Warum es nicht deine Schuld ist, wenn du Mathe nicht verstehst
-
Ein Ratgeber für Eltern, Schüler und Lehrer

Martin Wabnik

Warum es nicht deine Schuld ist, wenn du Mathe nicht verstehst
-
Ein Ratgeber für Eltern, Schüler und Lehrer

Martin Wabnik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Verlag:
Martin Wabnik
Hansaring 92
48268 Greven

Vorwort

Mit der Mathematik verhält es sich ähnlich wie mit der Sprache: Wir alle beeinflussen die deutsche Sprache, indem wir sie verstehen und indem wir auf deutsch sprechen und schreiben. Damit besteht unsere Sprache nicht nur aus Wörtern und Grammatik. Für eine lebendige Sprache brauchen wir uns: echte Menschen, mit unserem Glück und unserer Trauer, mit unserer Hoffnung und unserem Zorn, mit unserem Alltag und unseren Träumen.

Ebenso ist Mathematik nur zu einem kleinen Teil das, was in Formelsammlungen und Lehrbüchern steht. Wir alle gestalten Mathematik, ob wir nun mit ihrer Hilfe die Welt verändern oder ob wir sie hassen und unsere negative Einstellung an unsere Kinder weitergeben. Wenn wir mit der Mathematik unsere Zukunft gestalten wollen, brauchen wir nicht nur ein bisschen Bücherwissen, welches für ein paar Punkte in Klassenarbeiten reicht, sondern wir brauchen uns Menschen: mit unserem individuellen Verständnis von Mathematik, mit dem Sinn, den wir in diesem Fach sehen, mit unseren Ideen und dem Willen, die Probleme unserer Zeit mit Mathematik zu lösen. Wir alle sind gefragt, wenn es darum geht, Mißstände scharf zu analysieren, abstrakte Strukturen zu erkennen und mit der Leidenschaft für die Exaktheit der Mathematik Schwurblern und Agitatoren robust entgegenzutreten.

Aber warum fristet dann dieses Fach in unseren Schulen so ein kümmerliches Dasein und ist sogar mit Angst besetzt? Warum setzen sich trotz des Verfalls unseres Bildungssystems nicht weite Teile der Bevölkerung für einen besseren Matheunterricht ein? Weil Menschen meinen, sie seien selbst daran schuld, wenn sie Mathe nicht verstehen. Das ist eine Position, von der aus man kaum mit breiter Brust die Verbesserung des Matheunterrichts fordern kann.

Ich finde das schrecklich!

Und es stimmt auch nicht! Seit mehr als 30 Jahren unterrichte ich Mathematik, 20 Jahre davon in meiner eigenen (staatlich anerkannten) Mathe-Schule. Seit 16 Jahren verstehen zigtausend Schüler mit meinen Videos und meinen speziellen Erklärungen Mathematik. Ein Mensch, der selbst daran schuld, wenn er Mathe nicht versteht, ist mir bis heute nicht begegnet. Was ich statt dessen jeden Tag erlebe, sind junge Menschen, die ihre mathematischen Fähigkeiten verbessern, die neugierig sind und viele Fragen stellen, die sich über ihr individuelles Verständnis freuen und stolz darauf sind.

Dieses Buch habe ich geschrieben, weil ich möchte, dass niemand wegen Mathe mit sich hadern muss und dass wir alle zusammen Mathematik zu etwas Positivem und Schönem machen.

Der erste Schritt dahin ist das Zurücklassen von Mathe-Angst und Schuldgefühlen. Dazu müssen die Probleme, die es mit Mathe gibt, benannt werden. Diese Liste ist sehr lang, sie ist nicht lustig und sie gehört - meiner Meinung nach - in dieser Ausführlichkeit in dieses Buch. Nur wenn man die Probleme kennt, kann man sie lösen.

Und Lösungen werden hier reichlich angeboten: Lehrer können verschiedene Erklärungen anbieten und Prüfungen ohne Angst gestalten, Schüler können aufschreiben, was sie denken und so ihr eigenes Verständnis der Mathematik aufbauen und Eltern können ohne Notendruck ihre Kinder durch eine positive Einstellung der Mathematik gegenüber beim Lernen unterstützen.

Lernen ist ein Prozess, den jeder Mensch mitgestaltet. Jeder kann den ersten Schritt machen - der oftmals sogar ziemlich einfach sein kann: Hat man etwas nicht verstanden, kann man einfach nach der passenden Erklärung suchen. Über meine verschiedenen Erklärungen, die ich z. B. auch in meinen Videos anbiete, sprach ich vor einiger Zeit mit einem Mathe-Lehrer. Er sagte mir dann völlig entrüstet: „Ja, wenn Sie das *so* erklären, dann versteht es ja jeder!"

Eben.

Greven, 9. 9. 2023

Martin Wabnik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wenn man Mathe nicht versteht, liegt das höchstwahrscheinlich nicht an einem selbst, sondern an den vielen massiven Problemen, die unser Bildungssystem nachweislich bereithält. Das ist nicht nur mir aufgefallen, sondern auch dem Verband zur Förderung der MINT-Unterrichts (MNU), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und nicht zuletzt der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV), die das im mittlerweile zweiten Brandbrief sehr krass beschreiben. Lehrer sollen nichts mehr erklären (sondern nur noch Kompetenzen unterrichten), das *Fach* Mathematik soll im Matheunterricht nicht mehr vorkommen (sondern nur noch Leitideen und Lerngelegenheiten) und teilweise ist der dargebotene Lehrstoff schlicht und ergreifend falsch. Es wird sogar von einer „zerstörerischen" Ausrichtung des Unterricht auf Kompetenzen und Leitideen gesprochen oder auch (in einem offenen Brief von Professoren an die damalige Bildungsministerin von NRW) von einer „grotesk absurden ... Wahnsinnskonstruktion" in Abituraufgaben, in denen falsche Mathematik abgefragt wird.

Da den meisten Menschen, die davon mittelbar oder unmittelbar betroffen sind (Eltern und Schüler), diese Probleme unbekannt sind, werden sie in diesem Buch beschrieben - selbstverständlich immer verbunden mit Lösungsmöglichkeiten oder mit Methoden, die einen konstruktiven Umgang mit den Schwierigkeiten ermöglichen.

Viele Eltern werden sich sicher an ihre Schulzeit erinnern und feststellen, dass vieles, was sie als Schüler als gegeben hinnahmen, problematisch ist und es Alternativen gibt. Z. B. kann sich so gut wie niemand daran erinnern, vom Mathelehrer jemals gefragt worden zu sein: „Wie verstehst *du* es denn?", obwohl das Verständnis der Mathematik bekanntermaßen ein höchst individueller Prozess ist. Oder z. B. erzeugen Aufgaben, deren Lösung entweder richtig oder falsch ist, Mathe-Angst, weil niemand gerne vor allen Mitschülern Fehler macht. Trotzdem wurden im Unterricht wohl kaum andere Aufgaben gestellt.

Im zweiten Teil dieses Buches wird gezeigt, wie Mathematik auch ganz anders sein kann. Jeder Mensch kann ein individuelles Verständnis von Mathematik aufbauen, wenn er sich nicht permanent (wie im Klassenraum und in Klassenarbeiten üblich) mit anderen vergleichen muss, sondern sich darauf konzentrieren kann, was er in der letzten Woche oder im letzten Monat dazugelernt hat. Mathe-Prüfungen können ohne Versagensängste ablaufen, wenn z. B. in Form von Aufsätzen nach dem individuellen Verständnis und nicht nach der richtigen Lösung gefragt wird. Zu jedem mathematische Lehrsatz und zu jeder Formel gibt es viele verschiedene Erklärungen; man kann immer zeigen, warum etwas so ist, wozu man das braucht und welchen Sinn das hat. Mit Sicherheit werden Sie - liebe Leserin, lieber Leser - an der einen oder anderen Stelle denken: „Ja, wenn man mir das *so* erklärt hätte, dann hätte ich das auch verstanden."

Wenn Sie nun also erleben, dass Sie Mathe verstehen können, sind Sie bestimmt auch davon überzeugt, dass Ihr Kind ebenfalls Mathe kann. Sollte es momentan Schwierigkeiten geben, liegt das nicht daran, dass jemandem ein Mathe-Gen fehlt, sondern daran, dass die richtige Erklärung noch nicht gefunden ist.

Mit dieser Einstellung kann man die vorhandenen Probleme des Matheunterrichts positiv und konstruktiv angehen. In diesem Buch stehen viele Tipps, mit denen Schwierigkeiten gelöst oder deren nachteilige Wirkungen sehr abgemildert werden können. Wir haben es in der Hand. Wir können Mathe besser machen.

Unserem Bildungssystem geht es schlecht. Mathe ist nicht nur Angstfach Nr.1, es werden auch die Leistungen der Schüler jedes Jahr schlechter. Das Abitur qualifiziert nicht mehr für das Studium eines MINT-Fachs[1], was Professoren in immer dramatischer werdenden Appellen an die Politik beklagen. Eltern denken bei der Wahl der weiterführenden Schule für ihr Kind vor allem darüber nach, welche der Schulen wohl ein Bildungsangebot bereitstellen kann, welches wenigstens die Mindeststandards sicherstellt.

Dabei wird von Studie zu Studie die Gewissheit größer, dass ohne außerschulische Initiativen von Eltern und Schülern die Mathematik-Ausbildung junger Menschen nicht erfolgreich sein wird. Die hanebüchenen Zustände kann man in den Presseberichten zum Start des neuen Schuljahrs 2023/24 in aller Deutlichkeit nachlesen: Es geht überhaupt nicht mehr darum, die ausgeklügeltesten didaktischen Methoden anzuwenden oder die enormen Möglichkeiten der Digitalisierung auszuschöpfen, sondern nur noch darum, irgendwie durchzukommen. Deshalb soll das hier auch kein Lehrer-Bashing werden. Sicher gibt es - wie in jeder anderen Branche der Welt auch - Leute, die ihren Job besonders gut und Leute, die ihren Job besonders schlecht machen. In diesem Buch geht es aber nur um die Probleme, die im System Schule stecken.

[1]MINT steht für: Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik

Teil I

Bestandsaufnahme

Kapitel 1

Mathematikunterricht ohne Mathematik

„Mathematik hat ein Problem - nämlich ein Schulfach, das genauso heißt.“

Was im Schulunterricht vorkommt, hat kaum etwas mit Mathematik zu tun. Wenn wir also im Mathe-Unterricht etwas mathematisch nicht verstehen, könnte es daran liegen, dass es gar nicht um Mathematik geht.

Bevor diese steile These ausführlich begründet wird, schauen wir uns an, welche Unterrichtsinhalte vorgesehen sind. Danach sollen einige Leute zu Wort kommen, denen das Problem auch schon aufgefallen ist.

1.1 Vorschriften der KMK

In Deutschland legt die Kultusministerkonferenz (KMK) fest, was zu unterrichten ist. Es sollen sieben prozessbezogene Kompetenzen

1. Mathematisch argumentieren
2. Mathematisch kommunizieren
3. Probleme mathematisch lösen
4. Mathematisch modellieren
5. Mathematisch darstellen
6. Mit mathematischen Objekten umgehen
7. Mit Medien mathematisch arbeiten

zusammen mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen

1. Leitidee Zahl und Operation
2. Leitidee Größen und Messen

3. Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang
4. Leitidee Raum und Form
5. Leitidee Daten und Zufall

vermittelt werden. Obwohl in dieser Aufzählung das Wort „mathematisch“ siebenmal vorkommt, hat diese Aufzählung nichts mit dem *Fach* „Mathematik“ zu tun.

1.1.1 Kritische Stellungnahmen

In dem Schreiben „Kritische Stellungnahme zur Kompetenzorientierung in Schulen und Hochschulen“ vom 28.08.2017, initiiert von Prof. Dr. Hans-Jürgen Bandelt, Dr. Astrid Baumann und Prof. Dr. Hans Peter Klein und unterzeichnet von vielen weiteren Persönlichkeiten der mathematischen Bildung, von Elterninitiativen und weiteren Gruppierungen [1], heißt es dazu:

> Das eigentlich Zerstörerische für den Unterricht sind dabei die fünf *Leitideen* ... Der bewährte fachsystemische Aufbau des Mathematikunterrichtes geht dadurch völlig verloren, und damit die mathematische Orientierung der Schüler. Die Leitideen leiten nicht, sondern sind nur Klassifikatoren der neuen Aufgabenkultur, die sich auf exemplarisches Lernen beschränkt. Entscheidend ist hier, dass statt elementarmathematischer Themen wie etwa Geometrie, nunmehr unverbindlich Alltägliches wie „Raum und Form“ erscheint. Das Wiederfinden einer bestimmten Länge in einem Balkendiagramm durch bloßes Ablesen wird so zur Mathematik erklärt ...

Am 15.08.2019 veröffentlichten die Fachverbände Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) zusammen mit über 300 Unterzeichnern den mittlerweile zweiten Brandbrief an die Kultusministerkonferenz ob der desolaten Lage des Mathematikunterrichts an deutschen Schulen aufgrund der Kompetenzorientierung[2]. Zur Verschiebung der schulischen Lerninhalte von der eigentlichen Mathematik - also auch dem Beweisen - hin zur Kompetenzorientierung, steht dort:

> Das Begründen und Beweisen ist in der Mathematik Weg und Ziel. Daher müssen das Analysieren, das Strukturieren, das Argumentieren und Schließen integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts sein, selbstverständlich altersgemäß. In der Sekundarstufe I bietet die Euklidische Geometrie viele Möglichkeiten (unterschiedlichen Niveaus und Abstraktionsgrades), aber auch die Algebra und die Arithmetik eröffnen den Schülerinnen und Schülern Chancen zum kritischen Denken und Hinterfragen. ... Beweisen ist zugleich eine Methode nachhaltigen Lernens, weil hierbei etwas verstanden wird!

[1] https://angewandte-didaktik.mathematik.uni-mainz.de/files/2019/05/2017-08-28-Kritische-Stellungnahmer-zur-Kompetenzorientierung.pdf

[2] https://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2020/03/Brief-an-die-KMK_2020-03-05pdf.pdf

Das Weglassen von Beweisen

> befördert genau das, wogegen auch die Kompetenzorientierung ursprünglich angetreten war: bestenfalls die Verwendung von Rezepten und Kalkül ohne Verständnis und Verstand.

Weiter wird zu den mit der Kompetenzorientierung einhergehenden Texteinkleidungen von Abituraufgaben geschrieben:

> Generell muss in vielen Texteinkleidungen, wie sie die Bildungsstandards derzeit favorisieren, der mathematische Gehalt oft erst decodiert werden. Das verschleiert die fachliche Struktur und den roten Faden, den die Schüler für das Erlernen von Mathematik unverzichtbar benötigen. ... Besonders schöne Aufgaben haben zusätzlich einen mathematischen „Pfiff" und sprechen damit die Mathematik-begeisterten Schüler an, etwa, indem ein eleganter Lösungsweg möglich ist, der einem ... Schüler das Glücksgefühl der Entdeckung bereiten kann.

Es geht also um den Gegensatz von „Rezepten ... ohne Verständnis und Verstand" auf der einen Seite und dem „Glücksgefühl der Entdeckung" auf der anderen Seite.

1.1.2 Kompetenz statt Mathematik

Nach der Pisa-Studie hat sich die Politik dazu entschlossen, die Inhaltlichen Vorgaben fallen zu lassen und dazu überzugehen, zu definieren, was Schüler können sollen. Alles Können wird nun mit dem Modebegriff „Kompetenz" bezeichnet und die Inhalte sind auf „Leitideen" reduziert worden. Es soll also nicht mehr die Bruchrechnung beherrscht werden oder vielleicht quadratische Gleichungen verstanden werden. Die Fähigkeit, z. B. eine quadratische Gleichung zu lösen, gehört jetzt zur Kompetenz „mit mathematischen Objekten umgehen" an der Leitidee „Zahl und Operation". Dass quadratische Gleichungen als Erweiterungen linearer Gleichungen gesehen werden können oder die Lösungen quadratischer Gleichungen als Nullstellen spezieller ganzrationaler Funktionen verstanden werden können, soll dabei unter den Tisch fallen.

