Termumformungen verstehen

In diesem Text werden ein paar Möglichkeiten gezeigt, welche Richtungen man anschlagen kann, um Termumformungen zu verstehen.

Ab der 7. Klasse stehen Termumformungen auf dem Lehrplan. Das sind Verfahren, mit denen man Terme umformt. Solche Verfahren werden in der Regel unterrichtet, indem an Beispielen gezeigt wird, wie Terme umgeformt werden. Schüler sind dann gehalten, diese Umformungen an ähnlichen Termen ebenso durchzuführen.

Möchte man Termumformungen verstehen, muss man etwas weiter vorne ansetzen und definieren, was Terme sind und auch, was ergebnisgleiche Terme sind.

Definition: Terme sind Kombinationen aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen, die man ausrechnen kann.

Damit wir uns um das Verständnis von Termumformungen kümmern können, soll hier vorausgesetzt werden, dass Terme hinreichend bekannt sind.

Definition: Zwei Terme heißen ergebnisgleich, wenn sie immer gleiche Ergebnisse haben, egal, welche Zahlen man für die Variablen einsetzt. Dabei sollen für gleiche Variablen gleiche Zahlen eingesetzt werden.

Führt man in der Mathematik eine Termumformung durch, meint man damit immer, dass ein Term in einen ergebnisgleichen Term umgeformt wird. Eine Termumformung ist also richtig, wenn ein Term in einen *ergebnisgleichen* Term umgeformt wird und sie ist falsch, wenn ein Term nicht in einen ergebnisgleichen Term umgeformt wird.

Schauen wir uns ein Beispiel dazu an: Betrachten wir die beiden Terme

$$5-2+a \text{ und } 5-(2-a)$$

Setzen wir $a=3$, erhalten wir:

$$5-2+3 \text{ und } 5-(2-3)$$

In beiden Fällen kommt das Ergebnis 6 heraus.

Wenn die Umformung des Terms $5-2+a$ in den Term $5-(2-a)$ richtig sein soll, müssen beide Terme für *alle* Zahlen, die man für a einsetzen kann, das gleiche Ergebnis haben.

Hier ist nun der Punkt, an dem *mathematisches* Verständnis anfängt. Zunächst könnte geklärt werden, was die Behauptung der Ergebnisgleichheit beider Terme aussagt. Dafür gibt es viele Möglichkeiten und auch viele Möglichkeiten des Verständnisses. Wenn man so will, kann man diese Behauptung so verstehen: Immer, wenn wir in Zukunft für beide Variablen a in beide Terme die gleiche Zahl einsetzen und dann die Terme ausrechnen, kommt das gleiche Ergebnis heraus. Normalerweise gehen wir zwar davon aus, nicht zu wissen, was in Zukunft passieren wird. Im Fall der Terme behaupten wir aber, es ganz genau zu wissen. Warum funktioniert das? Oder funktioniert das vielleicht gar nicht?

Da es unendlich viele Zahlen gibt, die man für die Variablen eines Terms einsetzen kann, können Termumformungen nicht aufgrund von Erfahrung richtig sein, denn niemand konnte bisher die Richtigkeit mit unendliche vielen Zahlen ausprobieren. Es muss also noch etwas anderes Faszinierendes in der Mathematik geben, das uns ermöglicht, von der Richtigkeit einer Termumformung auch für die Zahlen überzeugt zu sein, die wir bisher nicht ausprobiert haben.
Möchte man wissen, ob eine Aussage für *alle* Zahlen richtig ist, könnte man sich fragen, ob man denn überhaupt Zahlen findet, für die die Aussage richtig ist. Also könnte man ein paar Beispiele durchrechnen. Aber was würde passieren, wenn wir Zahlen in zwei vermeintlich ergebnisgleiche Terme einsetzen würden und unterschiedliche Ergebnisse herauskommen würden? Unsere erste Vermutung wäre bestimmt, dass wir uns verrechnet haben - wodurch die nächste Frage aufgeworfen wird: Können wir immer klären, ob richtig gerechnet wurde? Haben alle Rechnungen der Welt immer nur ein einziges Ergebnis?
Diese möglicherweise etwas trivial anmutenden Fragen führen übrigens zu gar nicht mehr trivialen Teilgebieten der Mathematik wie Rekursionstheorie und Komplexitätstheorie. Darauf soll in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen werden. Daran kann man aber sehen, wie vielfältig solch simple Fragen beantwortet werden können.

