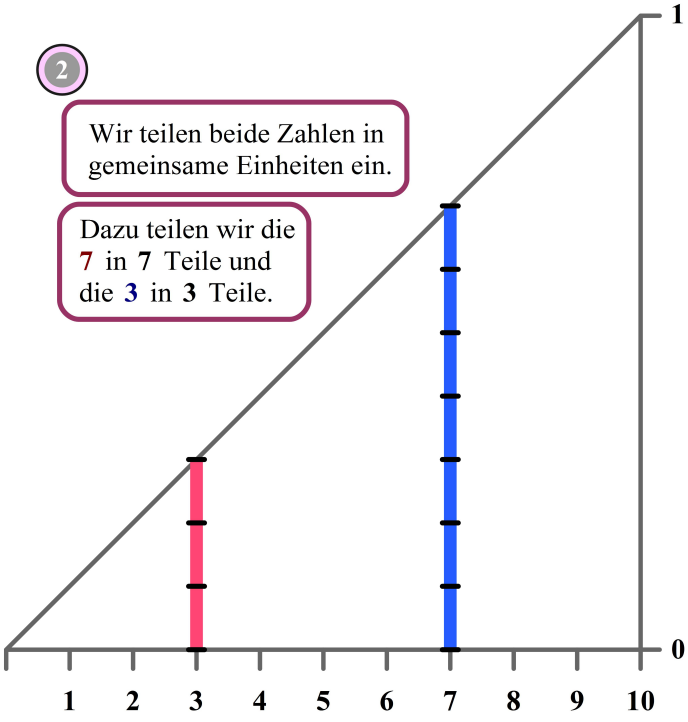


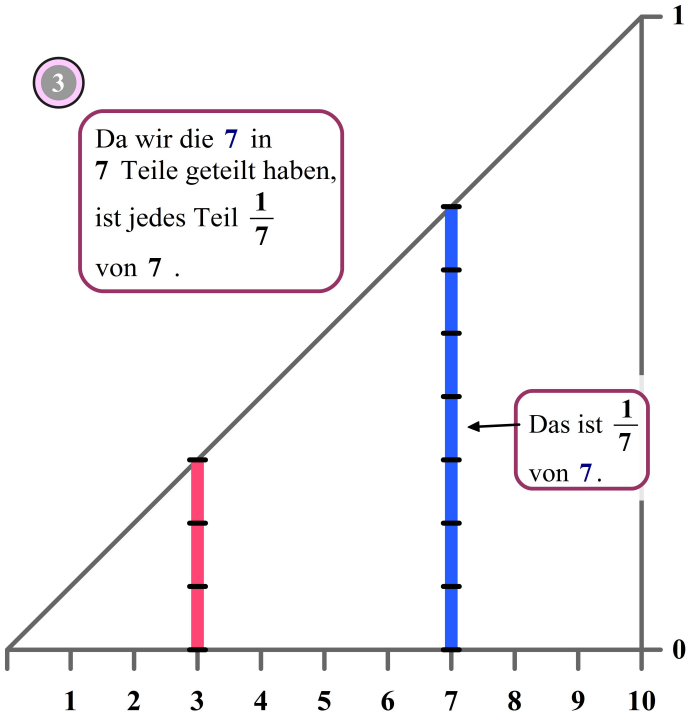
Abb. 5 Brüche aufstellen

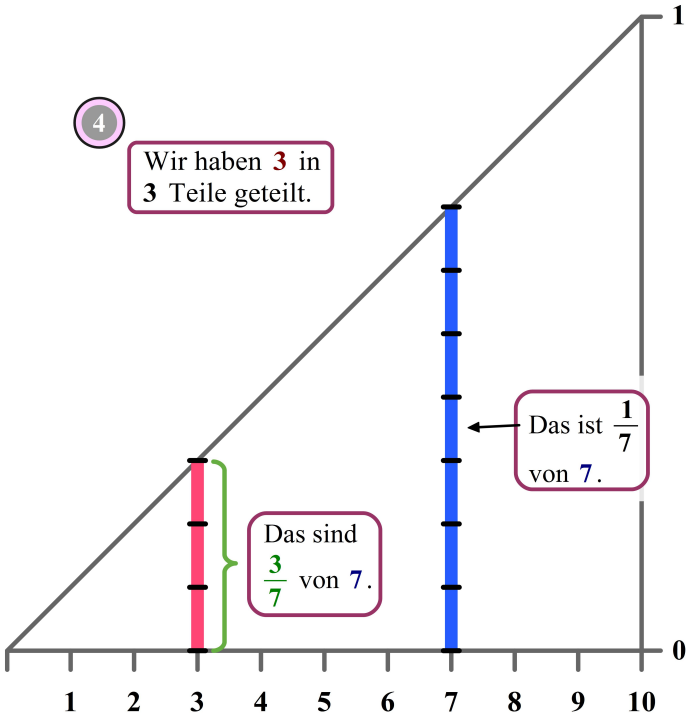
Beliebige ganze Zahlen dividieren

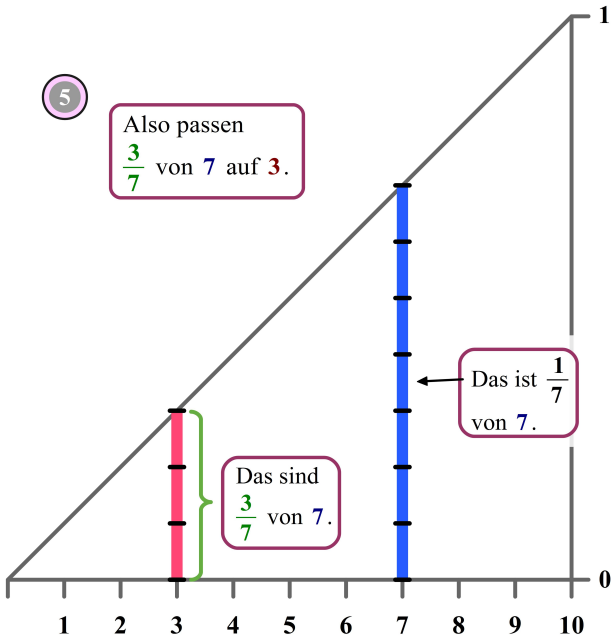
Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, das dividieren von Zahlen zu verstehen. Die eine ist das Konzept des Messens: Wenn wir 12 : 3 rechnen, nehmen wir die 3 als Einheit und überlegen uns, wie oft diese Einheit auf die 12 passt. Wir beantworten also die Frage: Wie oft passt 3 auf 12? Das funktioniert dann am besten, wenn eine große Zahl durch eine kleine Zahl geteilt wird. Wie aber können wir uns z. B. 3 : 7 vorstellen? Dann müssen wir die Frage ändern: Wie viel von 7 passt auf 3?


1
Was ist 3 : 7 ? Also:
Wie viel von 7 passt auf 3 ?
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

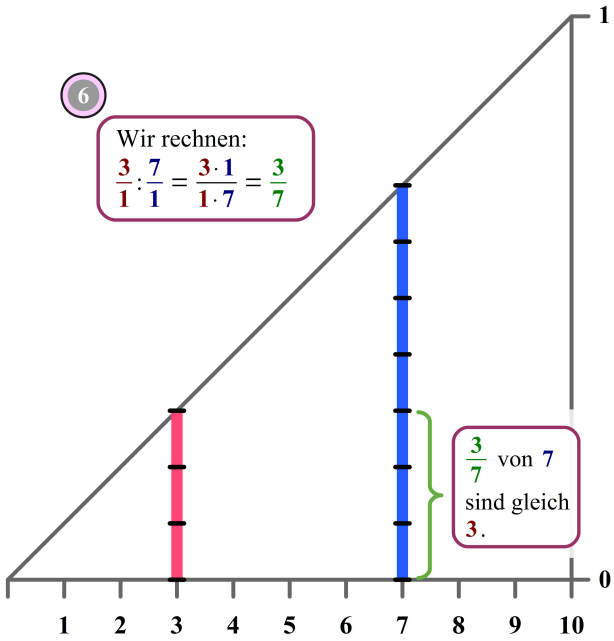

2
Wir teilen beide Zahlen in
gemeinsame Einheiten ein.
Dazu teilen wir die
7 in 7 Teile und
die 3 in 3 Teile.
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


3
Da wir die 7 in 7 Teile geteilt haben, ist jedes Teil $\frac{1}{7}$ von 7 .
Das ist $\frac{1}{7}$ von 7 .
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


4
Wir haben 3 in 3 Teile geteilt.
Das ist $\frac{1}{7}$ von 7 .
Das sind $\frac{3}{7}$ von 7 .
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

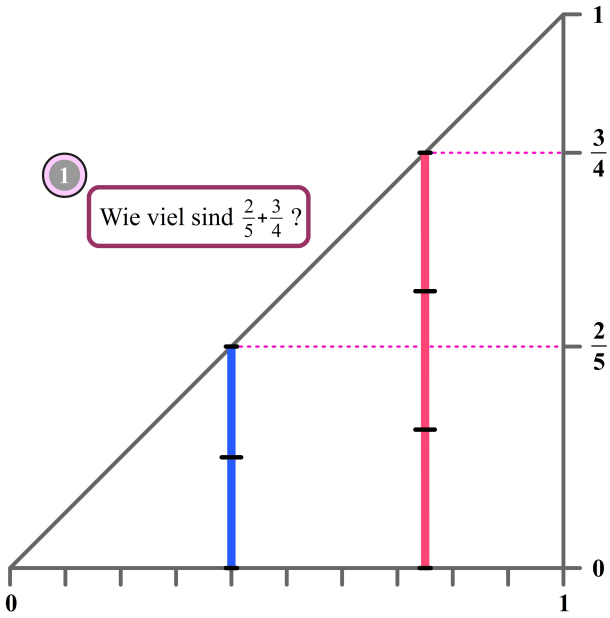


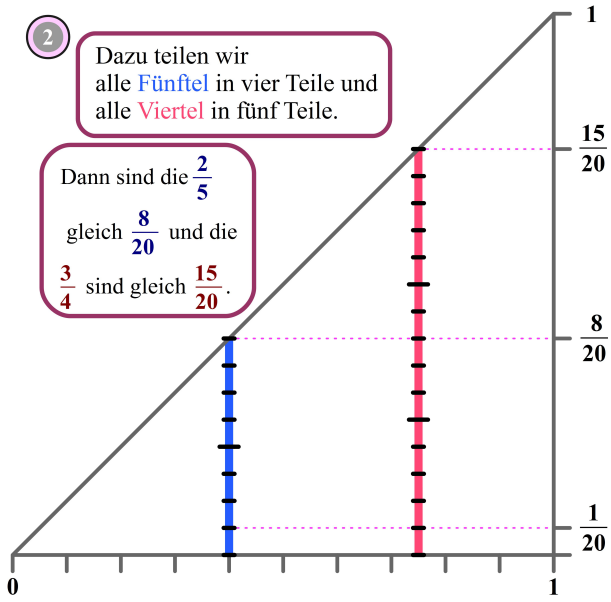
Und hier sieht man zum ersten Mal, dass diese Methode auch auf das Dividieren von Brüchen und eine anschauliche Begründung der Kehrwertregel hinausläuft.



Addieren und subtrahieren von Brüchen

Bevor das Teilen von Brüchen besprochen wird, schauen wir uns die erste Operation an, die man (nach dem Kürzen und Erweitern) gemeinhin mit Brüchen ausführt: das Addieren und das Subtrahieren.