Hat man einen inhaltlichen Aufbau der Mathematik, rechnet man erst mit Zahlen, danach abstrahiert man das Rechnen und rechnet mit Variablen (Buchstaben), um Rechengesetze besser formulieren zu können. Mit den Variablen lassen sich z. B. die binomischen Formeln formulieren, die man dann verwenden kann, um quadratische Gleichungen zu lösen. Damit hat man einen Aufbau der Inhalte und auch einen Aufbau des Verständnisses vom konkreten zum abstrakten, vom einfachen zum Komplexen. Dieser ganze vertikale Aufbau fällt aber mit den Kompetenzen und Leitideen weg. Dadurch wird das Verständnis der Mathematik im Schulunterricht aktiv und vorsätzlich behindert.

Die Behandlung quadratischer Gleichungen sollte ein großer Schritt in der mathematischen Karriere eines jeden Menschen sein. In der pq-Formel (oder abc-Formel) stecken gleich mehrere bahnbrechende Ideen, die Schüler höchstwahrscheinlich vorher nicht für möglich hielten. Es ist ein großer Schritt in die faszinierende Welt der Abstraktion, in der durch reine Gedankenkraft ideale Räume erschaffen werden, die Probleme in der realen Welt lösen können. Richtete sich der Blick vormals noch auf den Sand vor den eigenen Füßen, in den unbedarft Kreise gestochert wurden, so richtet sich dieser nun auf und hinauf zu den Sternen.

Aber da Schüler so etwas nicht erleben sollen, werden sie für die nächste Klassenarbeit die pq-Formel (oder die abc-Formel) auswendig lernen und sie auf eine Textaufgabe direkt aus ihrer Lebenswirklichkeit anwenden. Danach können sie die Formel getrost wieder vergessen. Denn dann, wenn sie nochmals angewendet werden muss - nämlich in den zentralen Prüfungen für den mittleren Schulabschluss - steht die Formel in der Formelsammlung, die in der Prüfung verwendet werden darf. Überflüssig zu sagen, dass man alle Rechnungen in den Taschenrechner eintippen kann und man noch nicht einmal die Grundschulmathematik (also die vier Grundrechenarten) beherrschen muss, um die Abschlussprüfung am Ende der Mittelstufe zu bestehen. Im Fall der Lösung einer quadratischen Gleichung kann man also in der Abschlussprüfung Punkte ohne jegliches Fachwissen und ohne jegliches Verständnis bekommen. Das hat uns die Kompetenzorientierung gebracht.

1.1.3 Wen wir verlieren

Nun könnte man meinen, das Auswendiglernen einer Formel und einiger Anwendungen dazu sei doch ein einfacher Vorgang, der auch von Schülern bewältigt werden kann, die sich nicht für Mathe interessieren. Das ist zwar theoretisch richtig, aber in der Praxis hat man als Lehrer das Problem, dass die Schüler, die Mathe ohnehin schon doof finden, nun noch genervter sind, weil sie etwas auswendig lernen sollen, in dem sie keinen Sinn sehen. Und da laut KMK alle fachlichen Erklärungen unterbleiben sollen, wird das Verständnis des Fachs verhindert - ein Verständnis, das Spaß macht und vielleicht Schüler motivieren könnte, sich doch einmal aktiv mit der Mathematik zu beschäftigen.

Erschwerend kommt hinzu, dass solche Schüler in Klassenarbeiten und sonstigen Prüfungen nicht besonders erfolgreich sein werden, was an der fehlenden Stressresistenz der Lehrinhalte liegt. Lernt man eine Formel, die man nicht verstanden hat, auswendig, kann es passieren, dass man sich in einer Stresssituation nicht mehr an diese Formel erinnern kann. Passiert das in einer Klassenarbeit, hat man keine Möglichkeit, sich die Formel herzuleiten. Verständnis hingegen ist viel stressresistenter. Selbst wenn man sich in einer Prüfung unsicher ist, wie genau die Formel lautet, kann man sich überlegen, wie sie denn vernünftigerweise lauten müsste und kann sie so rekonstruieren. Zum Mathe-Doof-Finden und dem Auswendiglernen von sinnlosem Zeug kommen für solche Schüler nun auch noch schlechte Noten hinzu - inklusive dem ganzen Rattenschwanz, der da dran hängt: geringes Selbstvertrauen, die Überzeugung, für Mathe zu dumm zu sein, Stress mit den Eltern, Angst vor der Nichtversetzung usw.

Selbst wenn man einen Schüler - durch echtes Interesse, gutes Zureden, Motivationstechniken - dazu bekommt, sich auf die nächste Klassenarbeit besonders gut vorzubereiten, bringt das oft nicht viel. Wenn man in der Führerscheinprüfung vor Aufregung vergisst, wo rechts und links ist, liegt das nicht daran, dass man vorher nicht gut genug wusste, wo rechts und links ist, sondern weil der Prüfungsstress das Denken blockiert. Deshalb kann man einen solchen Gedächtnisausfall auch nicht durch das besonders sorgfältige Auswendiglernen von rechts und links vor der Prüfung verhindern. Für unseren Schüler wird es also noch schlimmer: Nun hat er schon alles getan, was Eltern und Lehrer von ihm wollten und trotzdem schreibt er schlechte Noten. Eine logische Konsequenz daraus ist, beim nächsten Mal gar nicht erst mit dem Lernen anzufangen.

Auch Schüler, die sich eigentlich für Mathematik interessieren, verlieren wir durch diese Konzentration auf Kompetenzen unter Auslassung fachlicher Zusammenhänge. Da nichts definiert, erklärt oder begründet wird, findet deren Neugier auf abstrakte Strukturen keinen Nährboden und sie wenden sich von der Mathematik ab - oder halt von dem ab, was in der Schule als Mathematik bezeichnet wird und ja eigentlich gar keine Mathematik ist. Da Schüler normalerweise nicht wissen, dass Mathematik tatsächlich ganz anders ist, interessieren sie sich nicht (mehr) für dieses Fach. Das ist für uns als Gesellschaft ein großes Problem, weil das genau die Schüler sind, die aufgrund ihres Interesses vielleicht einmal Mathematiker, Ingenieure, Naturwissenschaftler oder Techniker werden könnten. Zur Zeit führt das zu einem eklatanten Mangel an Fachkräften in diesen Gebieten.

1.1.4 Wen wir nicht verlieren

Die Schüler, die am besten mit den KMK-Vorgaben zurecht kommen, sind die Schüler, die machen, was man ihnen sagt, die lernen, was man ihnen vorsetzt und die auch sonst keine Fragen stellen. War das von der KMK so gewollt?

1.1.5 Warum solche Vorschriften?

Was die Kultusministerkonferenz beschließt, ist vor allem politischer Natur. Die Leute, die da zusammenkommen, sind Politiker der einzelnen Bundesländer, die die Vorgaben ihrer Ministerien durchzusetzen versuchen. Das ist in unserem Land ein demokratisch legitimierter Prozess, der als solcher auch völlig in Ordnung ist. Mathematiker sind an dem Prozess aber kaum beteiligt und so werden von der Kultusministerkonferenz auch regelmäßig Unterrichtskonzepte beschlossen, die wenig mit Mathematik zu tun haben. Die Festlegungen der Kultusministerkonferenz mögen einen Sinn haben. Die Beschlüsse lesen sich auch gar nicht so schlecht - abgesehen natürlich von den Worthülsen, die aber in von Politikern formulierten Texten wohl unvermeidlich sind. Grundsätzlich ist es aber nicht schlecht, wenn Schüler Kompetenzen erlangen. Trotzdem gilt aber: Das, was unterrichtet werden soll, ist eben keine Mathematik. Wenn man also im Unterricht etwas nicht versteht, ist es auf jeden Fall nicht die Mathematik, die man nicht verstanden hat.

Da die Beschlüsse der KMK und damit auch die Lehrpläne nicht fachlich, sondern politisch motiviert sind, wäre eine sinnvolle Lösung wohl zu einfach. Man könnte ja beschließen: „Die Schüler sollen vernünftige Mathematik lernen und die Lehrer sollen diese gut erklären.“ Mit so einem Beschluss kann aber kein Bildungsminister nach Hause kommen, denn wir haben nicht nur 84 Millionen Fußball-Bundestrainer in Deutschland, es weiß auch jeder Mensch besser als jeder andere, wie Schule funktioniert. Da muss man sich als Politiker schon tonnenweise tolle Texte einfallen lassen, um sich unangreifbar zu machen. Z. B.[3]: Die Zielvorgaben „sollen schulische Lehr- und Lernprozesse auf eine kumulative und systematisch vernetzte Entwicklung von Kompetenzen orientieren, ... Flankiert von geeigneten Implementierungs- und Unterstützungsmaßnahmen bilden Bildungsstandards eine Basis für eine systematische Weiterentwicklung des Bildungssystems.“

Diese Weiterentwicklung sieht zur Zeit so aus, dass sich beispielsweise das Bildungsniveau der Abiturienten im freien Fall befindet. Professoren der MINT-Fächer beklagen unisono nicht nur die mangelnde, sondern die sogar noch abnehmende Studierfähigkeit der Studienanfänger. Fast schon berühmt wurde eine Aufgabe, die Studenten der Ingenieurwissenschaften vorgelegt wurde. Dabei sollte die Wurzel aus 4 gezogen werden. Ein erheblicher Teil der Studenten war dazu nicht in der Lage. Für das fallende Niveau macht in einem Artikel der Frankfurter Rundschau[4] Prof. Heiko Knospe die Kompetenz-fixierten Lehrpläne verantwortlich: „Man soll dabei lernen, wie man etwas sucht, um ein Problem zu lösen. Wer aber erst nachgucken muss, wie man die Wurzel aus Vier zieht und dafür den Taschenrechner braucht, wird das Studium nicht schaffen.“ Wenn Menschen, die das Mathematik-Abitur erfolgreich bestanden haben, nicht die Wurzel aus 4 bestimmen können, kann nicht viel Mathematik im Abitur vorgekommen sein.

Wie die Pisa-Studien zeigen, hat sich Deutschland in den letzten Jahren auch im internationalen Vergleich verschlechtert. Bundespräsident Frank Walter Steinmeier sagte dazu[5]: „Es gibt kaum ein Politikfeld, in dem Reden und Handeln so beschämend weit auseinanderklaffen.“

Meiner Meinung nach gibt es noch einen weiteren Grund für diese Situation (was ich aber nicht empirisch nachweisen kann): Die Menschen, die in den Gremien der KMK sitzen und über den Lehrplan entscheiden, sind Bildungsverwalter (genauso wie die meisten Mathe-Lehrer auch). Sie kennen die Leidenschaft, die man für dieses Fach entwickeln kann, gar nicht. Weder haben sie sie erlebt noch wissen sie, dass es diese Leidenschaft überhaupt geben kann. Deshalb denken sie gar nicht daran (in diesem Fall wörtlich gemeint), den Mathematikunterricht so aufzubauen, dass auch Schüler diese Leidenschaft empfinden können. Dazu nötig wären Definitionen, Sätze, Beweise und deren Bedeutungen (die aber im Unterricht nicht mehr vorkommen sollen). Erst damit kann man anfangen, mathematisches Verständnis aufzubauen. Und es braucht ein tiefes Verständnis der Zusammenhänge, um abstrakte mathe-

[3]https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

[4]https://www.fr.de/wissen/beim-wurzelziehen-versagt-11389223.html

[5]https://www.merkur.de/politik/pisa-studie-2019-rangliste-deutschland-schueler-ergebnisse-zr-13266783.html

matische Strukturen sehen und faszinierend finden zu können.

1.2 Wünschenswerte Mathematik und Realität

Um konkret zu zeigen, dass Matheunterricht tatsächlich ohne Mathematik auskommt, schauen wir uns im Folgenden an, was im Mathematikunterricht vorkommt und was dort vorkommen könnte, wenn das Verständnis der Mathematik unterrichtet werden würde.

1.2.1 Bruchrechnung

Über das Teilen von Zahlen kommt man zur Bruchrechnung. Die meisten Erwachsenen wissen wohl, was 12 : 4 bedeutet. Aber was bedeutet 4 : 12? Fast alle Menschen, mit denen ich spreche, können sich nicht daran erinnern, in der Schule Erklärungen dazu gehört zu haben, was es bedeutet, wenn eine kleine Zahl durch eine größere geteilt wird. Beantworten könnte man diese Frage z. B. so:

> 12 : 4 bedeutet: „Wie oft passt 4 auf 12?“ und 4 : 12 bedeutet: „Welcher Teil von 12 passt auf 4?“

Wüsste man das, hätte man wohl keine Probleme zu verstehen, was $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ bedeutet. Bisher konnte mir kein einziger Mensch die Frage nach der Bedeutung dieser Rechnung auf Anhieb beantworten. Eine mögliche Antwort ist:

> $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ bedeutet: „Welcher Teil von $\frac{1}{2}$ passt auf $\frac{1}{3}$?“

Es gibt außerdem viele anschauliche Modelle dazu, die teilweise sehr einfach aus Stift, Schere und Papier hergestellt werden können - Modelle, die im Unterricht normalerweise nicht vorkommen (zumindest habe ich bisher keinen Menschen getroffen, der das im Unterricht gemacht hat).

Ähnlich sieht es bei der Multiplikation von Brüchen aus. Was bedeutet $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$? Die meisten Menschen antworten mir darauf mit „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“. Ja richtig, aber warum? Ich weiß nicht, ob es zu viel verlangt ist, nach 10 oder mehr Jahren Matheunterricht eine solche Regel beweisen zu können - aber wenigstens die Bedeutung der Rechnung sollte doch noch übrig bleiben, meine ich. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ lässt sich verstehen als Antwort auf die Frage: „Was ist ein Drittel einer Hälfte?“ oder auch „Was ist die Hälfte eines Drittels?“

Wenn man im Fach Mathematik in Deutschland sogar das Abitur ablegen kann, nicht nur ohne jemals einen einzigen Beweis durchgeführt zu haben, sondern auch ohne zu wissen, was Rechnungen bedeuten, dann kann im Abitur nicht viel Mathematik abgefragt werden.

Kommen wir zur Addition und Subtraktion von Brüchen. Die meisten Schüler wurschteln sich irgendwie da durch. Sie machen das nach, was ihnen jemand vorgemacht hat und haben noch ein paar Fälle im Kopf, „wo man aufpassen muss“. Dieses Gewurschtel hat nichts mit Mathematik zu tun.

Auch wenn wir uns jetzt nur auf das Rechnen beschränken, gibt es hier einiges zu verstehen: dass es nämlich ein Verfahren gibt, welches man *immer* auf *alle* Brüche anwenden kann. Es gibt viele Möglichkeiten, ein solches Verfahren darzustellen, z. B. durch ein Ablaufdiagramm (Flussdiagramm). So könnte man für sein späteres Leben aus dem Matheunterricht die Idee mitnehmen, komplexe Handlungsanweisungen z. B. mit Ablaufdiagrammen darstellen zu können. Dabei geht es darum, das Verfahren vor allem vollständig darzustellen, damit es *immer* auf *alle* Situationen anwendbar ist. Solche Verfahren braucht man z. B., um Mitarbeitern einer Zeitung zu sagen, wie sie Informationen verifizieren sollen, um Krankheiten zu diagnostizieren oder um zu erklären, wie genau die Lkw einer Spedition nachts erst ent- und dann beladen werden.