Kehren wir zurück zu unseren beiden Termen: Es gibt ein Standardmodell, mit dem man sich Rechnungen vorstellen kann, nämlich die Zahlengerade. Setzen wir für a die Zahl 3 ein, erhalten wir mit dem linken Term folgendes Bild:

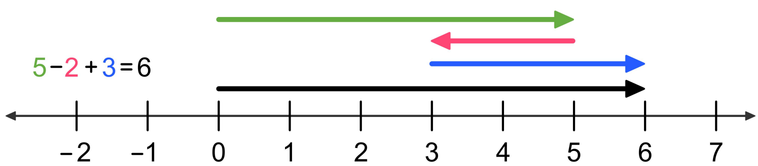

Abb. 1 $5-2+3=6$

Um das Ergebnis des rechten Terms zu finden, rechnen wir zunächst die Klammer aus.

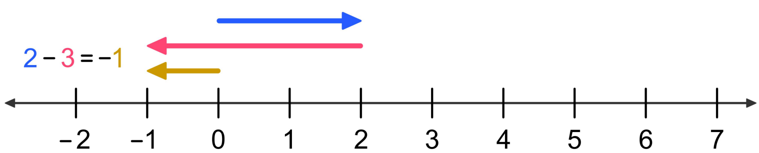

Abb. 2 $2-3=-1$

Das Ergebnis der Klammer verwenden wir dann, um das Ergebnis des Terms zu bestimmen. Inwieweit $-(-1)$ tatsächlich gleich $+1$ ist, soll in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden. (Siehe dazu unter „Warum ist Minus mal Minus gleich Plus?“)

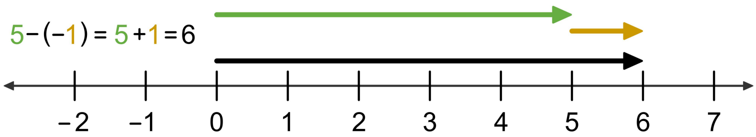

Abb. 3 $5-(-1)=5+1=6$

Nun haben wir gesehen, wie bei beiden Termen das gleiche Ergebnis herauskommt, wenn wir für die Variable a die Zahl 3 einsetzen. Um zu sehen, ob das auch mit anderen Zahlen funktioniert, soll der Pfeil, der die Variable a repräsentiert, etwas verlängert werden.

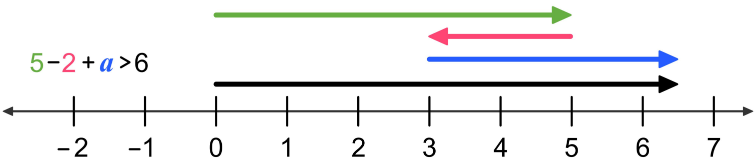

Abb. 4 $5-2+a>6$

Wenig überraschend ist das Ergebnis des Terms nun größer als 6, denn wir haben zu $5-2$ eine größere Zahl als 3 addiert.
Auf der anderen Seite funktioniert das auch. Zunächst rechnen wir die Klammer aus und erhalten einen Pfeil b, der länger ist als der Pfeil, der -1 repräsentiert.

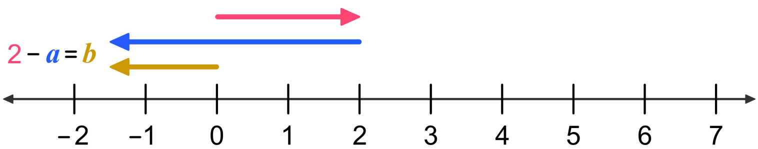

Abb. 5 $2-a=b$

Vorher haben wir zu 5 die Zahl 1 addiert. Jetzt addieren wir eine Zahl b, die größer als 1 ist und das Ergebnis ist größer als 6.