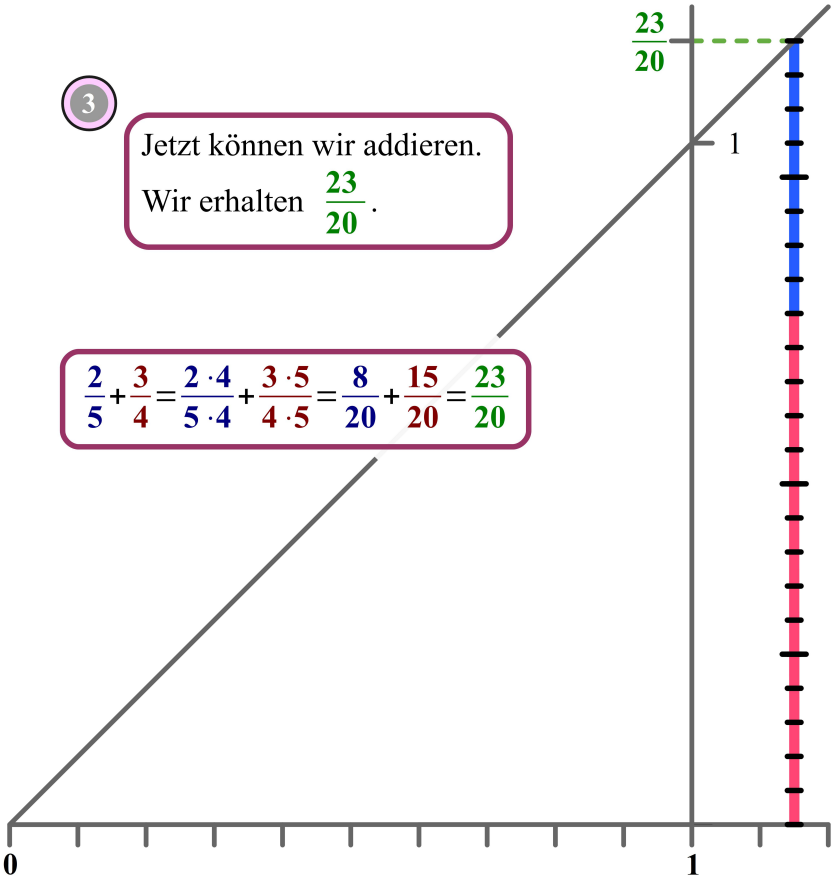


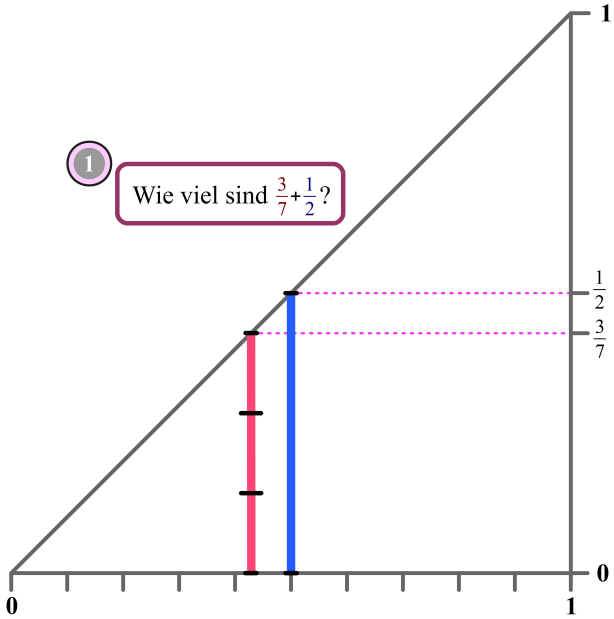
3

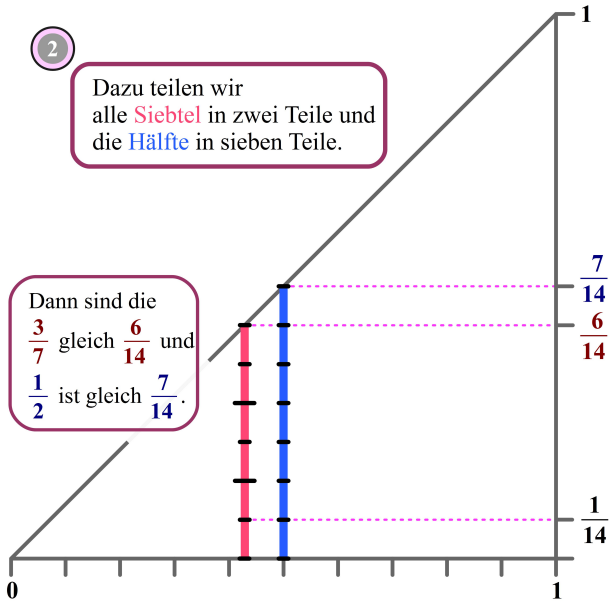
Jetzt können wir addieren.

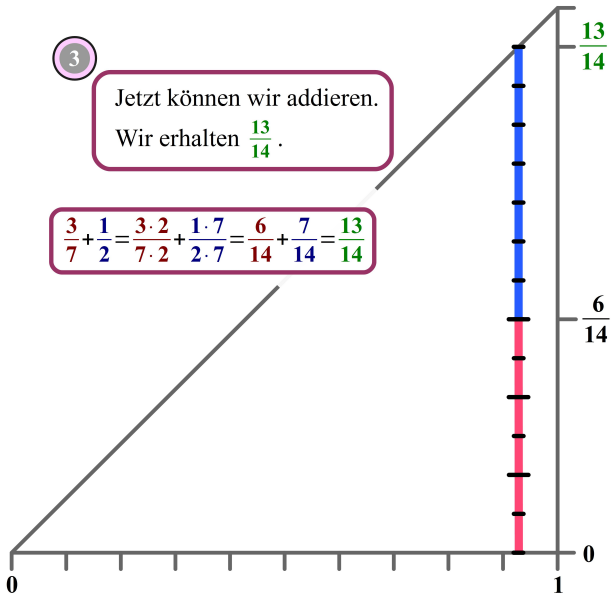
Wir erhalten $\frac{23}{20}$.

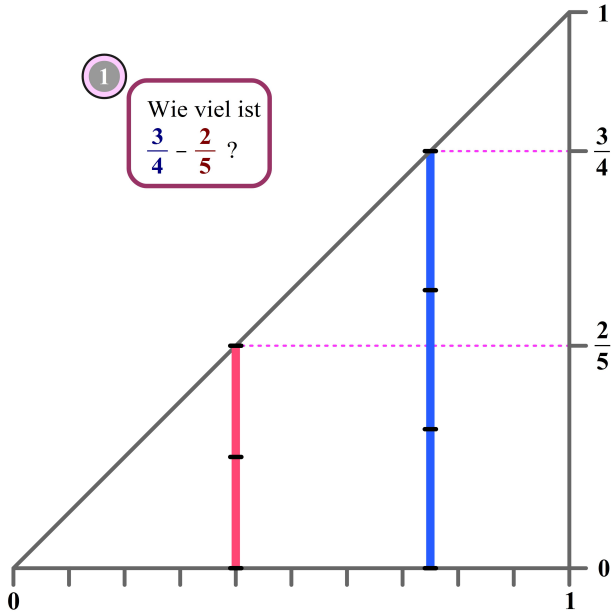
$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}$$

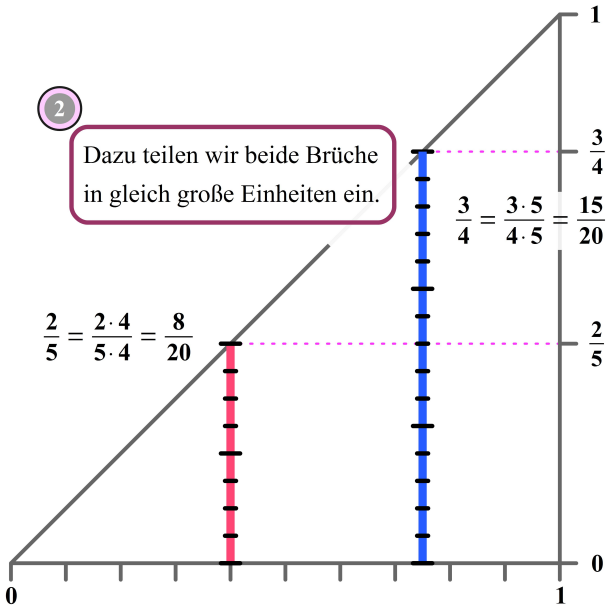


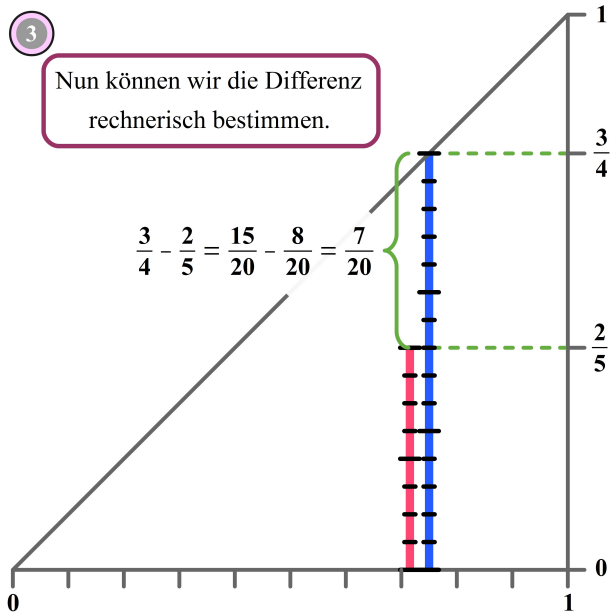

1
Wie viel sind $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$?
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{7}$
0
0
1


2
Dazu teilen wir
alle Siebtel in zwei Teile und
die Hälfte in sieben Teile.
Dann sind die
$\frac{3}{7}$ gleich $\frac{6}{14}$ und
$\frac{1}{2}$ ist gleich $\frac{7}{14}$.
1
$\frac{7}{14}$
$\frac{6}{14}$
$\frac{1}{14}$
0
1


3
Jetzt können wir addieren.
Wir erhalten $\frac{13}{14}$.
$\frac{3}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{6}{14}+\frac{7}{14}=\frac{13}{14}$
$\frac{13}{14}$
$\frac{6}{14}$
0
0
1


1
Wie viel ist
$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$?
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{5}$
0
0
1