In meinem Leben habe ich in einigen sehr unterschiedlichen Jobs gearbeitet. Jedes mal musste man mir anfangs erklären, was wie wann und wo zu tun sei. Selten hatte ich Vorgesetzte, denen überhaupt klar war, welches Verfahren sie mir erklären wollten und welche Ausnahmen es dazu gibt. Hätten diese Leute im Matheunterricht standardmäßig mit bestimmen Darstellungsmethoden von (Rechen-)Verfahren gearbeitet und hätten sie dieses Wissen auf ihren Job übertragen, hätten sie viel Arbeitszeit und auch viel Geld sparen können. In einer Spedition verursachte ich tatsächlich unwissentlich Schäden, weil man mir selbst auf meine Nachfrage hin nicht sagen konnte, wie Arbeitsabläufe durchzuführen seien. [6]

1.2.2 Terme

Was ist ein Term?

Jeder Mensch, der einen Mittleren Schulabschluss (Mittlere Reife, Realschulabschluss, (qualifizierter) Sekundarabschluss, Fachoberschulreife, ...) hat, hat jahrelang mit Termen gerechnet. Wenn ich diesen Menschen (die keine Mathematiker sind) die obige Frage stelle - was ich zu deren Leidwesen ziemlich oft tue - erhalte ich (fast) nie eine richtige Antwort.[7] Warum? Weil das in der Schule nie tiefergehend behandelt wurde. Im Mathematikunterricht werden Aufgaben gerechnet und/ oder es werden Kompetenzen vermittelt, es ist aber ziemlich egal, wie die Objekte, mit denen man umgeht, definiert sind. Definitionen sind aber ein zentraler Bestandteil des *Fachs* Mathematik. *Weil* wir mathematische Objekte genau definieren, können wir genaue Folgerungen daraus ziehen und können diese Folgerungen sogar beweisen. Wir brauchen Definitionen, um Mathematik zu verstehen.

Was ist eine Termumformung? Entsprechend meiner privaten, jahrzehntelangen Umfrage können die Menschen, die schon nicht wussten, was ein Term ist, mir auch nicht sagen, was eine Termumformung ist, geschweige denn, dass sie beurteilen könnten, ob eine Umformung eines Terms eine korrekte Termumformung ist.

Wir haben bestimmt alle mal einen Term wie

$$a+b-c \quad \text{in den Term} \quad a-(c-b)$$

---

[6] Die Spedition ist jetzt pleite.

[7] Bis auf ganz wenige Mathe-Lehrer. Die meisten Mathe-Lehrer, mit denen ich gesprochen habe, konnten die Frage nicht richtig beantworten.

oder in einen Term wie

$$-\frac{1-x^2}{x+1} \quad \text{in den Term } x-1 \quad (\text{ für } x \neq -1)$$

umgeformt. Aber war das denn richtig so? Können wir das beweisen? Und selbst wenn wir es beweisen können: Was bedeutet es, wenn eine Umformung „richtig“ ist? Weil sie so ausgeführt wurde, wie der Lehrer das gesagt hat? Man kann all diese Frage nicht beantworten, wenn man die Definition eines Terms nicht kennt.

Warum verwenden wir Terme? Diese Frage ist wichtig, damit Schüler verstehen, dass die Objekte, die in der Mathematik definiert werden, genau so und nicht anders definiert werden, weil sie so am sinnvollsten sind. Deshalb müssen zu jeder Definition die Fragen behandelt werden: Warum definieren wir das? Warum definieren wir das so und nicht anders? Was soll das? Das sind die Fragen, deren Beantwortung das Verstehen von Termen ermöglicht. Solche Fragen sollen aber im kompetenzorientierten Unterricht keine Rolle spielen.

Jede Person darf, wenn ihr langweilig ist, den ganzen Tag in der Mathematik irgendetwas definieren. Man könnte z. B. definieren: Jeder Ausdruck der Form [Variable; Minuszeichen; Variable] ist ein „Ürks-Mürks“. Aber vielleicht werden die meisten solcher Definitionen in der Mathematik-Welt kein großes Gehör finden. Warum? Weil gute und wichtige Definitionen aktuelle Probleme der Mathematik lösen. Oder sie vereinfachen etwas. Oder sie sind besonders ästhetisch. usw. Welche dieser Gründe zur Definition von Termen geführt hat, werden die meisten Schüler nie erfahren.

Zusammenfassung: Die Definition von Termen ist in der Schule nicht so behandelt worden, dass sich Absolventen der Schule noch daran erinnern können bzw. ist falsch[8] oder gar nicht behandelt worden. Außerdem ist die Definition einer Termumformung nicht oder nicht hinreichend behandelt worden, ebenso ein Verfahren, mit dem man erkennen kann, ob eine Umformung eines Terms eine korrekte Termumformung ist. Und die Fragen, *warum* es Terme gibt, *warum* man Terme umformt und *warum* die eine Umformung eine korrekte Termumformung ist und die andere Umformung nicht, sind weder gestellt noch beantwortet worden. Und dann wundern sich Leute darüber, dass sie Mathe nicht verstehen!

1.2.3 Gleichungen, Formeln, Ableitungen

Nach den Termen geht es im Aufbau der Mathematik mit den Gleichungen weiter. Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, zwischen denen ein Gleichheitszeichen steht - wobei man diese Erklärung natürlich nicht verstehen kann, wenn man nicht weiß, was Terme sind. So pflanzt sich der Mangel an Mathematik immer weiter fort. Schüler machen irgendwann einfach das nach, was der Lehrer macht und versuchen, aus den Beispielaufgaben Schemata herauszuziehen, mit denen sie dann die Aufgaben in der Klassenarbeit lösen. Mathematik geht anders.

Es gibt einen Unterschied zwischen Termen und Gleichungen, der mit mathematischem Verständnis zu tun hat, aber im Unterricht eigentlich keine Rolle spielt: Ein

[8] Siehe dazu auch im Kapitel „Schulbücher“ den Abschnitt „Falsche Mathematik“

Term ist etwas, was man ausrechnen kann. Eine Gleichung (ohne Variablen) ist eine Aussage, die richtig oder falsch sein kann.

Wenn man vor einer Aufgabe sitzt und überhaupt keine Ahnung hat, was zu tun ist, hilft es, sich zu überlegen, was das eigentlich ist, was man vor sich hat: Ist das etwas, was man ausrechnen kann oder etwas, das richtig oder falsch sein kann? Suche ich ein Ergebnis oder möchte ich, dass eine Aussage richtig wird?

Mathematik ist auch eine Schule des Denkens, zu der es gehört, Probleme zu analysieren. Die obigen Fragen gehören zu solchen Analysen. Und damit sind wir wieder am Anfang: Wenn wir die Definition der Terme nicht beherrschen, wissen wir auch nicht, was Gleichungen sind und können demnach Gleichungen und Terme schlecht unterscheiden. Also können wir bestimmte Problemanalysen gar nicht begreifen, womit uns wieder ein Teil der Mathematik fehlt.

So geht es dann weiter mit dem Umstellen von Gleichungen, also den Äquivalenzumformungen. Mit einer solchen Umformung formt man eine Gleichung in eine andere Gleichung um, die die gleiche Lösungsmenge hat. Die Lösungsmenge besteht aus den Zahlen, die die Gleichung zu einer richtigen Aussage machen. Aber wenn man nicht weiß, dass Gleichungen (ohne Variablen) Aussagen sind, kann man keine Äquivalenzumformungen verstehen. So kommen wir einfach nie auf einen grünen Zweig.

Formeln sind wiederum Gleichungen und Funktionen werden meist mit Funktionstermen oder Funktionsgleichungen definiert - was man alles nicht verstehen kann, wenn man noch nicht einmal weiß, was ein Term ist. So geht also das Gewurschtel bis zum Abitur weiter. Und warum auch nicht? Es funktioniert doch! In einigen Bundesländern hat man gute Chancen, beim Thema „Ableitungen“ durch das Abi zu kommen, wenn man ganzrationale Funktionen ableiten kann. Das kann man mit den Ableitungsregeln durchführen oder man merkt sich einfach nur ein Schema:

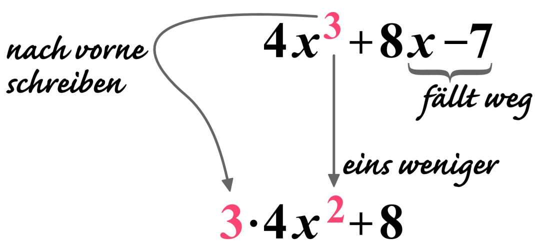


Abb. 1.1 Vollständiges Abiturwissen zu Ableitungen

„*Nach vorne schreiben*“, „*eins weniger*“ und „*fällt weg*“ hat nun wirklich nichts mehr mit Mathematik zu tun. Aber auch, wenn sich diese Ausdrücke infantil anhören: Einfach ist das ganze nicht, denn es ist nicht verstehbar. Wollte man Ableitungen verstehen, müsste man ganz woanders anfangen, z. B. bei der Definition von Termen. Der Vorteil ist dann, dass man auch alle nachfolgenden Begriffe verstehen kann und sich so ein sehr robustes mathematisches Verständnis aufbaut. Der Nachteil ist, dass nach einem solchen Verständnis nicht gefragt ist. Es soll weder unterrichtet werden noch kommt es in den zentralen Prüfungen vor.

1.2.4 Der Satz des Pythagoras

Mathematisch gesehen ist das eigentlich Interessante am Satz des Pythagoras der Beweis. Der Satz war schon Jahrhunderte vor Pythagoras bekannt und die Entdeckung des Zusammenhangs

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist auch keine große Leistung. Dass z. B. ein Dreieck rechtwinklig ist, wenn die Seiten 3, 4 und 5 Längeneinheiten lang sind, kann man schon sehen, wenn man mit Bauklötzen spielt. Bis zu der Erkenntnis, dass

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ist, ist es dann auch kein weiter Weg mehr. Diese Tatsachen waren den Ägyptern und Babyloniern schon vor 4000 Jahren bekannt. Aber diesen Zusammenhang systematisch zu untersuchen, ihn mit anderen Erkenntnissen der Geometrie zu verbinden und letztlich der Welt eine logische Struktur aufzuprägen, in der alles aufeinander aufbaut und so erst Behauptungen nicht einfach nur richtig sind, sondern bewiesen werden können - das ist eine der großen Leistungen der antiken Griechen! Diese Kulturleistung, die die Grundlage unserer heutigen Mathematik und damit auch eine der Grundlagen unseres Wohlstands ist, soll laut Kultusministerkonferenz im Unterricht aber nicht vorkommen.

Der Satz soll nur noch angewendet werden und zwar auf (an den Haaren herbeigezogenen) „Anwendungssituationen“ wie eine an einer Mauer lehnende Leiter oder einen Fußballtrainer, der seine Schützlinge diagonal über den Fußballplatz rennen lässt. Bedenkt man, dass zudem alle Rechnungen mit dem Taschenrechner erledigt werden können, befinden wir uns vom mathematischen Niveau her im Jahr 2000 v. Chr. Auch zu dieser Zeit wurde der Satz angewendet z. B. durch Arbeiter, die rechte Winkel herstellten, indem sie mit Schnüren, die in 12 gleich lange Teile unterteilt waren, Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 Längeneinheiten legten und so Wände rechtwinklig zueinander mauern konnten.

Oft hat man z. B. beim Satz des Pythagoras ein komisches Gefühl, wenn dieser Satz auf eine an der Wand lehnende Leiter angewandt wird. Man fragt sich dann: „Hmmm, ist dieser Satz so berühmt, weil man damit berechnen kann, wie hoch eine Leiter sein muss, damit man mit ihr eine Mauer überwinden kann? Bestand vielleicht die Hälfte des Lebens der Menschen der Antike darin, mit Leitern Mauern zu überwinden?“

Solche und ähnliche Fragen sind mir von Schülern oft gestellt worden (obwohl die Formulierung hier etwas pointiert gewählt ist). Meistens haben sie den diffusen Eindruck, irgendetwas in diesem Zusammenhang nicht verstanden zu haben und suchen die Schuld dafür normalerweise in ihrem vermeintlich zu geringen Mathe-Talent. Wenn ich ihnen erkläre, dass der mathematisch interessante Teil des Satzes in der Schule nicht vorkommt, weil sie Mathe nicht verstehen sollen und nur Kompetenzen lernen sollen, wissen sie zwar immer noch nicht, warum der Satz berühmt ist, aber sie kommen sich wenigstens nicht mehr dumm vor.

Man könnte am Beweis des Satzes des Pythagoras feststellen, wie die Lehrsätze der Mathematik zusammenhängen und wie man sie verwenden kann, um etwas neues aufzubauen. Man kann hier verstehen, wie exakte Folgerungen funktionieren. Man kann auch den Tonfall eines Beweises hören. Das ist sehr wichtig - z. B. dann, wenn man mit Leuten redet, die offensichtlich keine Ahnung von dem haben, was sie reden, aber alles besser wissen. Solche Leute reden ganz anders, als das in Beweisen üblich ist.

Man kann mit dem Satz des Pythagoras viel mehr machen, als ihn auf eine an der Wand stehende Leiter anzuwenden. Es gibt die Pythagoreischen Tripel, es gibt die verschiedenen Beweise (z. B. Windmühlenbeweis von Euklid), die man vergleichen kann, es gibt die Pythagoreische Schnecke, die Definition von Abstand. Es geht auch um Parkettierungen. Man kann mit Hilfe dieses Satzes die Wurzeln aller natürlichen Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir können mit dem Satz des Pythagoras Höhen berechnen und damit z. B. die Flächen von n-Ecken bestimmen usw. Außerdem können wir übergeordnete Schemata entdecken: Z. B. , wie so viel Mathematik auf einem einzigen Satz beruhen kann.

1.2.5 Wintersche Grunderfahrungen

In dem zweiten Brandbrief heißt es:[9]

> Alle drei *Winterschen Grunderfahrungen* müssen jedoch im Mathematikunterricht Berücksichtigung finden:
>
> - *Mathematik als nützliche Disziplin*
> - *Mathematik als eigenständiges geistiges Gebäude, und*
> - *Mathematik als Schule des Denkens.*

Die Mathematik als eigenständiges geistiges Gebäude fällt durch die Kompetenzorientierung und die Einteilung des Lehrstoffs in Leitideen komplett weg. In diesem Gebäude steckt aber ein großer Teil des Verständnisses von Mathematik. Gerade dieser streng logische Aufbau aller Inhalte ist etwas, was in dieser Form nur in der Mathematik erfahrbar ist. Eine solche Erfahrung ist mit einer einzigartigen Tiefe der Erkenntnis verbunden, die den heutigen Schülern vorenthalten wird.

Das gleiche gilt für die Schule des Denkens: Damit ist nicht das Auswendiglernen von Aufgabenschemata gemeint, sondern

- die Fähigkeit, komplexen Problemen mit geeigneten Methoden zu begegnen,
- das Begründen und Beweisen von Formeln, Lehrsätzen und Zusammenhängen und
- der reflektierte methodische Aufbau eines Verfahrens, Mathematik individuell zu verstehen.

All das kommt im Mathematikunterricht leider nicht vor.

[9] https://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2020/03/Brief-an-die-KMK_2020-03-05pdf.pdf

1.2.6 Was man tun kann

★ Nicht versuchen dort Mathematik zu verstehen, wo keine ist. Schüler sollen Kompetenzen an Leitideen erwerben und nicht Mathematik verstehen. Die im Unterricht gestellten Anwendungsaufgaben behandeln oft abwegige Zusammenhänge. Die Aufgabenergebnisse haben keinen eigentlichen Sinn. Deshalb muss man sich nicht dumm vorkommen oder sich schuldig fühlen, wenn man nichts versteht.

★ Wenn man weiß, dass im Mathe-Unterricht keine Mathematik vorkommt, weiß man auch, dass es eine (richtige) Mathematik gibt. Hat man Spaß an Mathematik, kann man sich außerhalb der Schule damit beschäftigen oder schulische Zusatzangebote nutzen oder initiieren.