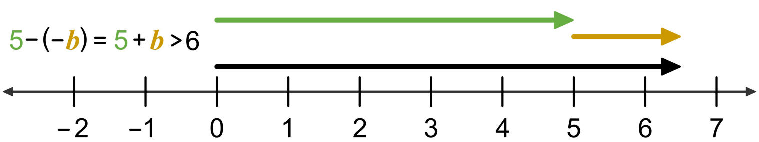

Abb. 6 $5-(-b)=5+b>6$

Kurz zusammengefasst können wir festhalten: Wenn wir einen längeren blauen Pfeil verwenden, wird der braune Pfeil auch länger. Ist der braune Pfeil länger, ist auch das Ergebnis größer.
Da wir nicht festgelegt haben, welche Zahl genau wir für a eingesetzt haben und wir trotzdem zu gleichen Ergebnissen gekommen sind, ist das ein Hinweis darauf, dass

es ein abstraktes Muster gibt, welches die beiden Terme ergebnisgleich macht. Ein solches Muster zu erkennen ist ein weiterer großer Schritt in der Entwicklung einer mathematischen Denkweise eines Schülers.
Welches Muster könnte das sein? Hier ist ein Vorschlag für die ersten Schritte einer solchen Überlegung: Zunächst wollen wir uns nicht mehr um die 5 kümmern, weil sie in beiden Termen an der gleichen Stelle vorkommt und somit mit dem Muster, welches möglicherweise für die Ergebnisgleichheit verantwortlich ist, wohl nichts zu tun hat.
Im linken Term haben wir dann noch $-2+a$, was wir uns so vorstellen können.

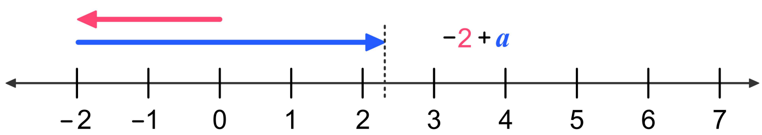

Abb. 7 $-2+a$

Im rechten Term kümmern wir uns zunächst um die Klammer.

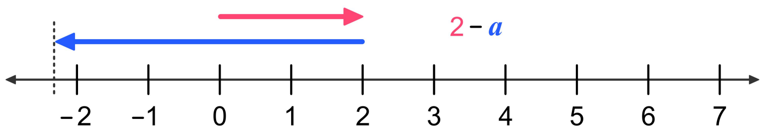

Abb. 8 $2-a$

Das Minus-Zeichen vor der Klammer dreht das Zwischenergebnis dann auf die andere Seite.

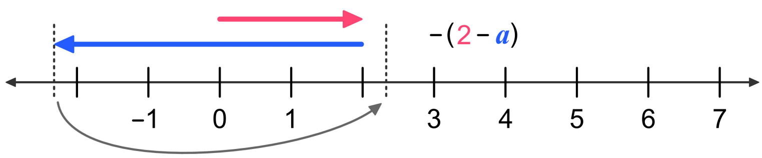

Abb. 9 $-(2-a)$

Dieser Vorgang lässt sich auch sehr profan so beschreiben: „Wenn ich erst eine bestimmte Strecke nach links gehe und dann eine bestimmte Strecke nach rechts gehe, komme ich am gleichen Punkt an, wie wenn ich erst nach rechts gehe, dann nach links und das Ergebnis am Ende wieder umdrehe.“
Das Gute an einer solchen Erklärung ist, dass konkrete Zahlen darin nicht vorkommen. Vermutlich haben also die beiden Terme für ziemlich viele Zahlen das gleiche Ergebnis!

Zum Verständnis der Ergebnisgleichheit dieser Terme kann auch gehören, das gefundene abstrakte Muster zu verallgemeinern. In diesem Fall bietet sich eine Merkregel

an: „Ein Minuszeichen vor einer Klammer dreht die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer um.“
Stehen die Variablen a, b, c, d, e für positive Zahlen, sehen wir hier die Situation $-a + b - c + d - e$:

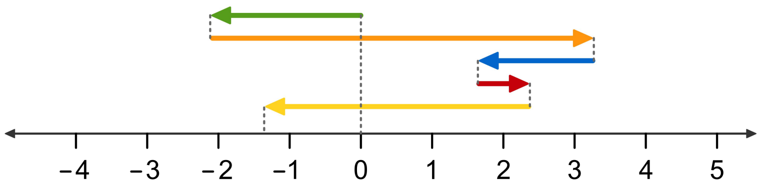

Abb. 10 $-a+b-c+d-e$

Im nächsten Bild machen wir erst in der Klammer alles umgekehrt und drehen das Zwischenergebnis dann auf die andere Seite. Das Endergebnis ist dann das gleiche wie oben.