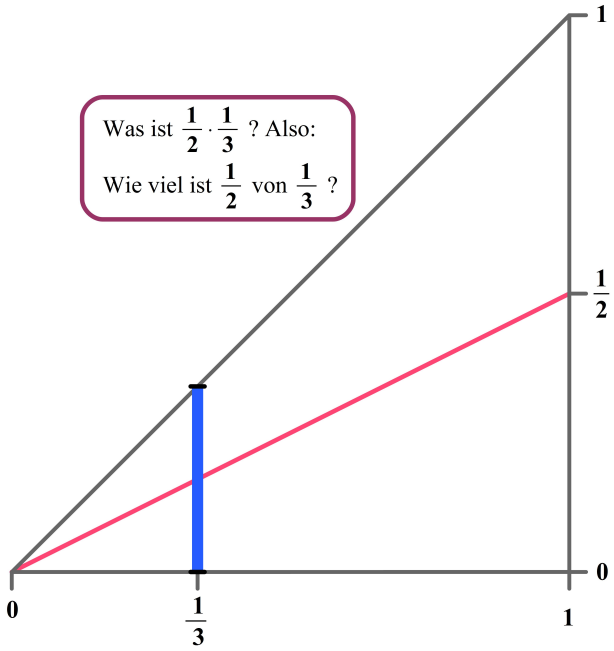


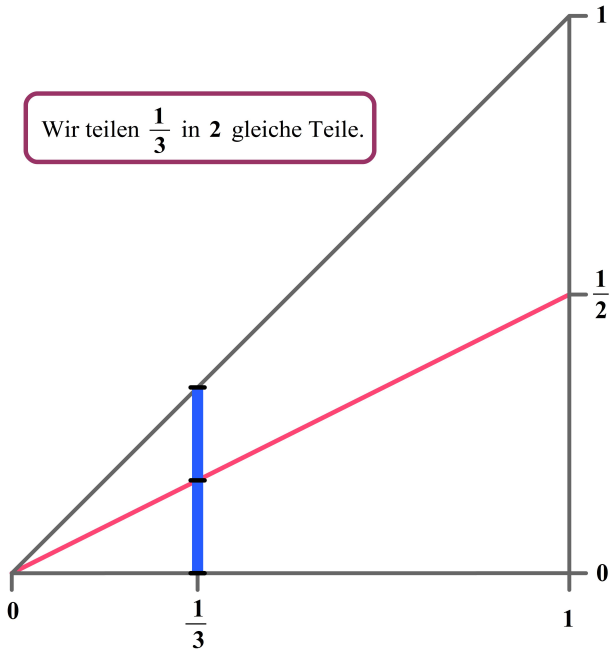


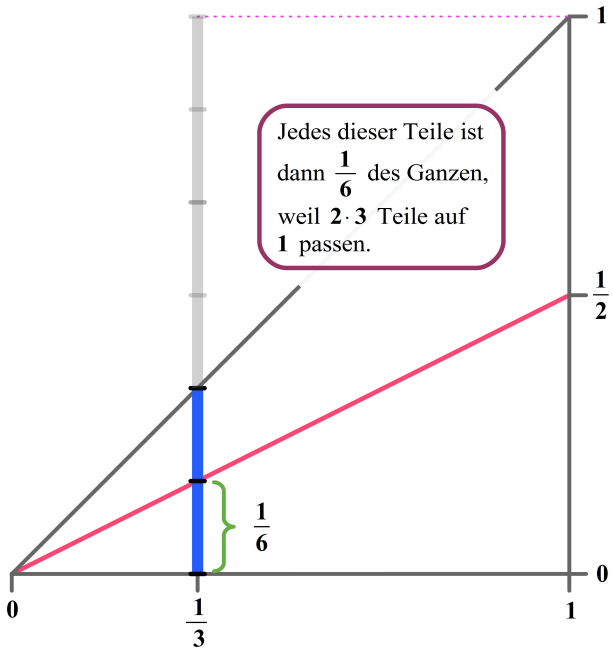
Multiplizieren von Brüchen

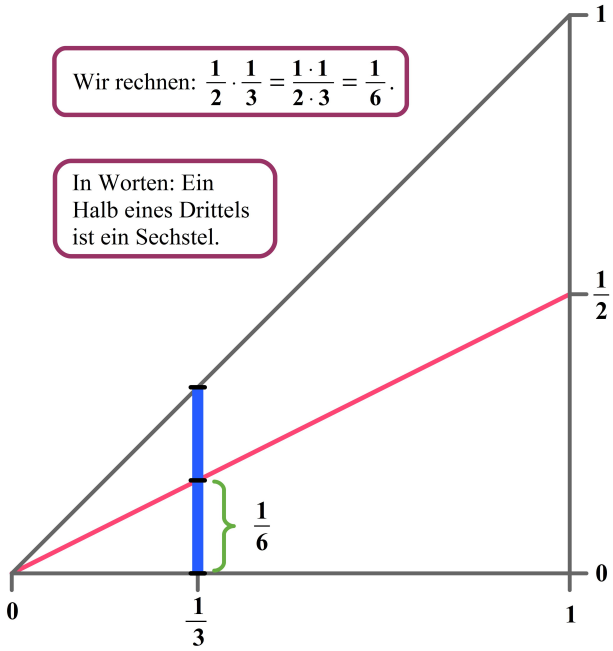
Mit diesem Standardmodell können wir problemlos Brüche mit Brüchen multiplizieren. Schülern fällt es manchmal schwer, die verschiedenen Rollen, die die beiden Brüche beim Multiplizieren haben, auseinanderzuhalten. In diesem Modell kann das aber nicht passieren, weil nur ein Bruch im Dreieck platziert wird und der andere

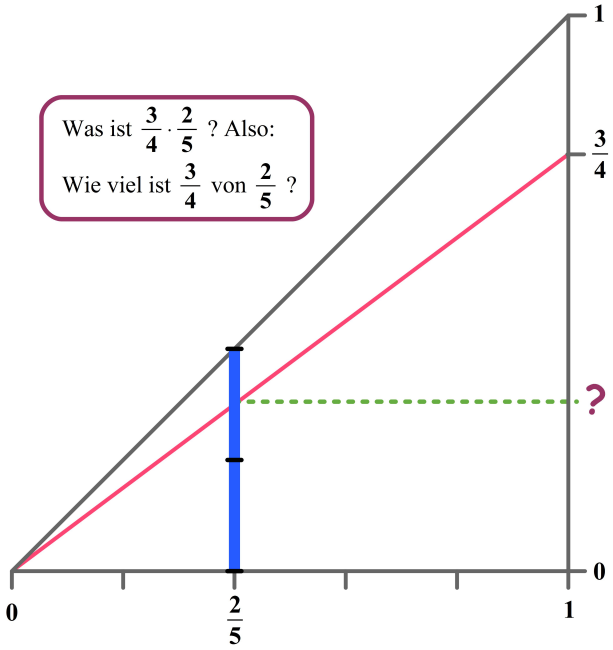
Bruch als lineare Funktion auftritt.

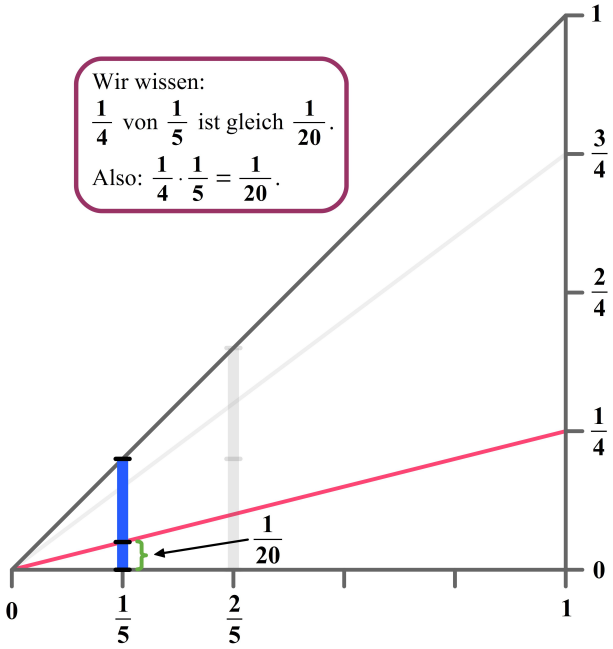


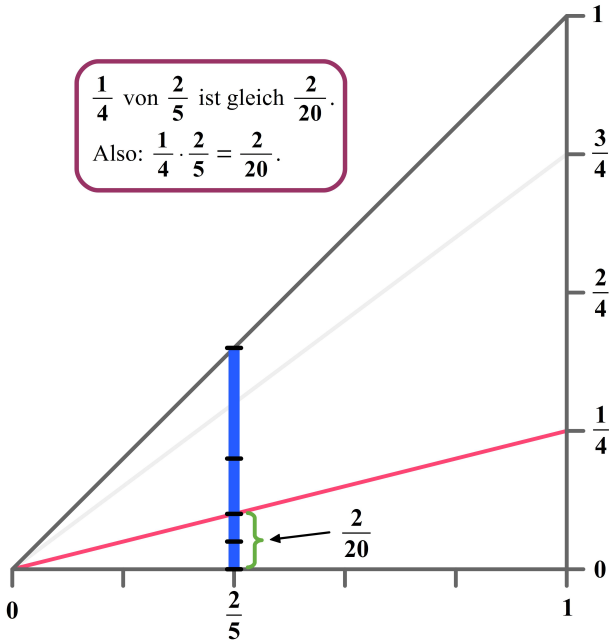


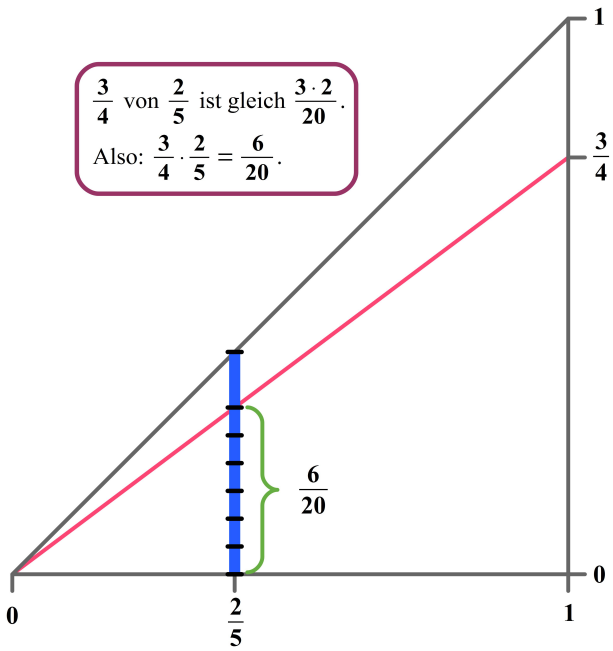

Jedes dieser Teile ist dann $\frac{1}{6}$ des Ganzen, weil $2 \cdot 3$ Teile auf 1 passen.
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}$
0
0
$\frac{1}{3}$
1

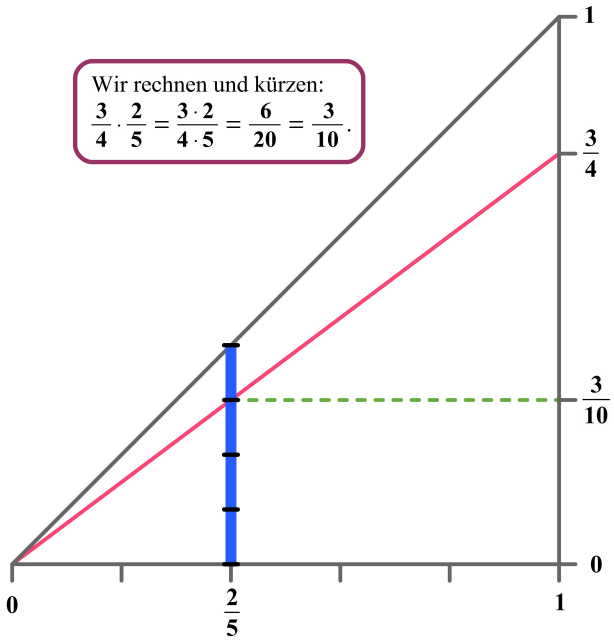

Wir rechnen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$.
In Worten: Ein Halb eines Drittels ist ein Sechstel.
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}$
0
0
$\frac{1}{3}$
1