★ Wenn man schon in der Schule sitzen muss, kann man auch das beste daraus machen. Aus dem Matheunterricht möglichst viele Erkenntnisse mitzunehmen ist für die eigene Persönlichkeit sicher förderlicher, als den Unterricht abzublocken.

★ Möchte man mehr über echte Mathematik erfahren als der Lehrplan hergibt, kann man sich vertrauensvoll an den Mathelehrer wenden. Kaum ein Lehrer ärgert sich über an Mathematik interessierten Schülern.

★ Schüler neigen dazu, Lehrern die Schuld zu geben, wenn sie etwas nicht verstehen. Aber wenn das mangelnde Verständnis an der mangelnden Mathematik im Unterricht liegt, kann der Lehrer wirklich nichts dafür.

★ Man kann immer aus den gegebenen Lehrinhalten ein individuelles Verständnis erzeugen.[10]

[10] Siehe dazu den Abschnitt „Der Schlüssel zum Verständnis“

Kapitel 2

Was heißt schon Talent?

In meinem Unterricht erlebe ich immer wieder, wie Schüler rufen: „Ich bin schlau, ich bin schlau!“ wenn sie etwas verstanden haben oder eine Aufgabe richtig gelöst haben. Oft bekommen sie richtiggehend Gefühlsausbrüche. Auch wenn es mich in dem Moment für sie freut, zeigt diese Reaktion doch auch, wie dumm sie sich vorher gefühlt haben.

Kein anderes Schulfach wird so sehr dafür verwendet, Menschen in zwei Klassen einzuteilen: Diejenigen, die Mathe verstehen, sind schlau und alle anderen sind dumm.

Wie unsinnig und zerstörerisch eine solche Einteilung ist und wie eine sachgerechte Betrachtung aussieht, die ein individuelles Verständnis von Mathematik ermöglicht, steht in diesem Kapitel.

Spoiler: Leistungsunterschiede in diesem Fach sind vor allem auf unterschiedliche Interessen und unterschiedliche Lernzeiten zurückzuführen.

2.1 Individuelles Verständnis statt Talent

Braucht man ein angeborenes Talent, um Mathematik zu verstehen?

Klare Antwort: Nein!

2.1.1 Gehirnregionen

Das Verständnis von Mathematik ist sehr oft aus sehr verschiedenen Blickwinkeln untersucht worden (wobei sich die allermeisten Studien aber auf das Rechnen und andere, vom Verständnis her sehr eingeschränkte Gehirntätigkeiten beziehen). Dabei hat sich ergeben: Wir wissen nicht genau, was im Gehirn passiert, wenn ein Mensch Mathematik versteht. Dazu ist das mathematische Verständnis viel zu komplex. Deshalb kann man auch nicht definieren, was ein mathematisches Talent sein soll.

Mit bildgebenden Verfahren der Medizin wie der Computertomographie (CT) oder der Magnetresonanztomographie (MRT) lässt sich gut beobachten, welche Gehirnregionen zusammenarbeiten müssen, damit wir rechnen können. Geht es allerdings um den weitaus vielschichtigeren Prozess des mathematischen Verständnisses wie z. B. das Erkennen der Relevanz von Mathematik in der eigenen Lebenswirklichkeit, ergibt die Zuordnung zu Hirnregionen im Hinblick auf die Lokalisierung eines Mathe-Talents keinen Sinn.

2.1.2 Fehlende Messbarkeit mathematischen Talents

Wenn es ein Mathe-Talent gäbe, müsste es messbar sein. Es müsste also Menschen mit Mathe-Talent geben, die etwas messbar besser können als Menschen ohne dieses Talent.

In der öffentlichen Wahrnehmung wird Mathematik oft mit Rechnen gleichgesetzt. Und weil sich messen lässt, wie gut jemand rechnen kann (wenn man sich auf gewisse objektive Kriterien einigen kann), wird behauptet, es gebe Menschen, die Mathematik besser verstehen als andere. Wenn aber „Mathematik verstehen" auch z. B. bedeutet, Mathematik für sich persönlich als sinnvoll zu erleben, ergibt sich die Frage, wie man das messen will.

Schauen wir uns das an einem sehr simplen Beispiel an: Wenn man eine Gleichung löst, gibt es mehrere Zusammenhänge, die man dabei verstehen kann. Man kann verstehen, was man tun muss, um die Gleichung zu lösen. Für manche Menschen ist dies für das Verständnis aber völlig irrelevant, weil sie sich dafür interessieren, warum man die Gleichung auf eine bestimmte Weise lösen kann. Auch das „Warum?" kann sehr unterschiedliche Fragen beinhalten:

- Warum kommt mit dem angegebenen Lösungsverfahren die richtige Lösung heraus?
- Warum macht man das eigentlich?
- Warum ist die Lösungsformel richtig?
- Kann man die Lösungsformel herleiten?
- Was bedeutet es, dass die Lösung richtig ist?
- Zu welchem Zweck macht man das?
- Inwieweit können Symbole auf einem Blatt Papier etwas mit der realen Welt zu tun haben?
- Kann man das an einem Standardmodell wie der Zahlengerade nachvollziehen?
- Geht das auch mit Pizza?

Wenn ein Mensch das Lösungsverfahren versteht, indem er es sich mit Pizza vorstellt, können wir dieses Verständnis quantitativ nicht dem Verständnis eines Menschen vergleichen, der das Lösungsverfahren versteht, indem er es herleitet.

Auch wenn die meisten Schüler diese Verständnisfragen nicht aufzählen können, so hat doch jeder Mensch eine sehr eigene Vorstellung davon, was Verständnis ist.

Als Nachhilfelehrer weiß ich, wovon ich rede: In meiner mehr als 30-jährigen Tätigkeit habe ich noch keine zwei Menschen getroffen, deren Auffassung davon, was für sie mathematisches Verständnis bedeutet, gleich war. Es kann also auch schon deshalb kein Mathe-Talent geben, weil die Verständnisweisen individuell so unterschiedlich sind, dass sie sich nicht einheitlich beschreiben lassen.

2.2 Leistungsvergleiche *erzeugen* Unterschiede

Wenn man zwei Menschen dieselbe Aufgabe stellt und man die Lösung bewerten möchte, wird der eine immer besser sein als der andere. Wenn zwei Menschen im 100-m-Sprint gegeneinander antreten, ist einer eher im Ziel als der andere. Wenn wir uns nun vorstellen, dass die Lieblingssportart des einen das Voltegieren ist und der andere Unterwasser-Rugby spielt, wird klar, wie wenig die 100-m-Leistung damit zu tun hat, wie sportlich die beiden Menschen sind.

Eine ähnliche Situation haben wir im Unterricht: Wenn zwei Schüler Mathematik sehr unterschiedlich verstehen und beide eine Klassenarbeit schreiben, in der etwas gerechnet werden soll, dann lassen die (vermutlich) unterschiedlichen Punkte-Zahlen in der Arbeit kaum Rückschlüsse auf deren Verständnis von Mathematik oder gar deren Talent zu.

Wenn wir dem Schüler, der weniger Punkte hat, nun noch erzählen, er sei eben mit weniger Mathe-Talent geboren, wird er sich wohl beim nächsten Mal weniger anstrengen. Damit haben wir das Gegenteil dessen erreicht, was Unterricht eigentlich leisten soll, denn das Ziel des Unterrichts sollte doch sein, dass alle Schüler ihr individuelles Verständnis von Mathematik maximal entwickeln.

Um es ganz plakativ zu sagen: Sich dumm zu fühlen verhindert, schlau zu werden.

2.3 Analyse von Klassenarbeiten

Es soll hier nicht die Diskussion um die Ziffernnoten aufgemacht werden. Hier geht darum zu zeigen, wie wenig die Note einer Klassenarbeit Ausdruck eines mehr oder weniger vorhandenen Mathe-Talents ist und welchen Einfluss sie auf das zukünftige Verständnis von Mathematik haben sollte.

Wenn ich in der Einzelnachhilfe mit meinen Schülern Klassenarbeiten analysiere, finde ich *immer* etwas, was die Schüler gekonnt haben. Das heißt: Der Schüler hat in meinem Unterricht etwas gelernt und kann in der Klassenarbeit das gelernte wieder abrufen. Damit ist der Beweis erbracht, dass dieser Schüler Mathe lernen kann und eben nicht zu dumm für Mathe ist - auch wenn die Klassenarbeit vielleicht schlecht ausgefallen ist.

Im weiteren Verlauf der Analyse lassen sich bestimmt noch Fehler finden, die zwar berechtigterweise Punkte kosten, die aber nichts mit dem eigentlichen Verständnis mathematischer Zusammenhänge des Schülers zu tun haben (oder zu tun haben müssen). Z. B.:

- Aufgabentext falsch verstanden

- mit der Zeit nicht hingekommen
- Einheiten nicht hingeschrieben
- Äquivalenzzeichen vergessen
- mit gerundeten Werten weitergerechnet
- eine Rechnung falsch in den Taschenrechner eingegeben
- einen Fachbegriff nicht gewusst
- Achsen des Koordinatensystems nicht beschriftet

Es kann durchaus vernünftig begründet werden, warum z. B. das Vergessen von Äquivalenzzeichen in Klassenarbeiten zum Punktabzug führen sollte. Trotzdem ist dieses Vergessen für das mathematische Verständnis kaum von Belang.

Danach bleiben typischerweise noch Fehler übrig, die auf mangelndes Verständnis schließen lassen und somit behoben werden sollten. Wenn meine Schüler und ich also wissen, wo die Punkte liegengelassen wurden, entwerfen wir einen Handlungsplan für die Zukunft, indem wir Fragen wie diese beantworten:

- Mit welcher Methode habe ich gelernt? Bin ich mit dieser Methode zufrieden oder sollte ich in Zukunft eine andere ausprobieren?
- Habe ich mir meine Lernzeit zwischen zwei Klassenarbeiten kurzfristig und langfristig gut eingeteilt?
- Möchte ich meine Problemlösestrategien verbessern?
- Könnte ich durch geeignetes Verhalten mehr vom Unterrichtsgeschehen profitieren?
- Wie kann ich besser mit Schwierigkeiten umgehen, für die ich nichts kann wie Unterrichtsausfall oder Krankheit?
- Wie schaffe ich es, Kleinigkeiten nicht zu vergessen?
- Kannte ich vor der Klassenarbeit meinen Lernstand gut genug?
- War mir klar, welche Themen in der Arbeit abgefragt werden sollten?
- Wie effektiv waren meine Aufzeichnungen vor der Arbeit? Konnte ich alles finden?

Ein auf einer solchen Fehleranalyse beruhender Handlungsplan ist der Gewinn, den ein Schüler sinnvollerweise aus einer Klassenarbeit ziehen kann. Ein solcher Plan wird aber nur selten erstellt. Statt dessen läuft folgendes Reiz-Reaktionsschema ab:

Kind kommt mit einer 5 nach Hause - Eltern drehen durch.

Wünschenswert für den Lernerfolg ist daher, die Note einer Klassenarbeit nicht als Bestätigung eines möglicherweise mangelnden Mathe-Talents zu sehen, sondern die sachgerechte Fehleranalyse als Anlass positiver Handlungskonsequenzen zu verwenden.

2.4 Gehirne der Zukunft

Wenn wir lernen, wird unser Gehirn umgebaut. Dabei werden nicht nur die bestehenden Gehirnzellen neu vernetzt, sondern es entstehen tatsächlich neue Zellen - ein Prozess, der bis ins hohe Alter anhält. Das konnte erst in den letzten Jahren nachgewiesen werden. Davor dachte man, im Erwachsenenalter werden keine neuen Zellen gebildet.

Das bedeutet: Selbst wenn wir die Mathematik-Leistung eines Menschen heute mäßen, sagte das wenig darüber aus, was er in Zukunft wird können können. Ob morgen einem jungen Menschen Mathe Spaß machen wird, wissen wir heute nicht, weil wir nicht wissen, was dieser Mensch heute noch lernen wird.

In meinem Unterricht sehe ich immer wieder, wie sehr sich Schüler verbessern können. Die Entwicklung kann von einer sehr unterdurchschnittlichen Leistung zu einer sehr überdurchschnittlichen Leistung gehen. Oder - um es einmal mit den Ziffernnoten zu formulieren: Ein Aufstieg von Note 6 auf Note 1 ist möglich.

Selbst wenn es also ein Mathe-Talent gäbe, müsste der Matheunterricht darauf hinarbeiten, dass die Schüler, die bisher wenig Talent haben, in Zukunft davon mehr haben. Da das Ziel des Matheunterrichts ohnehin die maximale Verbesserung der mathematischen Fähigkeiten jedes einzelnen Schülers ist, ist die Frage nach dem Talent für die tägliche Arbeit irrelevant.

2.5 Interessenunterschiede

Wenn es kein Mathe-Talent gibt, warum unterscheiden sich dann die Leistungen von Schülern derselben Klasse so stark voneinander?

Einfache Antwort: Mit dem, was uns interessiert, beschäftigen wir uns mehr als mit dem, was uns nicht interessiert. Interessieren wir uns für mathematische oder mathematik-affine Bereiche, lernen und üben wir Mathe auch außerhalb der Schule. Fazit: Die mit Abstand wichtigsten Faktoren für eine gute Mathe-Leistung sind Interesse und investierte Zeit. Ein Talent - falls es so etwas gibt - resultiert dann daraus.

Nehmen wir zwei Schüler A und B, die im Matheunterricht nebeneinander sitzen. Es wird im Unterricht besprochen, was Funktionen sind. Für den A passt alles in dieser Stunde und er weiß jetzt, wie Funktionen definiert sind. Er interessiert sich für getunte Autos. Er konnte bisher mit den ganzen Kurven (Kraft-Luft-Gemisch-Kurve, Drehmoment-Kurve, Fischhaken-Kurve), die in entsprechenden Videos von Leistungsprüfständen gezeigt werden, nichts anfangen - was sich aber heute für ihn ändert, denn jetzt weiß er, was das alles bedeutet. Deshalb schaut er sich viele Videos dazu an. Für den B lief es nicht so gut im Unterricht. Er hat inhaltlich eigentlich nichts mitbekommen und geht einfach nur mit einem schlechten Gefühl nach Hause. Am nächsten Tag sitzen beide wieder nebeneinander in der Mathestunde. Der B hat schon keinen Bock mehr, bevor die Stunde angefangen hat. Der A hingegen hat nicht nur deshalb einen Lernvorsprung, weil er sich gestern mit den Kurven beschäftigt hat, er verbindet das neu erworbene Wissen sogar mit einer monatelangen Erfahrung, nämlich den gesehenen Kurven. Außerdem freut sich A auf den Unterricht, weil er hofft, in Zukunft getunte Autos noch besser verstehen zu können. Würde in dieser Unterrichtsstunde ein Test geschrieben werden, in dem der Lehrstoff der letzten Stunde abgefragt werden würde, würde A wohl eine 1 und B eine 6 schreiben.

Stellen wir uns weiter die Situation für A ideal vor, so wird er vom Schulunterricht maximal profitieren, er wird im Alltag ganz nebenbei gelernte mathematische Denkweisen wiederfinden und üben und er wird sein erworbenes Wissen mit wachsender Begeisterung bei seinen Hobbys verwenden. Durch das bereits vorhandene Wissen wird er Neues immer schneller lernen können. Wenn es für den B maximal schlecht läuft, wird er vom Unterricht kaum profitieren. Zusätzlich wird er wegen seiner schlechten Leistungen, Druck der Eltern etc. immer frustrierter.