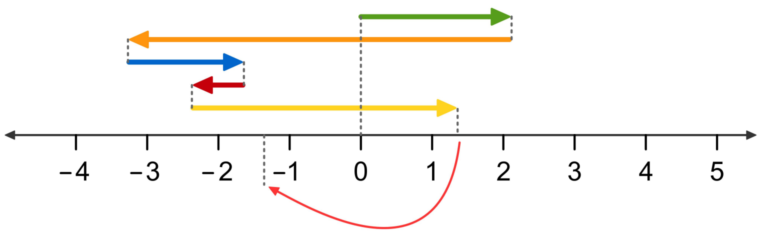

Abb. 11 $-(a-b+c-d+e)$

Wir haben nun eine ganze Menge herausgefunden: Wir haben die 5 weggelassen, weil sie in beiden Termen gleichermaßen vorkommt und anschaulich gesehen nichts mit der Ergebnisgleichheit der beiden Terme zu tun hat. Mit etwas zusätzlicher Arbeit könnten wir daraus eine Regel erstellen, wie z. B.: Die gleiche Zahl kann von zwei Termen subtrahiert werden, ohne dass sich etwas daran ändert, ob die Terme ergebnisgleich sind oder nicht.
Außerdem haben wir gesehen, wie wir mit Minuszeichen vor Klammern umgehen können, woraus wir folgende Regel ableiten können: Ist ein Term eine Summe, können wir

1. die Vorzeichen aller Summanden ändern,
2. den gesamten Term einklammern und
3. vor die Klammer ein Minuszeichen schreiben

ohne dass sich am Ergebnis des Terms etwas ändert.
Dabei ist die Begründung so einfach wie das Hin- und Hergehen, was wir aus unserem Alltag kennen. Und damit haben wir noch eine zusätzliche Erkenntnis gewonnen, deren Wert gar nicht hoch genug eingeschätzt werden kann: Hinter einem mög-

licherweise kompliziert aussehenden „Formelkram“ kann eine ganz einfache Idee stecken.
Es gibt noch viele weitere Fragen, deren Antworten zum Verständnis beitragen könnten. Z. B.:

- Warum macht man überhaupt Termumformungen?

  Antwort: Mit Termen gibt man z. B. an, wie etwas gerechnet wird. Möchte man also einem Menschen mitteilen, wie er etwas rechnen soll, gebietet es die Höflichkeit, einen Term erst in eine möglichst einfache Form umzuformen, bevor man ihn weitergibt.

- Wie macht man das eigentlich in der richtigen Mathematik (also in der Universitätsmathematik)?

  Antwort: Der betrachtete Fall ist ein Spezialfall des Distributivgesetzes, welches gar nicht bewiesen, sondern axiomatisch von den reellen Zahlen gefordert wird. Auch daran kann man erkennen, dass die Mathematik nicht deshalb wahr ist, weil die Axiome wahr sind und die Folgerungen daraus wahrheitserhaltend sind, sondern die Axiome so gebaut wurden, dass sie zu dem passen, wovon wir ohnehin schon überzeugt sind.

- Kann man die Richtigkeit dieser Termumformung auch mit der schriftlichen Addition und Subtraktion zeigen?

  Antwort: Ja.

Das Verständnis eines mathematischen Zusammenhangs ist kein konstanter Zustand des Geistes, sondern es entsteht immer wieder neu, ist immer ein bisschen anders und ist nie vollständig, denn letztlich können wir nicht beantworten, warum die Mathematik - im Besonderen wie hier am Beispiel zweier Terme sowie im Allgemeinen - überhaupt funktioniert. Oder anders gesagt: Wenn Gott die Welt gemacht hat, warum hat er sie dann mathematisch gemacht?