Was ist $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$? Also:
Wie viel ist $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$?
1
$\frac{3}{4}$
?
0
0
$\frac{2}{5}$
1


Wir wissen:
$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{5}$ ist gleich $\frac{1}{20}$.
Also: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{20}$
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$
1


$\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{5}$ ist gleich $\frac{2}{20}$.
Also: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$.
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$
0
$\frac{2}{20}$
0
$\frac{2}{5}$
1


$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ ist gleich $\frac{3 \cdot 2}{20}$.
Also: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$.
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{6}{20}$
0
0
$\frac{2}{5}$
1

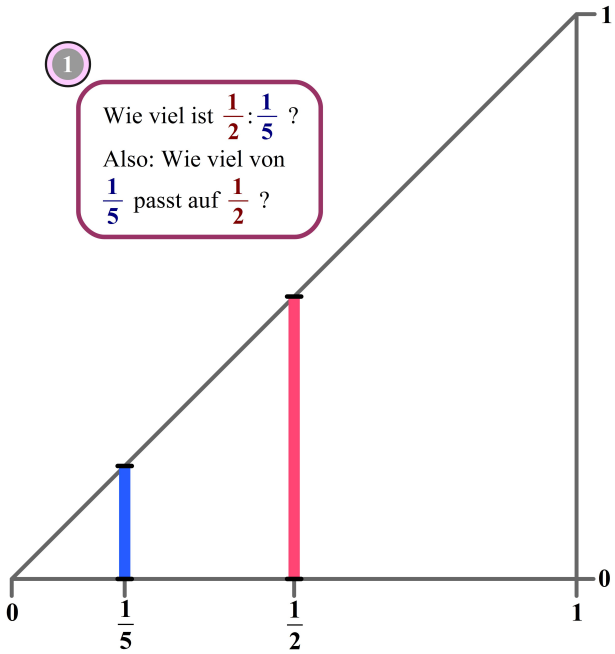


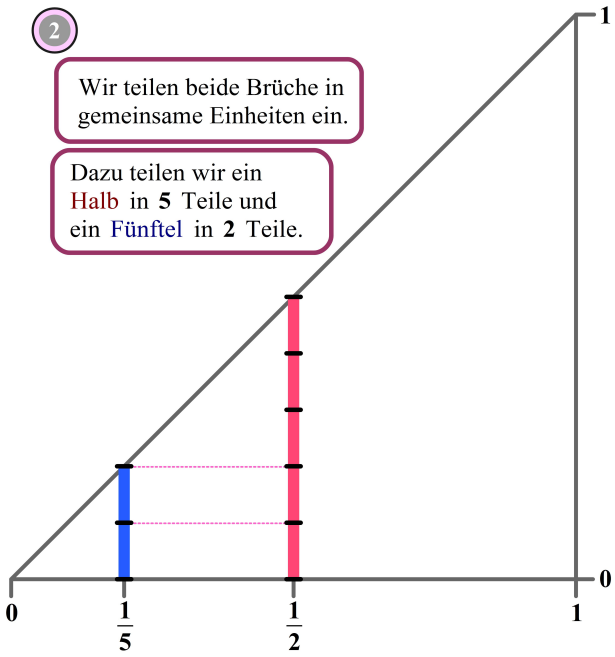
Dividieren von Brüchen durch Brüche

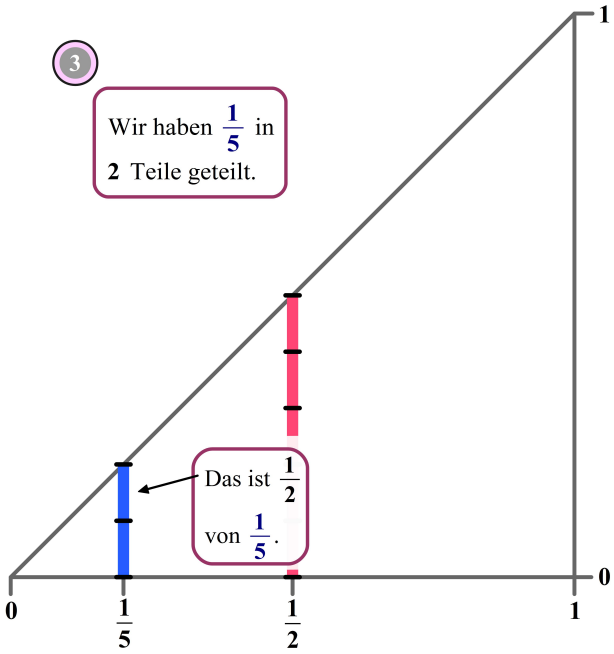
Die Königsdisziplin beim Rechnen mit Brüchen ist sicher das Teilen von Brüchen durch Brüche. Es ist sehr wichtig, sich dabei nicht nur auf den Formalismus zu verlassen, sondern die Sinnhaftigkeit der Kehrwertregel auch konkret und anschaulich zugänglich zu machen. Andernfalls verliert man an dieser Stelle gerade die Schüler, die sich für Mathematik interessieren und die sich bisher darüber freuten, dass Mathe so logisch und klar ist. Ohne eine ausführliche Anleitung zum graphischen Verständnis werden aber fast alle Schüler an der Verbildlichung dieser Regel scheitern.

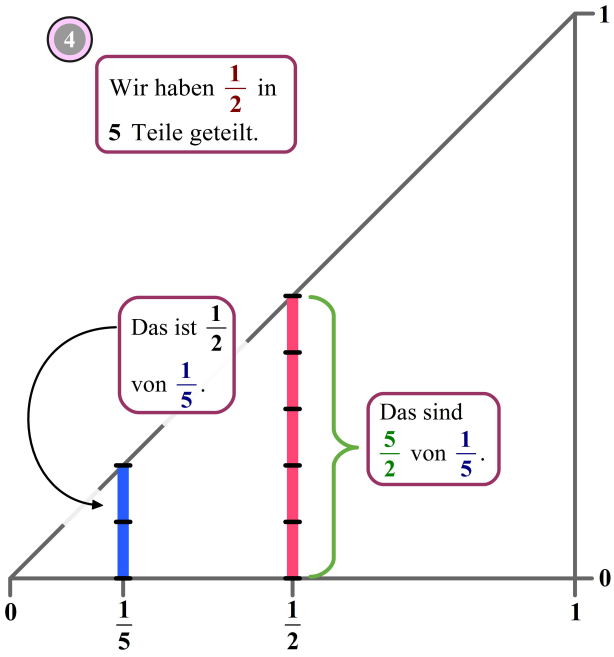
Erwachsenen Menschen fällt es mitunter schwer, sich in das graphische Teilen von Brüchen einzufinden, weil sie nicht erwarten, in Verbindung mit der Bruchrechnung etwas neues lernen zu müssen. Demgegenüber gehen Schüler damit meist unbedarfter um, weil sie es gewohnt sind, etwas neues zu lernen. Außerdem kennen sie das zentrale Element des graphischen Teilens von Brüchen schon von der Addition und der Subtraktion von Brüchen, nämlich das Einteilen der Brüche in gleich große Einheiten.

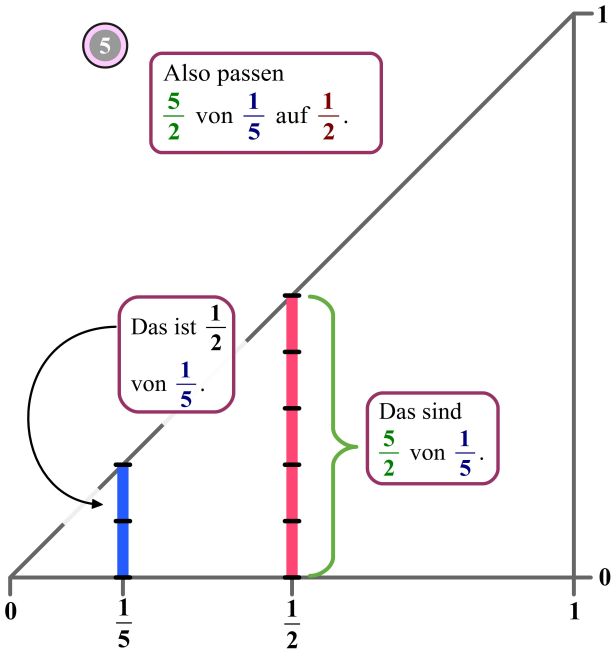
Entscheidend ist hier noch eine Vorüberlegung: Was bedeutet es, Brüche zu teilen? Wie schon oben kurz erwähnt können wir uns z. B. bei der Aufgabe $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ fragen: Wie viel von $\frac{1}{5}$ passt auf $\frac{1}{2}$?

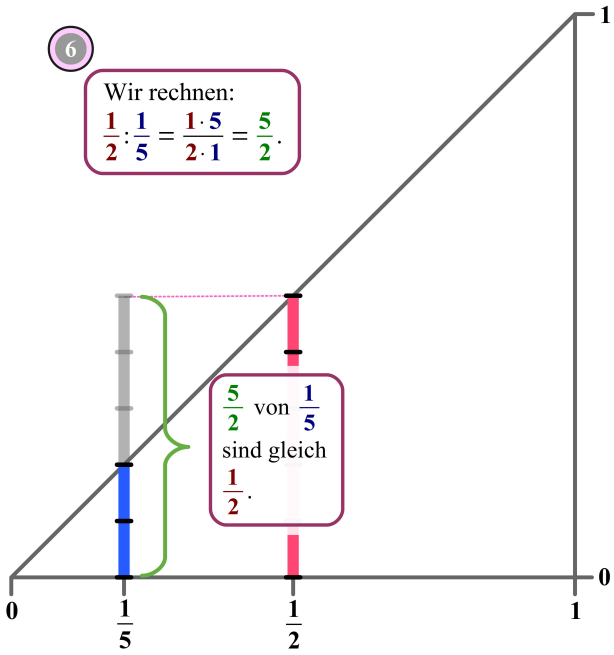

1
Wie viel ist $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$?
Also: Wie viel von $\frac{1}{5}$ passt auf $\frac{1}{2}$?
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

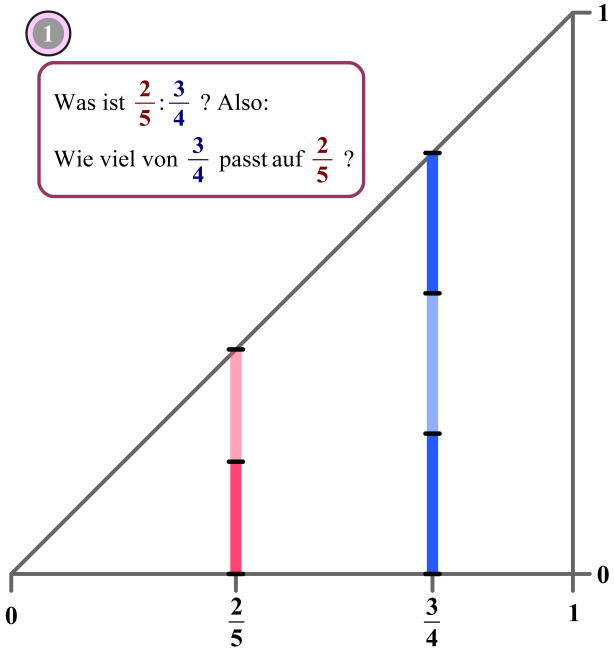

2
Wir teilen beide Brüche in gemeinsame Einheiten ein.
Dazu teilen wir ein Halb in **5** Teile und ein Fünftel in **2** Teile.
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