Nun haben wir also zwei Leute, die mit der gleichen schulischen Ausgangssituation gestartet sind und deren Leistungen innerhalb weniger Wochen nicht unterschiedlicher sein könnten. Ob der B weniger Talent als der A hat, wissen wir nicht und auch nicht, ob der A überhaupt Talent hat. Was wir aber sicher wissen, ist: Der A hat viel effektiver gelernt und hat sich um ein vielfaches länger mit Mathematik beschäftigt als der B.

Weil dieser Punkt so wichtig ist, sei noch ein Vergleich erlaubt: Es gibt in der Bevölkerung große Leistungsunterschiede was die Fähigkeit angeht, Posaune zu spielen. Viele können sogar überhaupt nicht Posaune spielen. Woran liegt das? Haben so viele Leute überhaupt kein Talent? Auch ohne das im Detail untersucht zu haben, habe ich eine Vermutung: Diejenigen, die besser Posaune spielen als andere, haben einfach mehr geübt!

Es gibt unterschiedliche Arten, die Welt zu verstehen. Es gibt Menschen, die gerne zwischen richtig und falsch unterscheiden. Und es gibt Menschen, die mehr zu einem sowohl-als-auch tendieren. Es gibt Menschen, die Dinge gerne mit Zahlen beschreiben und welche, die das unsympathisch finden. Es gibt Menschen, die ein Auto kaufen, weil eine ganze Liste technischer Daten mit den Erwartungen übereinstimmt, und es gibt welche, die ein Auto kaufen, weil ihnen die Farbe gefällt.

Und so resultieren aus den verschiedenen Sichtweisen der Welt unterschiedliche Interessen - manche dieser Interessen fördern die mathematische Denkweise und andere sind der Mathematik gegenüber eher „neutral“.

Das heißt aber nicht, dass nur Menschen mit den richtigen Hobbys Mathe lernen können. Es gibt sehr viele unterschiedliche Zugänge zu diesem Fach. Einen solchen Zugang kann sich jeder von heute auf morgen selbst schaffen. Dazu braucht es nur ein paar W-Fragen: Wer? Wie? Was? Wieso? Weshalb? Warum?[1]

Der Lehrer sagt, die Klasse sei zu laut? Ok, was ist „laut“ eigentlich? Wie misst man das? Was ist ein Dezibel?[2]

Die Farben meiner Videos gefallen mir nicht? Ok, was ist Farbe eigentlich? Wie macht das Auge aus einer elektromagnetischen Welle eine Farbe? Was hat das mit einer Schuhsohle (CIE-Normfarbtafel[3]) zu tun?

Mein Rechner rechnet mir zu langsam? Ok, was ist Rechnen eigentlich? Was sagt die Mathematik über das Rechnen? Und warum fängt man dabei mit primitiv rekursiven Funktionen an?[4]

Guter Unterricht erhöht die Unterschiede, vor allem deshalb, weil die Schüler mit verschiedenen Voraussetzungen und verschiedenen Interessen in den Unterricht kommen. Die einen, die sich für Mathe interessieren, können sich verbessern. Die anderen arbeiten wirklich daran, was sie nicht verstanden haben. Meiner Erfahrung nach müsste man bei einigen Schülern dann bei der Grundschulmathematik anfangen. Wenn Matheunterricht also genau das leistet, was er soll, dass sich nämlich alle Schüler entsprechend ihres jetzigen Lernstands verbessern, sitzt dann ein Schüler, der sich mit Infinitesimalrechnung beschäftigt neben einem, der das kleine Einmaleins übt. Meinem Eindruck nach sind in der politischen Debatte über gute Bildung solche Unterschiede nicht mitgedacht oder sogar unerwünscht, denn man möchte sich eigentlich nur um die Schüler kümmern, die einen - wie es so schön heißt - erhöhten Förderbedarf haben.

Sehr wichtig zu bemerken ist (im Anschluss an das im vorherigen Kapitel Ausgeführte), dass im Schulunterricht etwas sehr spezielles gezeigt wird, was „Mathematik“ genannt wird. Dabei geht es vor allem um Aufgaben-Lösungs-Rituale. Zur richtigen Mathematik hingegen gibt es nicht nur verschiedene Zugänge wie z. B. über die bildende Kunst oder die Musik.[5]

Es lassen sich auch aus ganz allgemein gestellten Fragen Zugänge zur Mathematik finden: Kann die Logik auch falsch sein? Kann man Logik logisch beweisen? Wie kann man etwas über alle unendlich vielen Zahlen wissen? Oder weiß man das gar nicht? Wenn wir eine Umfrage durchführen, um etwas über alle Menschen zu erfahren, aber nur einen kleinen Teil ihnen befragen, was wissen wir dann über die Menschen, die wir nicht gefragt haben? Was sind die aktuellen Forschungsthemen der Mathematik? Welche Mathematik werden wir in Zukunft haben? Gibt es ungelöste Probleme der Mathematik? Was macht ein Mathematiker eigentlich so den ganzen Tag?

Die „richtige“ Mathematik steht wirklich in keiner ernsthaften Beziehung zu dem, was in der Schule gemacht wird. In allen deutschen Lehrplänen kommt nicht eine

[1] In einem Lied geht der Text weiter mit: „Wer nicht fragt bleibt dumm.“

[2] Es ist das 10-fache des dekadischen Logarithmus des Quotienten aus den Quadraten des Ausgangs- und Eingangssignals.

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Farbs%C3%A4ttigung

[4] https://faculty.math.illinois.edu/ vddries/recursion.pdf

[5] Man beachte hier den Song „Lateralus“ der Band „Tool“, die quasi die Fibonacci-Zahlen vertont hat.

einzige algebraische Struktur vor (Gruppe, Ring, Ideal, Modul, Körper). Alles, was in der Universitätsmathematik „Theorie“ im Namen trägt (Funktionentheorie, Beweistheorie, Komplexitätstheorie, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen) ist um Welten verschieden von der Schulmathematik.

Wenn wir hier uns also Gedanken über mathematisches Talent machen, reden wir über das, was an Schulen passiert und nicht über die eigentliche Mathematik.

2.6 Mathe lernen

2.6.1 Kann wirklich jeder Mensch Mathe lernen?

Ja. Jeder Mensch, der in der Lage ist, sich halbwegs freiwillig für Mathematik zu interessieren, sich die Zeit nimmt, zu lernen und vielleicht noch jemanden hat, den er mal etwas fragen kann, kann auch die Mathematik bis weit über das Abiturniveau hinaus verstehen.

Man kann die Frage: „Kann jeder Mensch Mathe?“ vergleichen mit der Frage: „Ist jeder Mensch sportlich?“ Nun, im Moment ist sicher nicht jeder Mensch sportlich, aber jeder, der jetzt anfängt, jeden Tag eine Stunde zu trainieren und vernünftig zu essen, wird in einem Jahr einen sportlichen Körper haben. Voraussetzung dafür ist sicher auch, eine Sportart zu finden, die individuell passt - was in der Mathematik nicht anders ist: Es gibt sehr viele Wege, Mathematik zu verstehen. Wer (vielleicht auch mit etwas Beratung) seinen Weg findet und jeden Tag eine Stunde effektiv lernt - und dabei meine ich ausdrücklich *nicht* den Schulunterricht - wird in einem Jahr erstens mindestens auf 1-er-Niveau sein und zweitens tatsächlich auch etwas von der Mathematik verstanden haben.

Ich habe in meinem Unterricht immer wieder gesehen, dass jeder Mensch Mathe lernen kann. Und ich mache das lange genug, um das beurteilen zu können. Ich habe auch junge Leute erlebt, die als völlig untalentiert galten und es trotzdem sehr gut geschafft haben. Von daher ist das hier alles keine theoretische Überlegung, sondern ich spreche aus Erfahrung.

2.6.2 Kann jeder Mensch Mathematiker werden?

Eine andere Frage ist, ob jeder Mensch ein guter Mathematiker werden kann. Zur Beantwortung muss man wissen, dass im Studium eine spezielle Sicht der Mathematik gezeigt wird. Man hat nicht die Möglichkeit, seinen eigenen Weg durch dieses Fach zu finden, sondern sollte so ticken, wie es gefordert ist. Außerdem sollte man bereit sein, für den Rest seines Lebens sich acht Stunden am Tag unter Zeit- und Effektivitätsdruck mit Mathematik zu beschäftigen.

2.6.3 Frauenanteil in den MINT-Fächern weltweit

Man kann weltweit folgendes Phänomen beobachten: In Ländern, in denen Frauen strukturell benachteiligt sind, ist der Frauenanteil in den MINT-Fächern, also Mathematik, Ingenieurwissenschaften, Naturwissenschaften und Technik, viel höher als in Ländern mit gleichberechtigter Gesellschaftsstruktur.[6] [7] Der gleiche Zusammenhang lässt sich in Bezug auf die Beliebtheit des Fachs und in Bezug auf das Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten feststellen.[8] Möglicherweise ist das so, weil Frauen Berufsabschlüsse in MINT-Fächern als Chance sehen, sich in einer männerdominierten Gesellschaft durchzusetzen. Die Anteile unterscheiden sich dabei erheblich. Z. B. absolvieren in Finnland und Norwegen ca. 20% der Frauen ein Studium im MINT-Bereich, während es in Algerien über 40 % sind.

Falls man aber ein Mathe-Gen braucht, um in einem mathematisch orientierten Beruf arbeiten zu können, müsste erklärt werden, warum Frauen in Finnland, den Niederlanden, der Schweiz und in Deutschland dieses Gen nicht haben und woher dieses Gen bei Frauen in Algerien, Tunesien, Albanien, der Türkei und den Vereinigten Arabischen Emiraten plötzlich gekommen ist.

2.7 Andere Faktoren

Die Leistungsunterschiede zwischen Schülern liegen zum großen Teil an äußeren Faktoren: Elternhaus (man vergleiche allein schon die Bildungssprache mancher Eltern mit der Dauer-TV Berieselung in typischerweise bildungsfernen Haushalten). Außerdem wird von Eltern vorgelebt, wie wichtig - oder für manche: unwichtig - Bildung ist.

Es gibt Menschen mit unterschiedlich starken Bildungsinteressen. Es ist einfach eine Frage der Energie, die man persönlich in diese Bildung hineinstecken möchte. Manche Menschen möchten am liebsten den Kopf leer machen und den ganzen Tag meditieren. Da wird es dann schwierig mit der Mathematik. Es gibt Menschen, deren Ziel es ist, mit einem Glas Rotwein in der Hand auf einer Blumenwiese in der Provence sitzend den Sonnenuntergang zu genießen. Für andere besteht das Glück darin, den stokesschen Integralsatz zu verstehen. Diese Unterschiede haben nichts mit Talent zu tun.

Junge Menschen haben immer weniger Bildungsinteresse. Oder anders gesagt: Sie nehmen Bildung nicht als etwas positives wahr. Auch Werte, die damit zu tun haben wie Toleranz, ein wertschätzend-konstruktiver Umgangston etc. erodieren. Wir sind in den letzten Jahren von einer Wertegesellschaft zu einer Moralgesellschaft gewechselt.

Es gab einmal eine Generation von Kindern, denen man sagte, sie müssten viel lernen, damit sie es später mal besser haben. Zur Zeit gibt es aber auch Kinder und Jugendliche, die sich in ihrem Leben eigentlich nicht mehr verbessern können. Sie kommen ohne großen Aufwand durch die Schule, haben keinen Stress mit ihren Eltern, sind wohlhabend, fliegen mehrere Male pro Jahr in den Urlaub und haben alle

[6] https://www.theatlantic.com/science/archive/2018/02/the-more-gender-equality-the-fewer-women-in-stem/553592/

[7] https://www.oecd.org/gender/data/why-dont-more-girls-choose-stem-careers.htm

[8] https://largescaleassessmentsineducation.springeropen.com/articles/10.1186/s40536-019-0078-1

Freiheiten, die man sich nur wünschen kann. Einen gut bezahlten Job werden sie mit Vitamin B bekommen und sie werden irgendwann das Haus ihrer Eltern erben. Profunde Kenntnisse in Mathematik sind da eher störend.

Menschen sind unterschiedlich neugierig. Das hat einen weitaus größeren Einfluss auf die Mathematik-Fähigkeiten als die aktuell vorliegende „Hardware“ des Gehirns.

Es gibt so viele Wege, Mathe zu verstehen. Meistens wird aber nur ein Weg angeboten. Eigentlich sollten von Lehrern mehrere Methoden angewendet werden, aber das macht meiner Erfahrung nach kaum jemand. Ein Schüler, der mit der angebotenen Methode gut klar kommt, lernt halt mehr als einer, der damit nicht klar kommt.

Es ist für gute Noten in Klassenarbeiten oder Klausuren recht hilfreich, in Aufgabenschemata zu denken. Fragt man zu sehr nach dem Sinn von Aufgaben oder versucht man zu sehr, die eigentliche Mathematik hinter den Aufgaben zu verstehen, hält das nur auf. Es haben also solche Schüler einen Vorteil, die sich ganz gerne sagen lassen, was sie machen sollen und die auch ansonsten nur wenige Fragen stellen.

Menschen, die sich für Mathematik interessieren, lernen langsamer, auch deshalb, weil sie etwas anderes unter „Verständnis“ verstehen als das bloße Aufsagen einer Formel. Was heißt eigentlich lernen? Die Formel aufsagen können? Wissen, warum sie richtig ist? Die geschichtliche Bedeutung kennen? Jeder versteht unter „verstehen“ etwas anderes. Deshalb ist das nicht vergleichbar.

2.8 Was man tun kann

- ★ Die Mathe-Note hat nichts mit schlau oder dumm zu tun. Das sollte man verinnerlichen.
- ★ Unsere Gehirne ändern sich beim Lernen. Wer „dumm“ ist kann schlau werden. Das ist der Sinn von Schule.
- ★ Wenn man mit der eigenen Mathe-Leistung nicht zufrieden ist, kann man sich darauf konzentrieren, diese Leistung zu verbessern statt sich mit anderen zu vergleichen.
- ★ Wer in der Lage ist, den Entschluss zu fassen, die eigene Mathe-Leistung zu verbessern, ist auch bei geeignetem Training in der Lage dazu.
- ★ Sich ins Gedächtnis zurückrufen, was man schon alles verstanden hat.
- ★ Sich mit sich selbst vergleichen: Was konnte ich vor zwei Wochen noch nicht? Was habe ich seitdem verstanden?
- ★ Klassenarbeiten individuell besprechen. Warum habe ich das eine gekonnt und das andere nicht? Was kann ich bei der Vorbereitung der nächsten Klassenarbeit besser machen?

★ Sich darüber bewusst sein, dass die Version eines Themas, die aktuell im Unterricht besprochen wird, vielleicht nicht die Version ist, die zu einem selbst passt.

★ Sich vorstellen, wie man denn gestrickt sein muss, damit diese Version passt. Dazu müsste man sich an andere Personen hineinversetzen.

★ Sich überlegen, wie eine Erklärung aussehen müsste, damit sie zu einem selbst passt.

Kapitel 3

Erklärung? Welche Erklärung?

3.1 Keine Erklärungen im Unterricht

3.1.1 Die Kehrwertregel

Wenn Leute mir sagen, „Ich habe Mathe nie verstanden.“, spreche ich sie gerne auf die Kehrwertregel an.

Die Regel lautet: Man teilt durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. Also, wenn man rechnen möchte:

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{5}$$

rechnet man statt dessen

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3}$$

Das geht, weil bei beiden Rechnungen das gleiche herauskommt.

Dann frage ich also: „Kennst du die Kehrwertregel?“

„Ja.“

“Hat man dir erklärt, *warum* sie gilt?“

„Nein.“

„Siehste“ sage ich dann, „deshalb hast du diese Regel wohl auch nicht verstanden.“

3.1.2 Ohne Erklärung kein Verständnis

Das fatale an dieser Situation ist: Wenn Menschen Mathe nie verstanden haben, denken sie meist, es liege daran, dass sie für die Mathematik nicht schlau genug seien. Aber vielleicht haben sie einfach deshalb die Mathematik nicht verstanden, weil sie nie erklärt wurde.