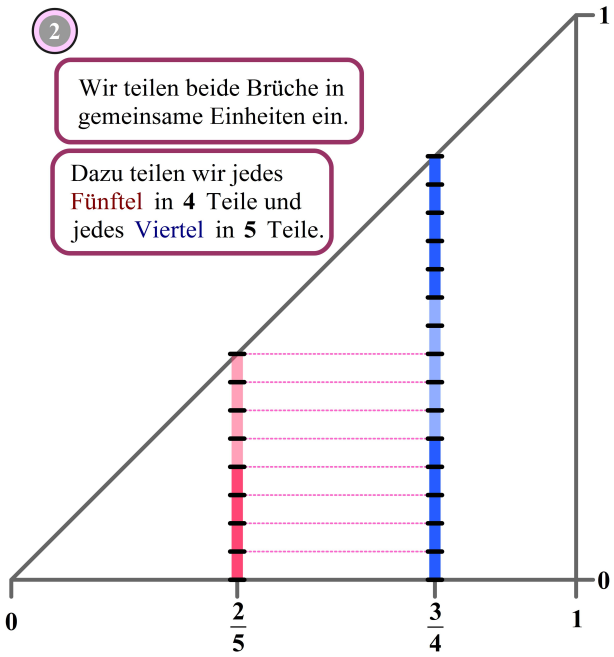

3
Wir haben $\frac{1}{5}$ in
2 Teile geteilt.
Das ist $\frac{1}{2}$
von $\frac{1}{5}$.
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

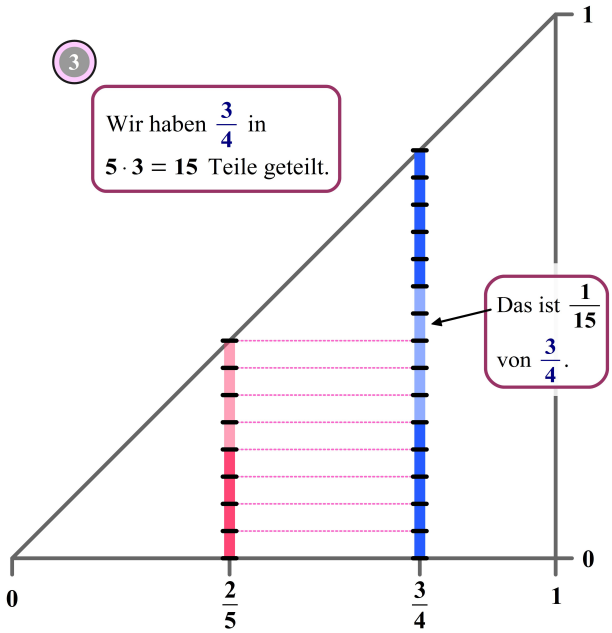

4
Wir haben $\frac{1}{2}$ in
5 Teile geteilt.
Das ist $\frac{1}{2}$
von $\frac{1}{5}$.
Das sind
$\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{5}$.
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

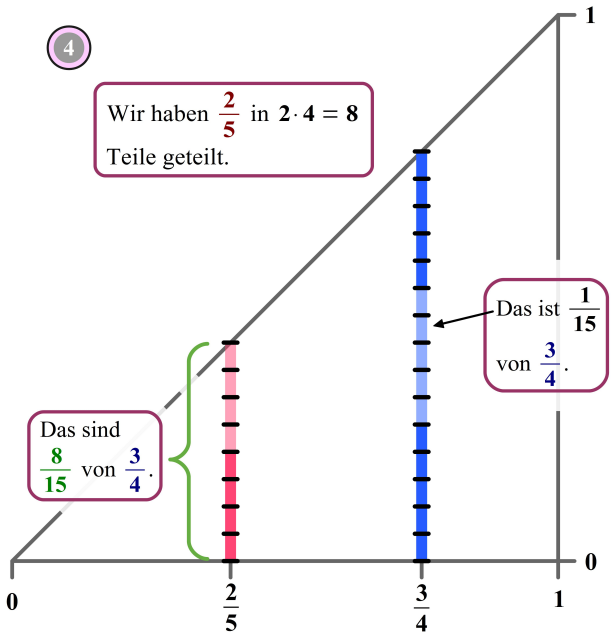

5
Also passen
$\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{5}$ auf $\frac{1}{2}$.
Das ist $\frac{1}{2}$
von $\frac{1}{5}$.
Das sind
$\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{5}$.
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

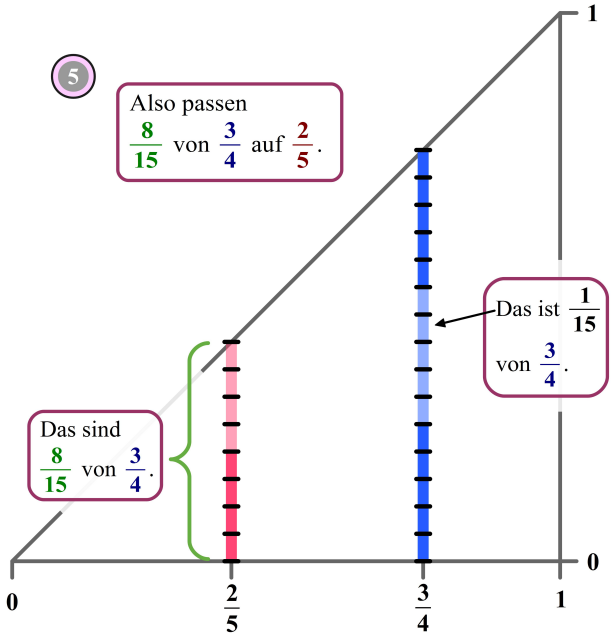

6
Wir rechnen:
$\frac{1}{2} : \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$.
$\frac{5}{2}$ von $\frac{1}{5}$
sind gleich
$\frac{1}{2}$.
1
0
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$
1

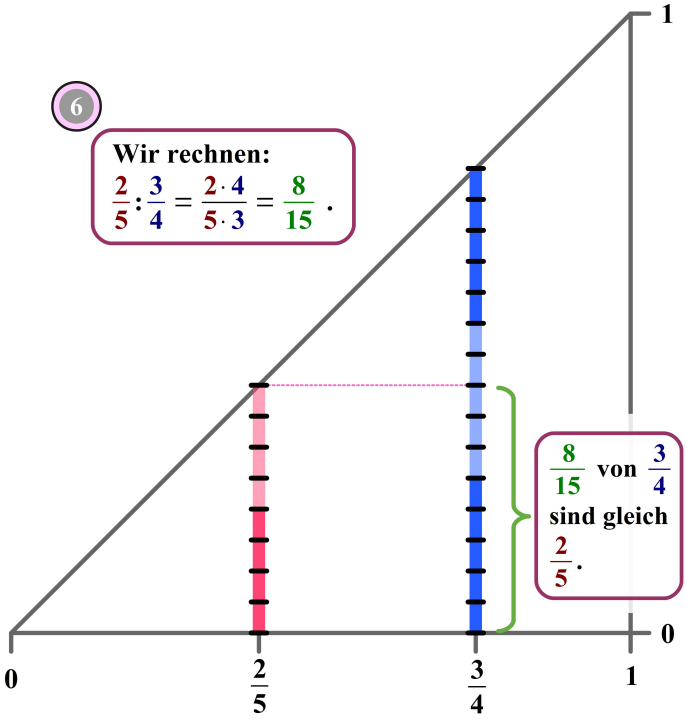

1
Was ist $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$? Also:
Wie viel von $\frac{3}{4}$ passt auf $\frac{2}{5}$?
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1


2
Wir teilen beide Brüche in gemeinsame Einheiten ein.
Dazu teilen wir jedes Fünftel in 4 Teile und jedes Viertel in 5 Teile.
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1


3
Wir haben $\frac{3}{4}$ in
$5 \cdot 3 = 15$ Teile geteilt.
Das ist $\frac{1}{15}$
von $\frac{3}{4}$.
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1

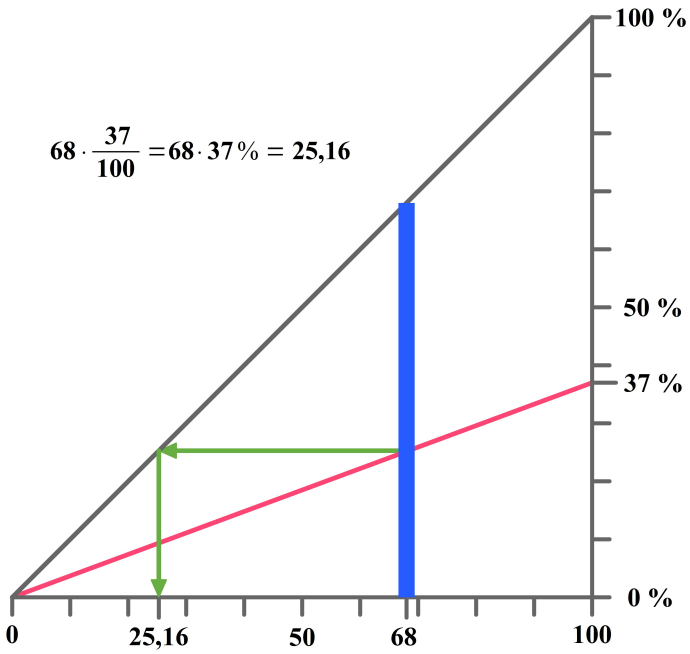

4
Wir haben $\frac{2}{5}$ in $2 \cdot 4 = 8$
Teile geteilt.
Das ist $\frac{1}{15}$
von $\frac{3}{4}$.
Das sind
$\frac{8}{15}$ von $\frac{3}{4}$.
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1


5
Also passen
$\frac{8}{15}$ von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{2}{5}$.
Das ist $\frac{1}{15}$
von $\frac{3}{4}$.
Das sind
$\frac{8}{15}$ von $\frac{3}{4}$.
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1

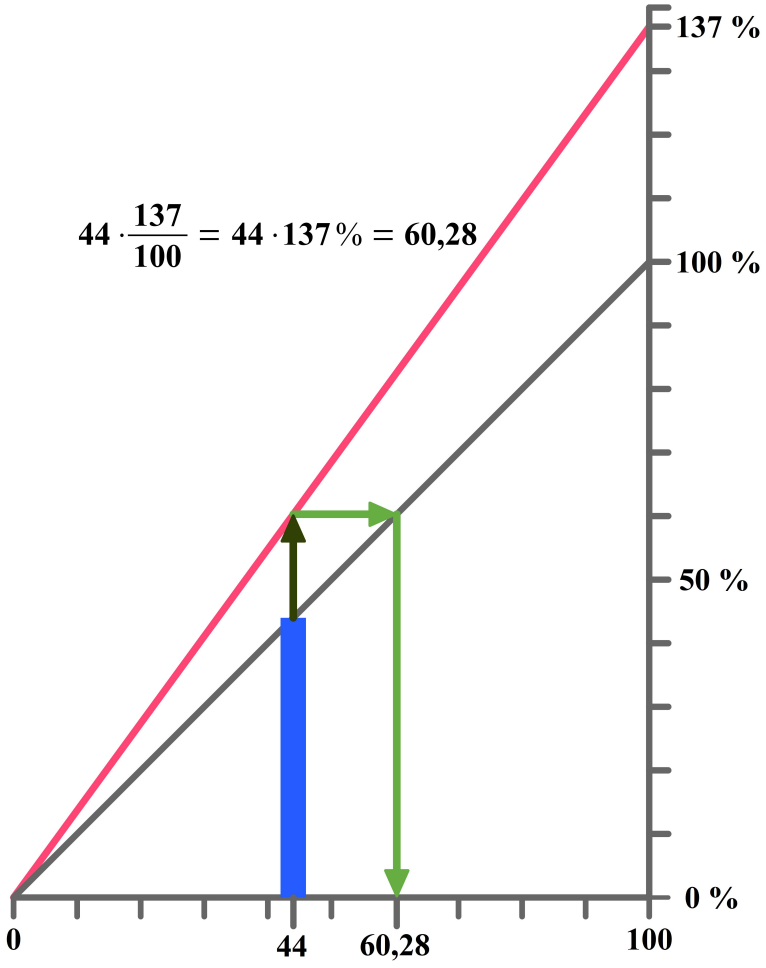

6
Wir rechnen:
$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$.
$\frac{8}{15}$ von $\frac{3}{4}$
sind gleich
$\frac{2}{5}$.
1
0
0
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{4}$
1

Prozentrechnung

Auch die Prozentrechnung hat in diesem Standardmodell ihren Platz. Dargestellt ist zunächst die Aufgabe: Wie viel sind 37% von 68? Auch wenn man zur genauen Bestimmung des Ergebnisses eine Rechnung braucht, trägt das Modell dazu bei, sich die Größenordnungen vorstellen zu können.

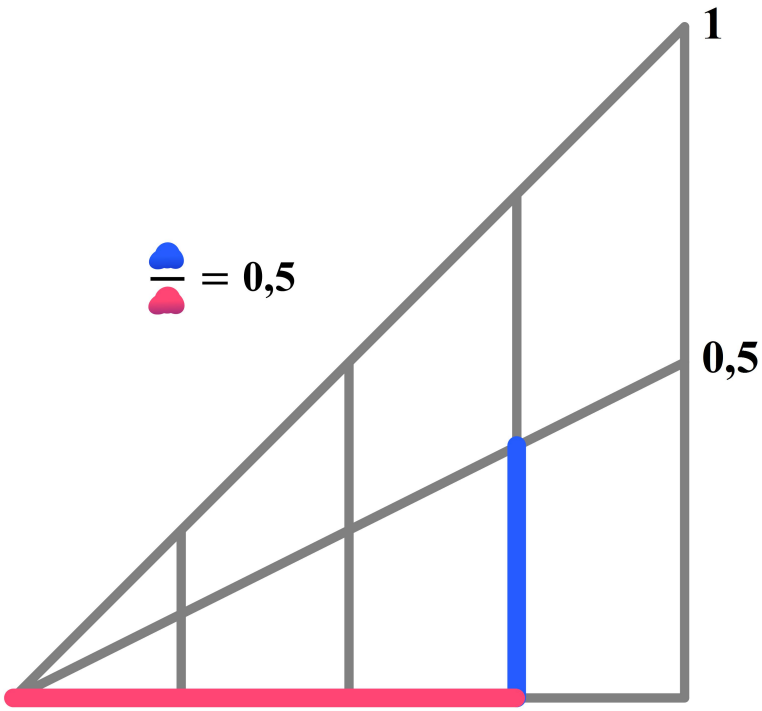


Mit der Aufgabe „137% von 44“ sehen wir im Modell einen schönen Zusammenhang zu den linearen Funktionen, denn jede Prozentangabe kann als eine solche Funktion dargestellt werden.



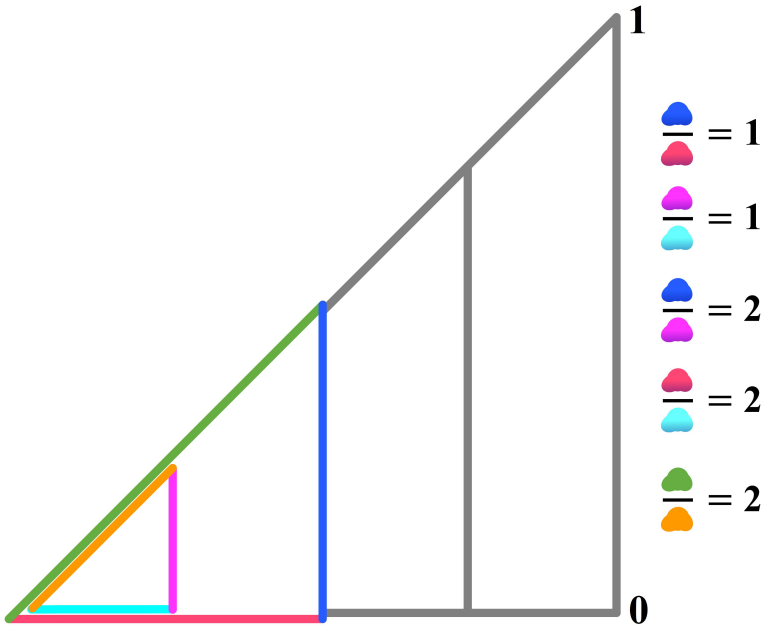
Steigunsdreiecke

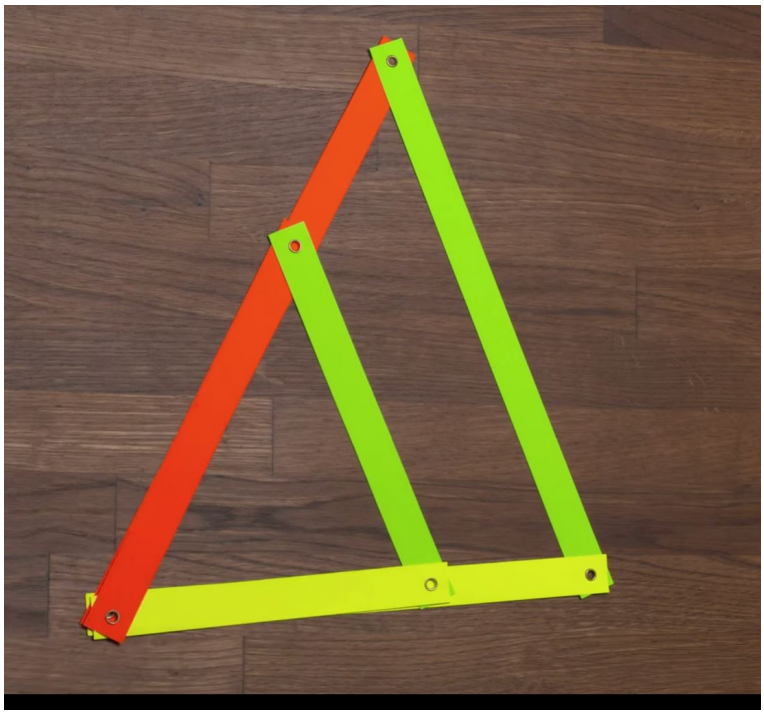
Da wir uns gedanklich ohnehin schon in einem Dreieck befinden, ist der Weg zum Steigungsdreieck nicht mehr weit. Deshalb sei dieses Thema hier nur anekdotisch an einem kleinen Beispiel dargestellt. Alle weiteren Anwendungen ergeben sich ohne Mühe aus dem aktuellen Unterrichtsgeschehen beim Besprechen von Steigungsdreiecken.

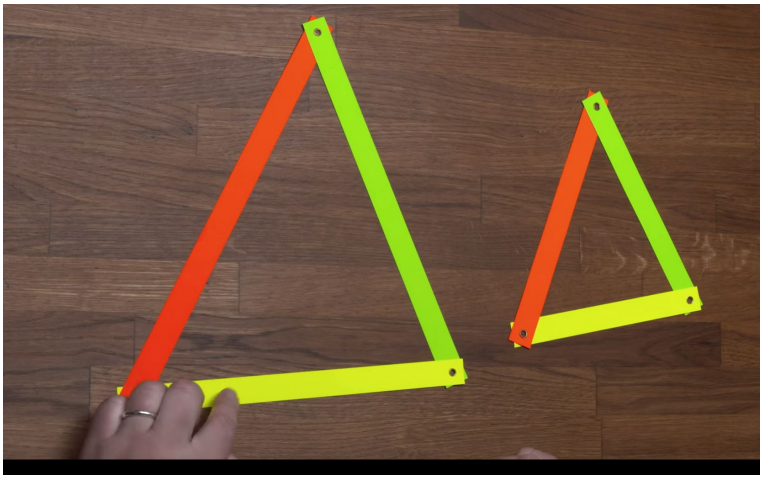


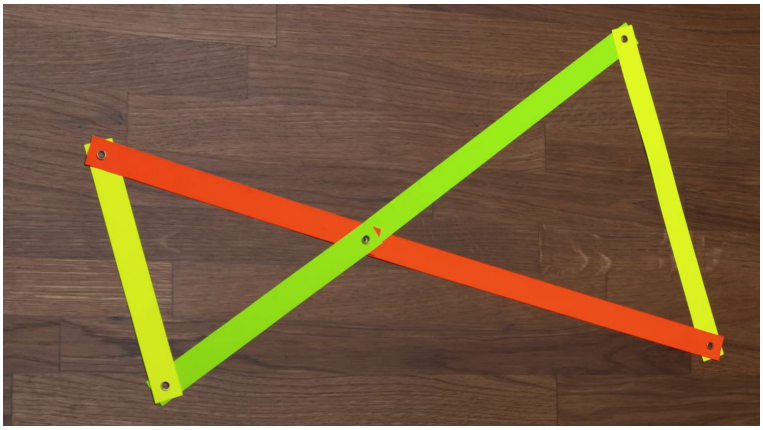
Strahlensätze

Aus der Systematik des Modells ergibt sich ebenso eine typische Strahlensatzfigur. Löst man die bunten Dreiecke aus dem Modell heraus, erhält man ähnliche Dreiecke aus denen dann alle weiteren Strahlensatzfiguren gelegt werden können.