Verständlicherweise kommen Menschen auf diese Möglichkeit nicht von selbst, obwohl die Tatsachen für sich sprechen. Denn wenn ich Menschen danach frage, was denn in ihrem Matheunterricht erklärt wurde, können sie sich zwar an Lehrinhalte wie die binomischen Formeln, die pq-Formel oder an Ableitungen erinnern - aber eben nicht an deren Begründungen

3.1.3 Lehrer kennen Erklärungen nicht

Wenn ich Mathelehrer frage, welche Erklärung der Kehrwertregel sie ihren Schülern anbieten, erhalte ich oft die Antwort: „Erklärung? Welche Erklärung?“ Sie sagen mir dann z. B., dass man den zweiten Bruch umdrehen und dann multiplizieren muss, aber nicht, *warum* dann das richtige Ergebnis herauskommt. Tatsächlich konnte mir kein einziger Mathelehrer, den ich darauf angesprochen habe, aus dem Stand eine anschauliche Erklärung der Kehrwertregel liefern. Und wie die zitierte Antwort vermuten lässt, gibt es auch Mathelehrer, die die Frage erst gar nicht verstehen.Vielleicht kann man zur Ehrenrettung anführen, dass die Lehrmeinung in Deutschland sagt, eine anschauliche Erklärung könne es gar nicht geben.[1] Trotzdem ist das Netz voll von Videos, in denen die Kehrwertregel anschaulich erklärt wird - allerdings in englischer Sprache. Ein Artikel, in dem eine anschauliche Begründung der Kehrwertregel für allgemeine Brüche gezeigt wird, erschien in der Zeitschrift „mathematik lehren“.[2]

Manchmal reagieren Lehrer auf meine Fragen mit der Aussage: „Ich muss mich vor Schülern nicht auch noch dafür rechtfertigen, dass die Mathematik so ist, wie sie ist.“

3.1.4 Die Aufgaben eines Lehrers

Dazu muss klargestellt werden: Die Aufgabe von Mathelehrern ist nicht, Mathematik zu erklären oder zu begründen. Statt dessen sollen sie Schülern helfen, „Kompetenzen“ zu erwerben, welche die Schüler durch das Lösen bestimmter Aufgaben nachweisen sollen. Etwas reduziert formuliert ist der Lehrer also dazu da, Schüler dazu zu bringen, die richtigen Lösungen künstlicher Aufgaben hinzuschreiben.

3.2 Keine Erklärungen in Erkläraufgaben

Nun mag man einwenden, dass aber laut Kultusministerkonferenz (KMK) eine der zu erwerbenden Kompetenzen das mathematische Argumentieren sei - was ja sicher mit dem erklären und begründen von Mathematik zu tun habe.

3.2.1 Beispielaufgabe: Argumentieren, Pizzarand

Bevor wir uns eine Beispielaufgabe für Klasse 9 zum Argumentieren im Anforderungsbereich II ansehen, seien die Ausführungen der KMK zitiert.[3] Gegliedert sind

[1] Padberg, Friedhelm & Wartha, Sebastian, Didaktik der Bruchrechnung, Springer Verlag GmbH Deutschland, 5. Aufl., S. 132, 134, 137, 144, 147

[2] Wabnik, Martin & Dannwerth, Ann-Kathrin: Die Kehrwertregel verstehen, in: mathematik lehren 226 (2021), S. 50 - 51

[3] https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

die Kompetenzen in die Anforderungsbereiche I bis III, wobei „Anspruch und kognitive Komplexität“ von I bis III zunehmen. Für den Anforderungsbereiche II „Zusammenhänge herstellen“ führt die KMK aus:

> Dieser Anforderungsbereich umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Darstellen und Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Angewandt auf die Kompetenz „Argumentieren“ bedeutet das: „Schülerinnen und Schüler

- entwickeln und erläutern überschaubare mehrschrittige Argumentationen,
- erläutern Lösungswege und prüfen sie u. a. auf Konsistenz,
- bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes,
- erläutern mathematische Zusammenhänge, Ordnungen und logische Strukturen, ...“

Die hier zu besprechende Beispielaufgabe dazu kann beim Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen[4] heruntergeladen werden und heißt „Mehr Pizza“. In der Aufgabe geht es um eine kleine Pizza, um ein Viertel einer großen Pizza und um die Frage, ob die ganze kleine Pizza oder das Viertel der großen Pizza weniger Rand hat.

Zunächst soll eine Skizze einer runden Pizza mit Rand angefertigt und der Umfang markiert werden. Bevor nun argumentiert werden soll, ist folgendes gegeben: der Umfang der kleinen Pizza; dieser ist gleich $62,8\ cm$. Ausgerechnet wurde auch schon der Umfang der großen Pizza. Dieser wurde durch 4 geteilt und das Ergebnis ist $31,4\ cm$. Nun soll die Frage „Welche von beiden hat weniger Rand?“ durch eine geeignete Argumentation beantwortet werden.

Diese Aufgabe habe ich Schülern vorgelegt, die alle mit Unverständnis reagierten und dem Sinne nach sagten: „Hä? Was soll ich denn jetzt argumentieren? Dass $31,4$ kleiner ist als $62,8$?“

Die richtige Lösung, mit der die Kompetenz „Argumentieren“ im Anforderungsbereich II in Klasse 9 nachgewiesen werden soll, besteht in dem Hinweis:

Der Umfang einer Pizza entspricht dem Rand einer Pizza.

Damit können wir festhalten, dass es beim Argumentieren sicher nicht um das begründen oder gar beweisen mathematischer Regeln oder Lehrsätze geht, sondern um - etwas anderes. Wenn die Aufgaben, auf die ein Lehrer seine Schüler vorbereiten soll, so aussehen, ist es wohl verständlich, dass er die knapp bemessene Unterrichtszeit nicht auch noch damit verbringen möchte, Mathematik zu erklären oder zu begründen. Wenn das größte Ziel der Schüler ist, durch die Prüfungen zu kommen, wäre das vielleicht sogar unfair ihnen gegenüber.

[4]https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/WeiterentwicklungBiSta/Lernaufgaben/MatheSekI/ ?view=preview

3.3 Erklärungen der Kehrwertregel

Werfen wir trotzdem einen Blick auf das, was man alles erklären könnte. Betrachten wir dazu wieder die Kehrwertregel: Welche Erklärungen gibt es in diesem Zusammenhang?

Zum einen gibt es formale Beweise im Sinne von Gleichungsketten, an deren Anfang das Teilen durch einen Bruch und an deren Ende das Multiplizieren des Kehrwerts dieses Bruchs steht. Außerdem gibt es anschauliche „Beweise", in denen man meist Zeichnungen verwendet, innerhalb derer Flächen oder Strecken geschickt so eingeteilt werden, dass die Gültigkeit der Kehrwertregel direkt sichtbar wird. Weiter gibt es den Fragekomplex: „Geht das auch mit Pizza?" Dahinter steckt die Überlegung, ob sich handfeste Objekte unserer Lebenswirklichkeit so verhalten wie in der Mathematik angegeben. Im Fall der Kehrwertregel sind das z. B. die Bruchstreifen, Behälter mit verschieden großen Grundflächen, in die Wasser gegossen wird und es geht auch mit Pizza, die auf Teile von Tellern verteilt wird.

Man könnte fragen, was mit dem Dividieren eines Bruchs überhaupt gemeint ist und/oder ob sich das verbalisieren lässt. (Antwort: Ja. Im obigen Beispiel: Welcher Teil von drei Fünfteln passt auf zwei Siebtel?) Natürlich ist dann auch noch interessant, wie sich das Ergebnis der Division in deutscher Sprache anhört. (Zehn Einundzwanzigstel von drei Fünfteln passen auf zwei Siebtel.)

Manche Fragen sind auch grundsätzlicher Natur: Wie kann man überhaupt wissen, dass die Kehrwertregel richtig ist, wenn sie doch für unendlich viele Zahlen gelten soll und man die Regel nicht mit allen Zahlen ausprobieren kann? Warum teilt man eigentlich durch Brüche? Wäre die Welt nicht besser, wenn man das einfach lassen würde? Und warum rechnet man mit Brüchen, wenn man doch Dezimalzahlen viel besser in den Taschenrechner eingeben kann?

Wie ich von meinen Nachhilfeschülern weiß, werden solche Fragen in der Schule normalerweise nicht beantwortet (oder möglicherweise bekomme ich aber auch keine Nachhilfeschüler von Lehrern, die diese Fragen im Unterricht beantworten). Wenn ich Lehrer auf unterschiedliche Erklärungsmöglichkeiten anspreche, sagen mir viele ganz klar: „Ach, das interessiert die Schüler doch nicht." Nun, meine Schüler kommen gerne zu mir (und deren Eltern zahlen auch noch viel Geld dafür), weil ich zusammen mit meinen Schülern die jeweils für sie passende Antwort auf solche und ähnliche Fragen finde. Wie so oft in diesen Diskussionen stelle ich am Ende einfach nur fest, dass einige Lehrer und ich in verschiedenen Welten leben bzw. dass die Schüler, die am Vormittag nichts von Mathe wissen wollten, am Nachmittag plötzlich viele Fragen haben.

3.4 Konsequenzen fehlender Erklärungen

Dass nicht alle individuellen Fragen von 20 – 30 Schülern in der knapp bemessenen Unterrichtszeit von einem einzigen Lehrer beantwortet werden können, mag verständlich sein. Zumindest teilweise lässt sich das Problem sehr einfach lösen, indem man nämlich den Schülern die Quellen nennt, wo Antworten auf deren Fragen zu finden sind.

Viel schlimmer finde ich persönlich, dass Erklärungen ebenso wie die fachliche Beantwortung von Schülerfragen als Unterrichtsinhalte von der Kultusministerkonferenz gar nicht vorgesehen sind. Das, was an Mathematik Spaß macht, ist zum großen Teil das Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Und genau dieser Spaß soll eben nicht stattfinden. Der Schüler soll nur die von Mitarbeitern der Kultusministerien vorgesehenen Antworten auf künstliche Fragen ausspucken. Wenn man als Schüler also mit guten Noten durch die Schule kommen möchte, hilft kein Rebellieren, sondern es hilft, einfach nur zu machen, was einem gesagt wird, nicht zu viel nachzudenken und vor allem keine Fragen zu stellen.

Gesellschaftlich gesehen ist das - meiner Meinung nach - verheerend. Unterrichtsmethoden und -inhalte werden in Deutschland von Bürokraten festgelegt, die vermutlich in bester Absicht handeln. Dabei geht ihnen aber die kraftvolle Perspektive, die die Mathematik mit ihrer scharfsinnigen Logik und dem Imperativ des Verständnisses unabhängig von Geld, Macht, Herkunft, Geschlecht etc. für junge Menschen bereithält, völlig ab. So etwas passt eben in kein Formular.

3.5 Eine völlig neue Perspektive

3.5.1 Minus mal Minus definieren

Wir haben alle in der Schule gelernt, Minus mal Minus sei gleich Plus. Also z. B. es sei $-3 \cdot (-2) = +6$ oder es sei $5 - (-2) = 5 + 2$. Dabei steht $-(-2)$ für $-1 \cdot (-2)$. Das doppelte Minus ist also nur eine Abkürzung für Minus mal Minus. Soweit ich von meinen Schülern höre, wird im Unterricht normalerweise nicht erklärt, warum Minus mal Minus gleich Plus sein soll. Oft habe ich versucht, mit Lehrern darüber zu sprechen, wie sie das in ihrem Unterricht erklären - anfangs noch in der Hoffnung, mir Erklärungen abgucken zu können. Leider musste ich feststellen, dass fast alle Lehrer, mit denen ich darüber gesprochen habe, keine Erklärung dazu kannten. Und nur um es ganz deutlich zu machen: Die allermeisten waren der Überzeugung, es könne auch keine Erklärung geben, weil „das halt einfach so festgelegt ist.“ Das ist zwar nicht ganz falsch, aber natürlich gibt es trifftige Gründe für Festlegungen, wie sie in der heutigen Mathematik Bestand haben.[5] Wenn ich in der Nachhilfe Schüler unterrichte, die eine solche Erklärung nicht bekommen haben, stelle ich aber meistens bei ihnen ein gewisses Unwohlsein fest. Diese Rechenweise ist anders, als Schüler das gewohnt sind. Sie wirkt willkürlich und widersprüchlich. Wenn man 5 Tomaten hat und 2 Tomaten hinzu tut, hat man 7 Tomaten. Aber wie soll man $-(-2)$ Tomaten hinzu tun? Es wirkt so, als könne es eine solche Zahl nicht geben. Das ist ein entscheidender Punkt in der mathematischen Entwicklung eines jeden Menschen: Wird „Minus mal Minus ist Plus“ begründet oder nicht? Ist Mathematik sinnvoll und verstehbar oder muss man da einfach machen, was einem gesagt wird?

[5] Siehe dazu den Abschnitt „Warum ist Minus mal Minus Plus?“

Dabei geht es um ein tiefliegendes Problem: Bisher haben Schüler Mathematik als etwas kennengelernt, was einfach stimmt. $3 \cdot 4$ ist 12. Das ist so, weil die Welt halt so ist, wie sie ist. Mit dem „Minus mal Minus“ ist das aber völlig anders: Der Sinn eines solchen Ausdrucks ergibt sich nicht von allein; man muss definieren, was ein solcher Ausdruck bedeuten soll. Leider ist das eine Überlegung, die im Schulunterricht - soweit ich weiß - nicht vorkommt. Wenn ich meinen Schülern davon erzähle, fallen sie meist aus allen Wolken: „Wie?! Man kann in Mathe einfach was definieren?“ Ja genau! Kann man! Oftmals ergibt sich dann die Anschlussfrage: „Darf ich das auch?“ Ja klar! Jeder Mensch darf das.

3.5.2 Mathe selbst definieren

Man muss noch ergänzen, dass sich bestimmt nicht jede beliebige Definition in der Mathematik-Welt durchsetzen wird. Aber wenn eine Definition ein Problem löst oder einfach interessant ist oder irgendwelche Vorteile bringt, kann es gut sein, dass sie sich durchsetzt und möglicherweise zu einem neuen Standard führt. Für mich persönlich ist es immer wieder faszinierend, jungen Menschen dabei zusehen zu dürfen, wie sich jetzt gerade deren Sicht auf die (Mathematik-)Welt ändert. Manch ein Schüler fragt dann: „Also wenn ich jetzt was ganz schlaues definiere, dann steht das irgendwann in den Schulbüchern und dann müssen alle Kinder auf der Welt so rechnen, wie ich das gesagt habe?“ Ja, so ist das. In Bayern wurde z. B. vor ein paar Jahren ein neues Verfahren zur schriftlichen Addition eingeführt. Hätte dieser Schüler dieses Verfahren erfunden, müssten dann jetzt zumindest alle Kinder in Bayern dieser Erfindung entsprechend rechnen.

Damit ändert sich die Perspektive der Schüler um 180°: War Mathematik vorher etwas, bei dem man machen musste, was einem gesagt wird, ist sie nun etwas, was man mitgestalten kann. Das Mitgestalten der Mathematik liegt dabei noch nicht einmal in utopischer Ferne. Ich habe schon des öfteren Erklärungsmöglichkeiten, die von Schülern in meinem Unterricht vorgeschlagen wurden, in meinen Videos verarbeitet, wovon dann sicher viele andere Schüler profitiert haben.

Interessanterweise wissen selbst einige Mathelehrer nicht, dass die Mathematik ständig weiterentwickelt wird und auch Gegenstand der aktuellen Forschung ist.

3.5.3 Mathe ändert sich

1) Was in Schulbüchern steht, wird immer wieder geändert. Und es sind keine Kleinigkeiten: In den 70er Jahren stand noch Mengenlehre in den Schulbüchern. Das war grundsätzlich was anderes. Da wurde der Körper der rationalen Zahlen über Gruppen und Ringe entwickelt oder es wurde die Gleichmächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der natürlichen Zahlen über das Cantorsche Diagonalverfahren bewiesen.

Es ändert sich auch die Auswahl des Lehrstoffs und das, was mit diesem Lehrstoff gekonnt werden soll. Das, was man unter Verständnis versteht, ändert sich ebenfalls. Die Matrizenrechnung ist erst vor ein paar Jahren in Schulbüchern aufgetaucht. Mittlerweile ist sie aus manchen schon wieder entfernt worden. Die darstellende Geometrie ist zur Gänze aus dem Lehrplan verschwunden, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik immer stärker wurde.

2) Mathematiker werden dafür ausgebildet, die Mathematik weiterzuentwickeln. Dazu gehören auch neue Definitionen, Sätze und Beweise. So entsteht täglich neue Mathematik.

3) Vor wenigen Jahrzehnten hat der Taschenrechner von Grund auf verändert, was in der Schule gelehrt und gelernt wird. Das Kopfrechnen wurde zurückgedrängt (sodass heutige Abiturienten z. B. $17+38$ in den Taschenrechner eintippen müssen) und der Rechenschieber hatte ganz ausgedient.

4) Es ist noch nicht lange her, da haben Videos die Art geändert, wie Mathematik präsentiert wird. Leider ist dadurch auch das fachliche Niveau, auf dem etwas „erklärt" wird, in vorher unvorstellbare Tiefen gesunken. Aber das kann ein Schüler ja auch als Ansporn begreifen, es besser zu machen. Jeder Schüler kann sein Handy zücken und ein Video aufnehmen, in dem er der Welt seine Sichtweise der Mathematik darstellt. Die enormen Möglichkeiten von Mathematik-Videos sind bisher kaum umgesetzt worden.

5) Künstliche Intelligenz in Form von z. B. Chatbots wird die Mathematik ebenfalls verändern. Es wird sicher nicht mehr lange dauern, bis man sich die Lösung jeder Aufgabe, die einem Schüler gestellt werden kann und die man schriftlich bearbeiten kann, von einer künstlichen Intelligenz auch auf deutsch Anzeigen lassen kann. Das wird nicht nur die Art und Weise, wie wir Mathematik lernen, verändern, sondern vermutlich auch das, was Schüler sinnvollerweise in der Schule an Mathematik lernen sollten (also das Curriculum). Da die künstlichen Intelligenzen zur Zeit auch mit Nutzerdaten trainiert werden, ist jeder Mensch, der einen mathematischen Prompt z. B. in einen Chatbot eingibt, an der Entwicklung der Mathematik beteiligt - ob er nun will oder nicht.

3.5.4 Individuelles Verständnis

Hat Sie jemals ein Mathelehrer gefragt, mit welcher Erklärung *Sie* denn das Thema am besten verstehen? War es mal im Matheunterricht Thema, wie unterschiedlich das ist, was jeder Schüler für sich unter Verständnis versteht? - Vermutlich nicht. Das wäre nämlich sehr ungewöhnlich, was man schon daran erkennen kann, dass die Frage nach „den unterschiedlichen Verständnissen der einzelnen Schüler" ausgesprochen komisch klingt. Das Fehlen jeglicher individuellen Erklärung führt nicht nur dazu, dass viele Menschen Mathe nicht verstehen, sondern es ist zudem frustrierend, niemals nach der eigenen Meinung gefragt zu werden. So entwickeln Menschen eine richtiggehende Abneigung gegen die Mathematik.

Mathematisches Tagebuch Es gibt viele Möglichkeiten, das eigene Bild der Mathematik zu entwerfen. Eine davon ist, aufzuschreiben, was man denkt - also eine Art detailliertes mathematisches Tagebuch. Allein schon wenn man den eigenen Verstehens- oder Problemlösungsprozess schriftlich festhält, schafft man etwas eigenes. Es wäre erstrebenswert, wenn Schüler das auch als Möglichkeit der Kreativität begreifen. Es ist für Schüler sehr erhebend, wenn sie nach zwei Wochen auf ihre Aufzeichnungen schauen und sich kaum vorstellen können, was sie mal *nicht* verstanden haben.

Erklärungen auswählen Eine für Schüler recht komfortable Art, die individuell passende Erklärung zu finden, ist, eine solche aus einer Liste angebotener Erklärungen auszuwählen.

In der Liste könnten dann nicht nur Beweise und Veranschaulichungen enthalten sein, sondern auch Fragen beantwortet werden wie: Was ist das eigentlich (Definition, Verfahren, Lehrsatz, Vereinbarung, ...)? Warum funktioniert das? Welche nachprüfbaren Voraussagen macht ein Lehrsatz? Wozu braucht man das? Warum ist das sinnvoll?

3.5.5 Termumformungen: Distributivgesetz

Schauen wir uns das bisher zusammengetragene noch an einem konkreten Beispiel an: das Distributivgesetz. Es lautet:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Was könnte in diesem Zusammenhang erklärt werden? Z. B., dass das Distributivgesetz für eine ganze Reihe von Formeln steht. Oder - anders gesagt - dass sich mit dem Distributivgesetz unendlich viele weitere richtige Formeln erzeugen lassen. Davon haben Sie nie gehört? Tja, vielleicht ist es in Ihrer Schulzeit so auch gar nicht erklärt worden.

Wenn wir die Variablen a, b und c durch Terme ersetzen, entsteht eine neue Formel. Wir können z. B. a durch den Term $2f$, b durch den Term gh und c durch den Term $3h$ ersetzen. Dann erhalten wir:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$2f \cdot (gh + 3h) = 2f \cdot gh + 2f \cdot 3h$$

Abb. 3.1 Neue Formel dank Distributivgesetz

Zum einen sehen wir an diesem Beispiel, was in der Schule normalerweise *nicht* erklärt wird. Statt ein mathematisches Gesetz zu betrachten und sich vielleicht zu überlegen, was man damit alles schönes machen kann, ist von „Klammern auflösen“ die Rede und dass man „bei einem Minuszeichen vor der Klammer aufpassen“ muss. Dadurch geht die ganze Mathematik, die in diesem Gesetz steckt, verloren. Würde es klar als Gesetz kommuniziert werden, könnte man sich fragen, warum dieses Gesetz richtig ist. Man könnte nach anschaulichen Begründungen oder auch formalen oder rechnerischen Begründungen suchen. Wenn man dabei wirklich weit vordringen wollte, würde man dann feststellen, dass dieses Gesetz in der Universitätsmathematik überhaupt nicht begründet wird - was wiederum ein Ansatz für weitere höchst nichttriviale Überlegungen sein könnte. Weiter führt die Suche nach einer Begründung zu einem wiederum sehr tiefgründigen Denkansatz: Sind die Addition und die Multiplikation verschiedene Rechnungen oder ist die Multiplikation einfach nur eine Verallgemeinerung der Addition (so, wie vermutlich jeder Schüler das in der Grundschule gelernt hat)? Je nachdem, wie man das auffasst, kommt man zu zwei komplett unterschiedlichen Sachverhalten, die zu begründen sind. Würde man auch noch die Fachbegriffe „Summe“ und „Produkt“ nennen, könnte man das Distributivgesetz als eine Möglichkeit sehen, aus einer Summe ein Produkt zu machen und umgekehrt. Woraus sich die Frage ergibt, welche solcher Möglichkeiten die Mathematik noch bereit hält.

Auch wenn einige hier beschriebene Ansätze weit über den Schulstoff hinaus gehen, so ist es meiner Meinung nach wichtig, auch solche Überlegungen Schülern anzubieten. Wenn wir wollen, dass sich Schüler für Mathematik interessieren, sollten wir ihnen auch zeigen, was Mathematik ist statt sie nur mit dem „Klammern auflösen“ herumstümpern zu lassen.

Zum anderen können wir an diesem Beispiel sehen, wie einfach es für jeden Schüler ist, neue Formeln aufzustellen. Möglicherweise ist die oben aufgestellte Formel nicht besonders interessant. Wir können mit diesem Wissen aber die Frage stellen, welche Formeln denn interessant sind? Was muss eine Formel mitbringen, damit wir sie interessant finden? Auch mit diesen Überlegungen sind wir mathematisch auf einem ganz anderen Niveau, als sinnlos irgendwelche Klammern aufzulösen.

Das Distributivgesetz verwenden wir normalerweise, um Termumformungen durchzuführen. Aber welche Terme können wir mit diesem Gesetz umformen? Was ist z. B. mit diesem Term?

$$(m-n)\cdot(5m+n-4)$$

Abb. 3.2 Term, der auf seine Umformung wartet

Es gibt mehrere gleichwertige Möglichkeiten, sich zu überlegen, nach welcher Regel man entscheiden möchte, ob eine Formel auf einen gegebenen Term angewendet werden kann. Eine dieser Regeln lautet:

> Eine Formel kann auf einen gegebenen Term angewendet werden, wenn dieser Term durch die Ersetzung der Variablen der Formel entsteht.

Hier ist eine Veranschaulichung davon.

$$(m-n)\cdot(5m+n-4)$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$(m-n)\cdot 5m+(m-n)\cdot(n-4)$$

Abb. 3.3 Anwendung des Distributivgesetzes

Dieses Prinzip kann ganz genauso auch auf andere Formeln angewendet werden. Umso erstaunlicher ist, dass eigentlich kein Mensch am Ende der Schulzeit weiß, nach welcher Regel er Terme umformt. Termumformungen macht man halt so nach Gefühl. Und es ist ok, denn Schüler sollen ja nur Kompetenzen lernen, was heißt, dass sie Terme umformen können sollen und eben nicht wissen sollen, was sie da eigentlich machen. Von einem vernünftigen Mathematikunterricht sollte man aber erwarten dürfen, dass zumindest die Regeln, nach denen Terme jahrelang umgeformt wurden, den Absolventen bekannt sind.

Außerdem können wir hier erkennen, wie die extremen Leistungsniveaus zwischen Schülern zustande kommen können: Erklärt man einem Schüler nur, er solle Klammern auflösen und bei Minuszeichen aufpassen, wird er diese Fertigkeiten nach der Klassenarbeit über dieses Thema vergessen. Beim Thema „Potenzgesetze“ wird er diese Fertigkeiten aber wieder brauchen - dann wird es aber viel komplizierter, weil er dann nicht nur das Auflösen von Klammern nachlernen muss, sondern gleichzeitig auch die Potenzgesetze beherrschen soll. Erklärt man einem Schüler aber, wie das anwenden von Formeln auf Terme prinzipiell funktioniert, kann er sich die Potenzgesetze, Wurzelgesetze, Logarithmengesetze etc. in sehr kurzer Zeit aneignen, weil er ja im Prinzip immer das gleiche, nur eben mit anderen Formeln, macht.

Man kann auch noch fragen, warum man überhaupt Termumformungen macht. Eine mögliche Antwort ist: Mit Termen gibt man an, wie etwas gerechnet wird. Teilt man jemandem eine Rechnung mit, macht man das immer in der einfachsten Form (schon aus Höflichkeit). Deshalb formt man Terme in die einfachst mögliche Form um. In einem kompetenzorientierten Unterricht soll der Sinn von Mathematik aber keine Rolle spielen.

Oder man könnte Fragen, was denn das unmittelbare Ziel einer Termumformung sei. Eine Antwort lautet: Man stellt mit einer Formel einen ergebnisgleichen Term her. Dass das ein *ergebnisgleicher* Term ist, ist sehr wichtig. Ist man z. B. unsicher, ob die Termumformung, die man gemacht hat, richtig ist, ist eine Möglichkeit der Kontrolle, Zahlen in beide Terme einzusetzen und dann zu prüfen, ob die Ergebnisse gleich sind. Kaum ein Schüler weiß das. Braucht er ja auch nicht. Er soll ja nur Kompetenzen haben.

3.6 Was man tun kann

★ Alles, wirklich alles, was Mathematik ist, kann sinnvoll, anschaulich und verständlich erklärt werden. Nur wenn das bekannt ist, kann die Suche nach einer individuell passenden Erklärung erfolgreich sein.

★ Wenn du etwas nicht verstanden hast, liegt das nicht daran, dass du etwas nicht verstehen kannst, sondern dass du die zu dir passende Erklärung noch nicht gefunden hast.

★ Selbst Erklärungen suchen. Viele Quellen - das Internet, Foren, englischsprachige Videos, Bücher (nicht nur Schulbücher, sondern auch Bücher für Lehrer) usw. - halten viele unterschiedliche Erklärungen bereit.

★ Den Lehrer gezielt nach Erklärungen fragen. Niemand muss sich damit begnügen, Regeln sinnentleert auswendig zu lernen.

Kapitel 4

Unterrichtsmethoden

4.1 Frontalunterricht

In der Sendung „Wie Schule in Zukunft wirklich aufs (sic!) Leben vorbereitet“ aus der Reihe „beta stories“ vom 2. 1. 2022 des Bayerischen Rundfunks, wurde mal wieder behauptet, in deutschen Schulen fänden vor allem Lehrervorträge statt. Mir persönlich ist nicht klar, wie Leute zu dieser Ansicht kommen. Ich kann mich nicht daran erinnern, wann mir ein Schüler des letzte Mal berichtet hätte, der Mathelehrer habe die ganze Stunde lang einen Vortrag gehalten. Außerdem habe ich keinen einzigen Lehrer getroffen, der von sich behauptet hätte, stundenlange Vorträge zu halten.

Trotzdem kann man mit Sprüchen wie „Wir müssen endlich aufhören, unseren Kindern sinnloses Faktenwissen einzutrichtern!“ oder „Endlich Schluss mit dem Nürnberger Trichter!“ immer noch viel mediale Aufmerksamkeit erregen. Dabei bedeutete der Nürnberger Trichter noch nie das gewaltsame Eintrichtern von Informationen in die Gehirne von Kindern. Vielleicht gab es tatsächlich einmal viele Lehrervorträge im Unterricht. Das wird aber schon seit Jahrzehnten nicht mehr gemacht. Wir haben mit dem deutschen Schulsystem definitiv eine Menge Probleme, aber ein Zuviel an Frontalunterricht gehört ganz sicher nicht dazu!

Falsch ist an der Diskussion um den Frontalunterricht auch die Gleichsetzung dieser Unterrichtform mit dem „eintrichtern sinnlosen Faktenwissens“. Wenn ein Lehrer mathematische Zusammenhänge erklärt, ist das nicht sinnlos, sondern er stellt seinen Schülern eine Möglichkeit zur Verfügung, Mathematik zu verstehen.

Mit der Verbannung des Frontalunterrichts aus unseren Schulen gehen viele Chancen verloren, die manche Schüler vielleicht gerne gehabt hätten oder möglicherweise auch gebraucht hätten, um Mathe zu verstehen. Sobald ein Lehrer etwas erklärt, ist das schon Frontalunterricht und folglich erklären Lehrer Mathe eben nicht mehr. Schade eigentlich.

Als ich zur Schule ging, gab es zeitweise eine Mathe AG. In der ersten Stunde dieser AG erklärte der Lehrer Schmitz die Beweismethode der vollständigen Induktion und weil er von dieser Methode so begeistert war, erklärte er sie gleich zweimal, obwohl schon beim ersten Mal alle die Methode verstanden hatten. Das war für mich persönlich fast schon eine Offenbarung: Einen Mathelehrer, der für sein Fach brennt und diese Begeisterung auch zeigen kann, hatte ich bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht erlebt. Leider sind solche Lehrer in Deutschland gesellschaftlich-politisch nicht vorgesehen und - meinem Eindruck nach - sogar unerwünscht.