1
0
= 1
= 1
= 2
= 2
= 2

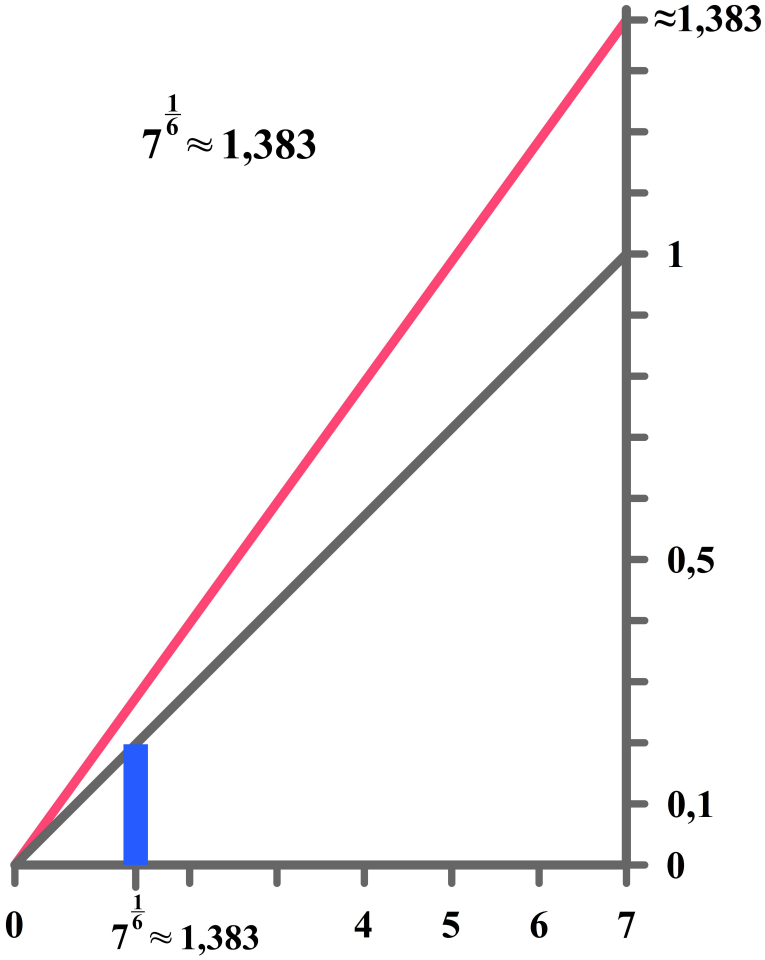


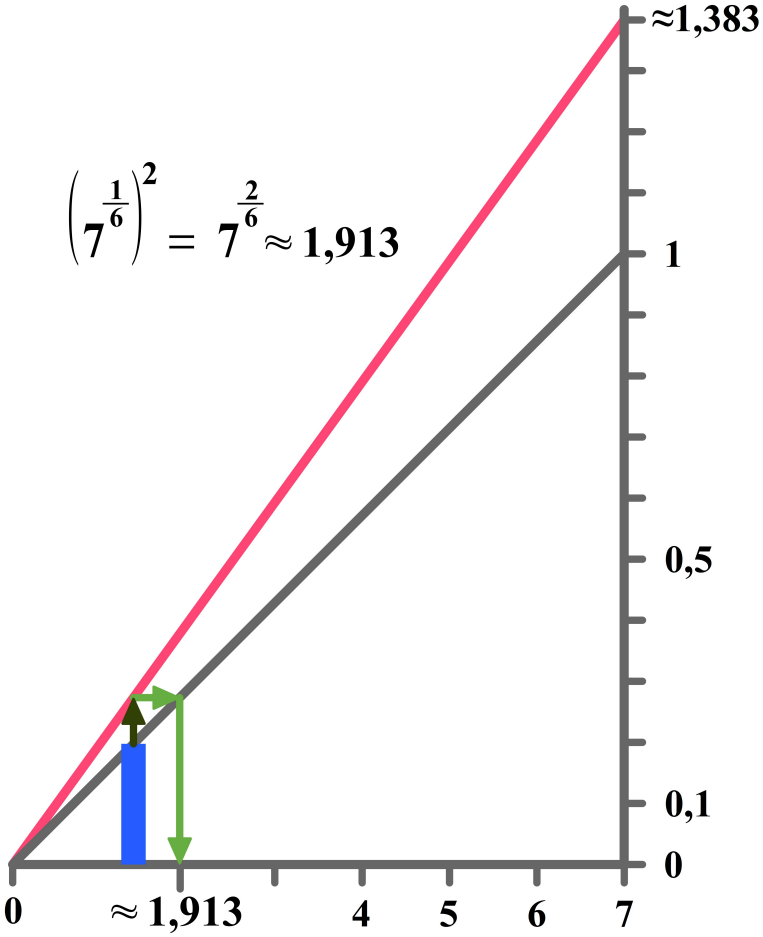


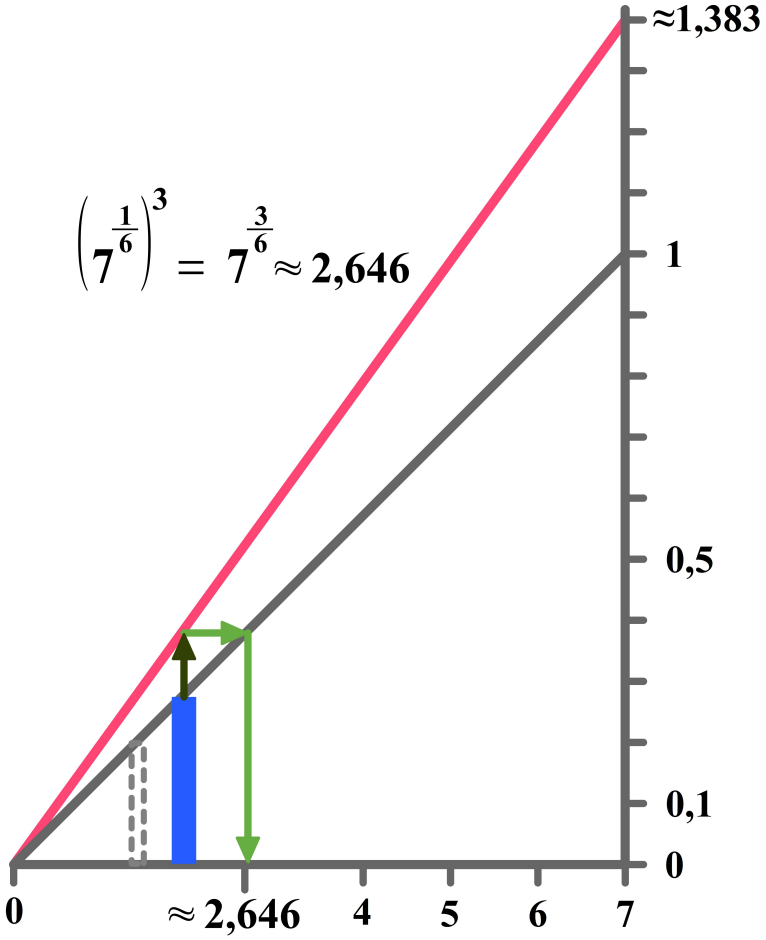


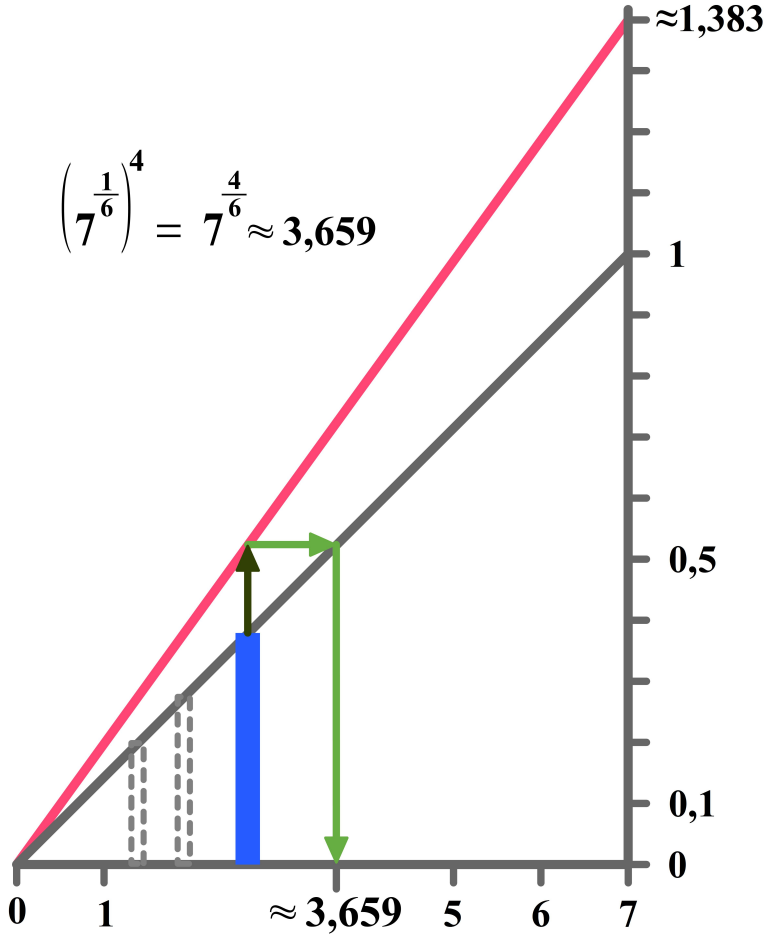
Potenzen mit rationalen Exponenten

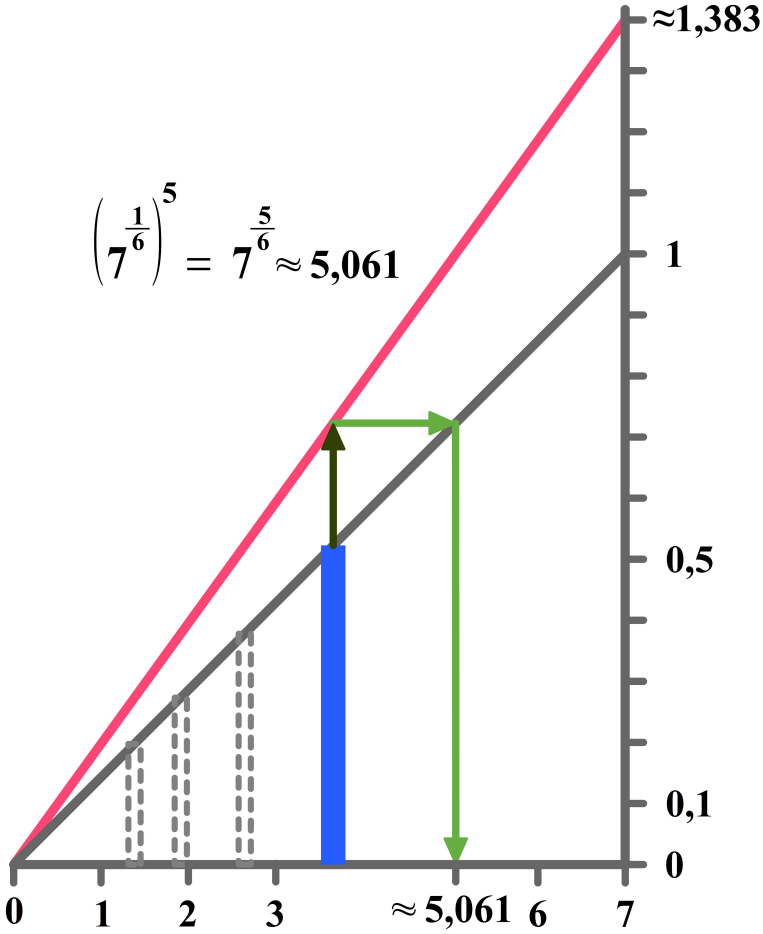
Soweit mir bekannt ist, gibt außer dem hier gezeigten Modell kein anderes, in dem Potenzen mit rationalen Exponenten standardmäßig dargestellt werden können. Deshalb sei nun das Potenzieren von Potenzen mit rationalen Exponenten in aller Ausführlichkeit dargestellt. Mit etwas Übung in dieser Darstellungsweise können die Rechnungen genauso gut in einem einzigen Schaubild zusammengefasst werden.

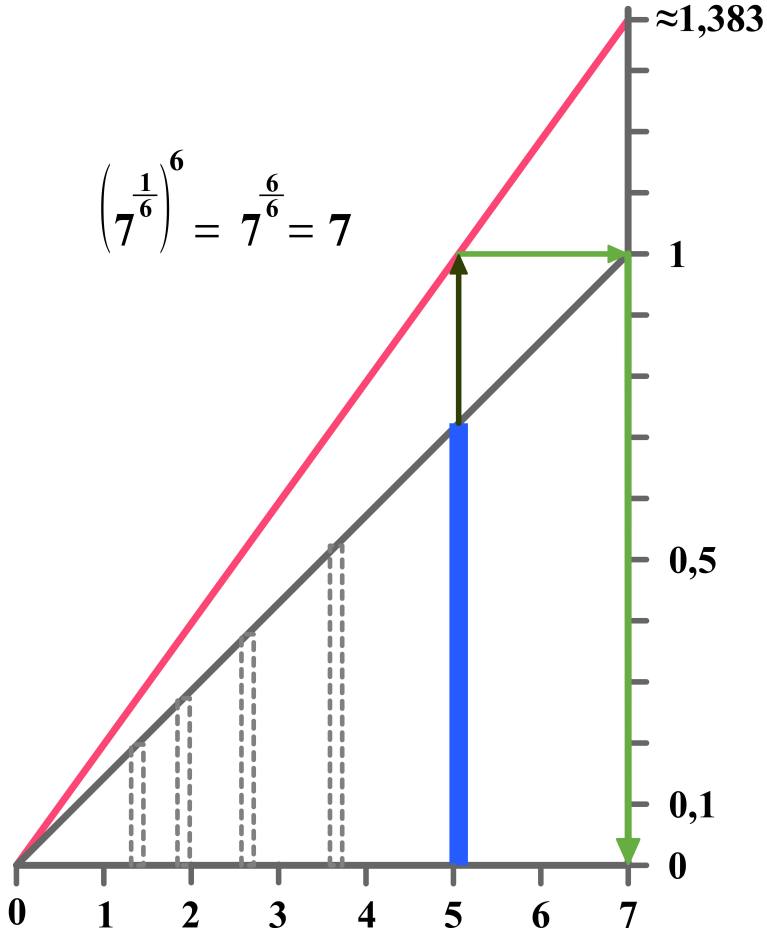

≈1,383
$7^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}383$
1
0,5
0,1
0
0
$7^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}383$
4
5
6
7


$\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^2 = 7^{\frac{2}{6}} \approx 1{,}913$
≈1,383
1
0,5
0,1
0
0
≈ 1,913
4
5
6
7


$\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 7^{\frac{3}{6}} \approx 2{,}646$
≈1,383
1
0,5
0,1
0
0
≈ 2,646
4
5
6
7

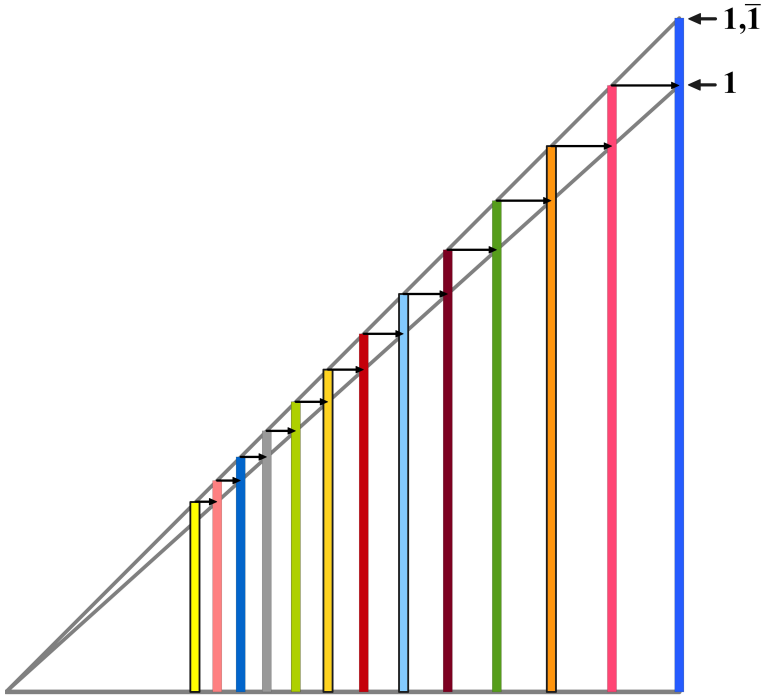

$\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^4 = 7^{\frac{4}{6}} \approx 3{,}659$
≈1,383
1
0,5
0,1
0
0
1
≈ 3,659
5
6
7

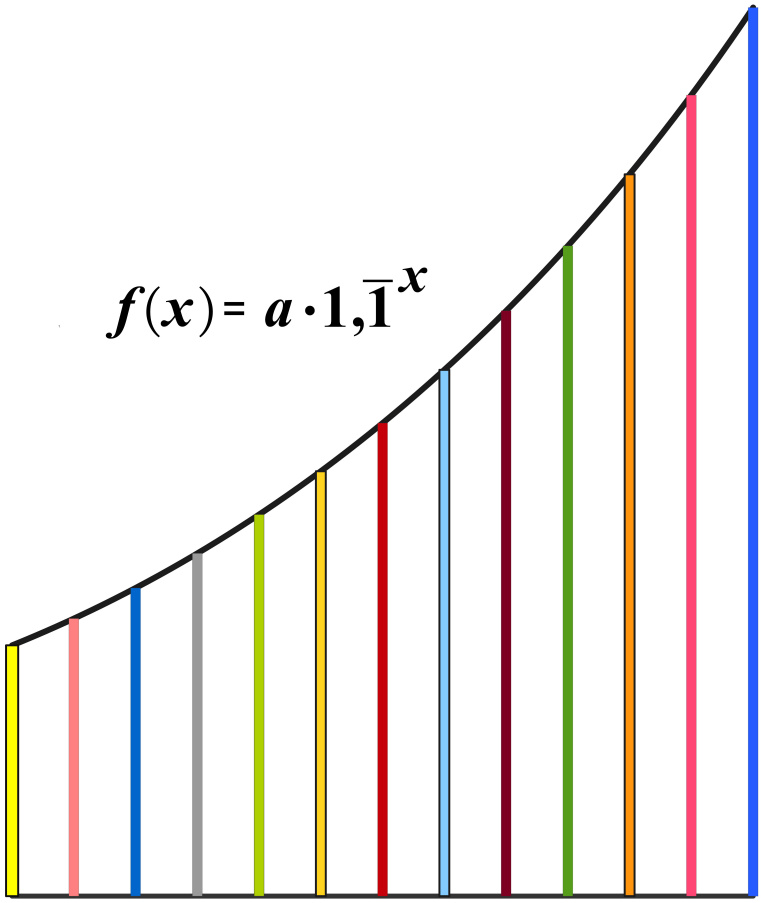

$\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^5 = 7^{\frac{5}{6}} \approx 5{,}061$
≈1,383
1
0,5
0,1
0
0
1
2
3
≈ 5,061
6
7



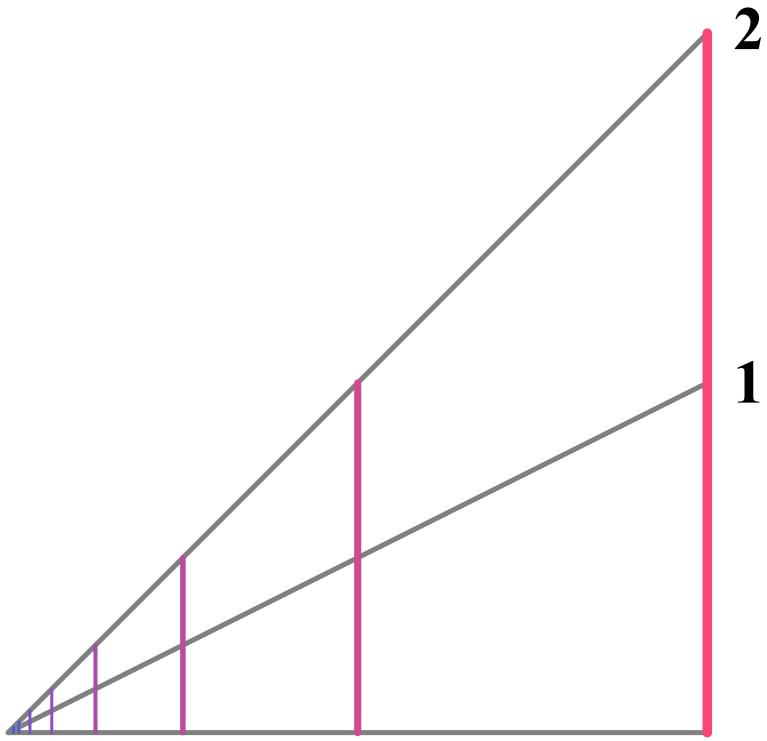
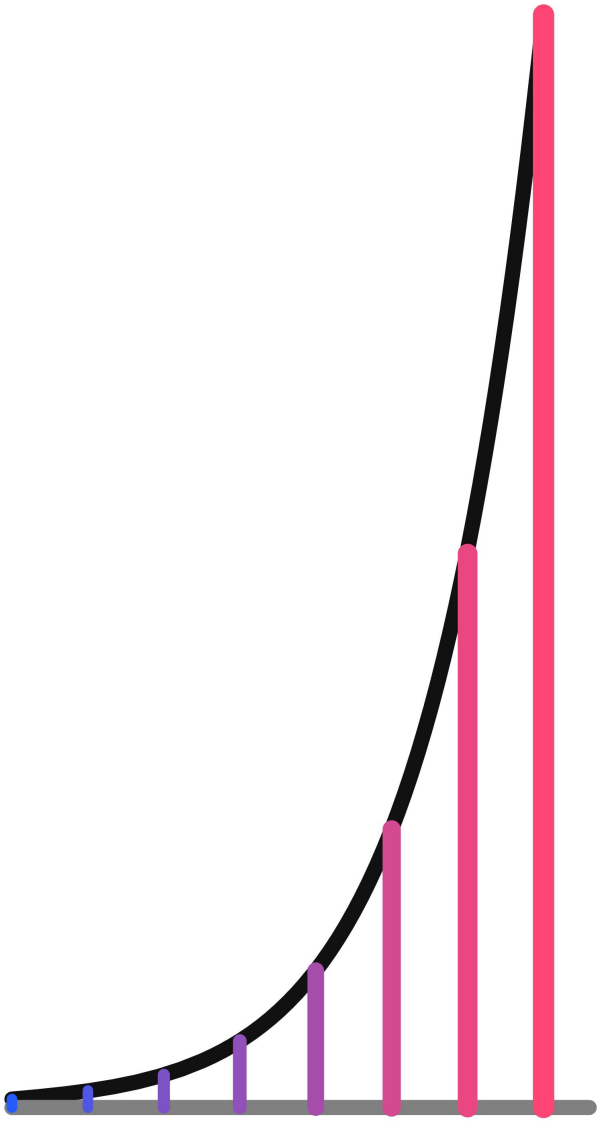
Exponentialfunktionen

Im Zusammenhang mit dem Potenzieren von Potenzen mit rationalen Exponenten haben wir einen Wert mehrmals mit sich selbst multipliziert. Prinzipiell das Gleiche passiert auch bei Exponentialfunktionen. Dargestellt ist (in gelb) ganz links ein mit $1,\bar{1}$ multiplizierter Anfangswert, der immer wieder mit dem Wachstumsfaktor $1,\bar{1}$ multipliziert wird. Stellt man dann die erhaltenen Säulen äquidistant auf, erhält man den typischen Graphen einer Exponentialfunktion.


1,$\overline{1}$
1



Das funktioniert auch mit dem Wachstumsfaktor 2.


2
1