Selbstverständlich will niemand, dass der Mathe-Unterricht nur noch aus Vorträgen besteht, aber stellen wir uns doch mal den Lehrer als Künstler vor, der vor der Klasse das macht, was seine eigentliche Kernkompetenz ist, nämlich Mathe erklären. Dann hat der Lehrer eine Bühne und kann mit seiner Genialität und mit seinem Enthusiasmus Schüler mitreißen. Es gibt normalerweise viele unterschiedliche Erklärungen eines mathematischen Sachverhalts und jeder Mathelehrer favorisiert für sich persönlich wohl eine bestimmte dieser Erklärungen. Wenn nun ein Lehrer mit Scharfsinn und Leidenschaft seinen Standpunkt vor der Klasse zelebrieren könnte - warum wäre das so schlimm? Dadurch müssen andere Erklärungsweisen nicht ausgeschlossen werden. In anderen Fächern geht es doch auch: Ein Deutschlehrer darf von deutscher Literatur begeistert sein und ein Musiklehrer darf von Musik begeistert sein.

Dabei gibt es viele Themen, die die Darstellung durch einen Experten gut vertragen könnten. Das bekannteste Beispiel ist wohl die quadratische Gleichung, zu deren Lösung eine quadratische Ergänzung hinzugefügt wird, die dann durch die Anwendung einer binomischen Formel zu den Lösungen führt. In der Herleitung gibt es viele Ideen und Neuerungen dicht gedrängt in einer Gleichungskette:

- Die Gleichung ist mit den bisherigen Mitteln nicht lösbar, weil die Variable in der ersten und auch in der zweiten Potenz vorkommt.
- Die Gleichung wird zunächst komplizierter gemacht, um sie lösen zu können.
- Eine binomische Formel wird verwendet, um aus einer Summe ein Produkt zu machen.
- Das erste Mal in der Mathematikkarriere eines Schülers kann eine Gleichung auch zwei Lösungen haben.
- Das erste Mal tritt eine Gleichungsumformung auf, die keine Äquivalenzumformung ist (das Wurzelziehen).
- Obwohl das Wurzelziehen immer ein eindeutiges Ergebnis hat (falls die Wurzel existiert), notiert man hier plötzlich zwei Ergebnisse.
- Führt die Methode zu einem (in $\mathbb{R}$) sinnlosen Ausdruck (d. h. zu einer Wurzel mit negativem Radikanden), hat man trotzdem nichts falsch gemacht.
- Zum ersten Mal können die Lösungen einer Gleichung irrational sein.

Im Frontalunterricht könnte ein Lehrer nun zeigen, was er drauf hat und dieser Reihe von Gedanken eine eindrucksvolle Struktur geben, die Schüler mitreißt. Er kann dabei dramaturgische Ausdrucksmittel wie Tempo, Lautstärke, Mimik, Gestik, Raumaufteilung etc. ausnutzen.

Kurz gesagt kann also ein Lehrer im Frontalunterricht gerade komplizierten mathematischen Zusammenhängen Struktur und Lebendigkeit verleihen, was in allen anderen Unterrichtsformen nicht möglich ist. Schüler, für die die Methode, eine Struktur mitgeteilt zu bekommen, die ideale Unterrichtsform ist, haben durch die einseitige Konzentration auf andere Unterrichtsformen das Nachsehen.

4.1.1 Was man tun kann

- ★ Herausfinden, welche Unterrichtsform für einen selbst die beste ist.
- ★ Braucht man eine klare Struktur der Lehrinhalte, kann man diese Struktur in der Nachbereitung einer Unterrichtsstunde erstellen. So kann man sich den gewünschten Frontalunterricht selbst schreiben, um die fachliche Struktur aufzubauen.
- ★ Den Lehrstoff der nächsten Unterrichtseinheit mit einem guten Buch oder Video vorbereiten.
- ★ Den Lehrer nach Literatur, Materialien oder Links zu übersichtlichen oder tiefgründigen Darstellungen des Lehrstoffs fragen.

4.2 Frustrierender Unterricht

4.2.1 Fragend-Entwickelndes-Unterrichtsgespräch

Die in Deutschland am weitaus häufigsten verwendete Unterrichtsmethode ist das Fragend-Entwickelnde-Unterrichtsgespräch: Es wird also nicht die Mathematik erklärt, sondern der Lehrer stellt der Klasse Suggestivfragen, sodass sich den Schülern die Zusammenhänge „von ganz allein“ erschließen. Da der Lehrer dabei die Lösung kennt, sie aber nicht verrät und die Schüler nach der Lösung suchen lässt, nennt sich diese Methode auch „Osterhasenpädagogik“. Sie mag für einige Schüler genau die richtige sein, für viele andere ist sie ineffektiv und frustrierend. Man möchte als junger Mensch vielleicht die Welt erobern und findet sich in der Situation wieder, die Gedanken seines Lehrers erraten zu müssen.

Es soll hier nicht diskutiert werden, warum nach dieser Methode unterrichtet wird, denn der konkret in einer Klasse unterrichtende Lehrer ist vermutlich die einzige Person, die beurteilen kann, warum nach dieser Methode unterrichtet wird. Vielleicht hat der Lehrer festgestellt, dass er mit dieser Methode die besten Ergebnisse erzielt oder vielleicht sind zu diesem Zeitpunkt mit genau dieser Klasse keine anderen Methoden möglich. Es soll auch nicht Lehrern pauschal die Schuld gegeben werden. Erfahrungsgemäß werden Probleme ohnehin nicht dadurch gelöst, dass man jemandem die Schuld gibt.

Es gibt aber viele Schüler, die mit dem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch Schwierigkeiten haben und deshalb sollen hier mögliche Ursachen und auch Lösungsmöglichkeiten der Probleme besprochen werden.

Dazu sei auf ein Experiment verwiesen, welches immer wieder durchgeführt wurde: Dabei geht es um die negative Verstärkung, die bei diesem Unterrichtsstil schon deshalb eintritt, weil Schüler sich melden müssen, wenn sie im Unterricht sprechen wollen.

> Man verteilt an alle Schüler in einer Klasse einen Stapel mit Zetteln, auf denen Aufgaben stehen. Die Zettel sind einseitig bedruckt und liegen mit der bedruckten Seite nach unten auf den Tischen der Schüler. Nun sollen alle Schüler gleichzeitig den ersten Zettel umdrehen und die Aufgaben lösen. Wer fertig ist, soll die Hand heben. Dabei bekommen die meisten Schüler sehr einfache Aufgaben und nur weniger Schüler bekommen unlösbare Aufgaben, worüber man aber niemanden informiert. Es werden sich also nach sehr kurzer Zeit alle die Schüler melden, die die einfachen Aufgaben hatten und die anderen werden frustriert sein, weil sie glauben, alle anderen seien viel besser als sie. Diesen Vorgang kann man nun drei- bis fünfmal wiederholen. Der nächste Zettel enthält dann einfache Aufgaben, die aber nun für alle Schüler gleich sind. Man wird beobachten, dass die Schüler, die die unlösbaren Aufgaben hatten, die einfachen Aufgaben nicht lösen können.

Stellen wir uns dazu eine typische Unterrichtssituation vor: Das neue Thema heißt „Quadratische Gleichungen“, der Lehrer zeigt eine quadratische Gleichung und fragt die Schüler, wie man diese Gleichung lösen könne. Schüler A hat noch nie in seinem Leben eine quadratische Gleichung gesehen - klar, denn das Thema ist ja neu - und kennt die Lösung nicht. Nun ist er enttäuscht, weil er die Lösung nicht kennt und fühlt sich dumm. Dann meldet sich Schüler B und Schüler A denkt: Ok, der B kann offensichtlich etwas, was ich nicht kann, was bedeutet, dass ich nicht nur dumm bin, sondern sogar dümmer - nämlich dümmer als B. Selbst wenn der Lösungsvorschlag von B nicht zum Ziel führt, hat die Enttäuschung für A schon stattgefunden. Anschließend stellt der Lehrer die nächste (Suggestiv-)Frage und für A beginnt eine weitere Enttäuschungsrunde. So geht das dann die ganze Unterrichtsstunde lang. Und morgen ist es wieder so.

Der Schüler ist in einem solchen Unterricht immer wieder Leistungsvergleichen ausgesetzt. Das erzeugt eine Atmosphäre, in der die meisten Menschen nicht gut lernen können. Übrigens mögen deutsche Lehrer auch keine Leistungsvergleiche: Im Jahr 2020 wurde weltweit die TALIS-Videostudie durchgeführt, in der der Matheunterricht zum Thema „Quadratische Gleichungen“ per Video aufgenommen, verglichen und ausgewertet wurde. Schulklassen und Lehrer als Teilnehmer der Studie zu finden, war in keinem Land der Welt ein Problem - außer in Deutschland. Da wollen sich die Lehrer nicht auf die Finger schauen lassen.

Meistens nehmen zwei bis drei Schüler aktiv am fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch teil. Für alle anderen ist der Unterricht frustrierend. Man stelle sich eine solche Situation unter erwachsenen Menschen vor. Z. B.: Der Chef möchte, dass einer bestimmten Anforderung auf eine bestimmte Weise begegnet wird. Er sagt dem Angestellten aber nicht, welche Anforderung das ist und auch nicht, was zu tun ist, sondern er stellt immer wieder Fragen, anhand derer der Angestellte erraten muss, was er zu tun hat. Absurd, oder? Erwachsene Menschen ließen sich ein solches Verhalten nicht bieten.

4.2.2 Inakzeptable Suggestivfragen

Oder stellen wir uns die Situation einfach im privaten Bereich vor: Angenommen, wir redeten mit einem Menschen, der uns buchstäblich alle 2 bis 5 Minuten darauf hinweist, etwas besser zu können als wir. Wie lange würden wir ein solches Gespräch freiwillig fortsetzen? Wenn uns eine Person etwas fragt, was sie schon weiß, würden wir doch bestimmt mit „Ja, dann frage mich doch nicht, wenn du es schon weißt!“ reagieren. Im Mathematik-Unterricht sind unsere Kinder aber möglicherweise dazu gezwungen, eine solche Situation 13 Jahre lang zu ertragen.

Im Schulunterricht ist die Situation sogar noch schlimmer als im privaten Bereich: Wenn sich Schüler A zu lange nicht meldet, wird er vom Lehrer unfreiwillig drangenommen. Dann hat Schüler A die Möglichkeit, sich nicht nur vor dem Lehrer zu blamieren, sondern gleich vor der ganzen Klasse. Auf unsere „Chef-Situation“ übertragen bedeutet das, dass der Chef seine Ratespielchen vor 30 Angestellten macht. Wenn dann ein Angestellter eine falsche Antwort gibt, wissen gleich 29 Angestellte, wer keine Ahnung hat. Uns ist wohl völlig klar, dass solche Methoden in der Erwachsenenwelt nicht eingesetzt werden dürfen, aber unseren Kindern muten wir das zu.

Aus noch einem weiteren Grund wird eine fragend-entwickelnde Aufgabenverteilung in der Arbeitswelt nicht angewendet: Sie ist viel zu ineffektiv. Wenn 30 Leute eine Stunde lang auf eine Arbeitsanweisung warten müssen, sie dabei nicht arbeiten, aber trotzdem bezahlt werden müssen, schmeißt ein Unternehmen eine Menge Geld zum Fenster heraus. Komischerweise leisten wir uns solche Methoden in unserem steuerfinanzierten Bildungssystem.

4.2.3 Ineffektive Methode, Gleichsetzungsverfahren

Wie ineffektiv diese Unterrichtsmethode ist, können wir uns mal an einem Beispiel ansehen: Es geht um das Gleichssetzungsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen und zwei Gleichungen. Gehen wir von der üblichen Voraussetzung aus, dass Schüler das Lösen linearer Gleichungen mit einer Variablen beherrschen, braucht es nun noch folgende Informationen, um die reine Ausführung des Gleichsetzungsverfahrens zu verstehen:

Gegeben sei dieses Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x+y & = & x+5 \\ -x+2y & = & -2x+y+1 \end{array} \right|$$

Wir formen beide Gleichungen nach y um - was nichts neues ist, da Schüler lineare Gleichungen bereits umformen können.

$$\left|\begin{array}{lcl} y & = & -x+5 \\ y & = & x-1 \end{array}\right|$$

Durch das Gleichsetzen beider rechter Seiten entsteht die Gleichung

$$-x+5=x-1$$

Das führt zu

$$x=3\ ,$$

was nicht neu ist, da die Schüler das Umformen linearer Gleichungen ja bereits beherrschen. Nun wird für x in eine der Ausgangsgleichungen 3 eingesetzt, wodurch z. B. diese Gleichung entsteht

$$2\cdot 3+y=3+5$$

Das führt zu einer linearen Gleichung mit einer Variablen, die man wie gewohnt lösen kann.

$$y=2$$

Damit ist die Lösungsmenge bekannt und das Gleichungssystem ist gelöst.

Die beiden neuen Informationen sind:

- dass die rechten Seiten zweier Gleichungen gleichgesetzt werden und
- dass man die Lösung der einen Gleichung in die andere Gleichung einsetzt.

Um diese Informationen zu vermitteln, braucht man 2 - 5 Minuten. Im Schulunterricht braucht man erfahrungsgemäß gerne mal eine ganze Unterrichtsstunde dazu.

4.2.4 Schüler nehmen wenig mit

In meinem Nachhilfeunterricht erlebe ich immer wieder Schüler, die nach einer Woche Matheunterricht eigentlich nichts vorweisen können und aus dem Unterricht auch nichts an Erkenntnissen mitgenommen haben. Wenn ich die Schüler dann bitte, doch in der nächsten Woche das Unterrichtsgeschehen wenigstens in Stichworten zu protokollieren, sagen sie mir meist, sie seien gehalten, nicht mitzuschreiben, damit sie besser zuhören können. Dieses Zuhören hat dann den Effekt, dass sie mir noch nicht einmal sagen können, welches Thema behandelt wird.

Unabhängig davon, wer an dieser Ineffizienz schuld ist, wäre es doch ein Leichtes, für irgendein nachvollziehbares Material zu sorgen: eine Datei mit den Lehrinhalten, ein Stundenprotokoll, ein Heftaufschrieb, etc.

4.2.5 Du sollst *nicht* lernen!

Wenn Schüler Lehrmaterialien in digitaler Form erhalten, dann oft nur für die nächsten ein bis zwei Unterrichtsstunden. Die Begründung der Lehrer: Wenn Schüler nicht „Vorlernen“ können, sind alle auf dem gleichen Wissensstand und das Unterrichtsgespräch ist homogener. Das muss man sich mal vorstellen! Damit das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch stattfinden kann, sehen es Lehrer als ihre Aufgabe an, an Mathematik interessierte Schüler vom Lernen *abzuhalten*!

Dass das auch anders geht, kann man in den USA beobachten: Sobald Schüler selbstständig genug sind, wird von ihnen eine eingehende Unterrichtsvorbereitung erwartet, damit sie vorteilhaft am Unterrichtsgeschehen teilnehmen können. Außerdem haben sie auch Lehrmaterialien, wie z. B. Schulbücher, in denen mathematische Zusammenhänge dargestellt und erklärt werden und in denen sich durchgerechnete Beispielaufgaben sowie Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungswegen befinden.

Es gibt noch weitere Nachteile des fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächs:

- Da der Lehrer die Antworten auf seine Fragen bereits kennt, steht er immer eine Stufe höher als der Schüler. Ein Lernpartner kann ein Lehrer mit dieser Methode nicht sein.

- Ein Schüler kann das Unterrichtsgeschehen nicht an das eigene Lerntempo anpassen.

- Man kann bei diesem Unterrichtstil als Schüler schnell den Faden verlieren, weil ja einem die ganze Zeit nicht klar ist, worauf der Lehrer hinaus möchte. Jeder Schüler muss sehr genau zuhören, wenn ein anderer Schüler etwas sagt, denn das könnte der richtige Vorschlag sein. Meistens ist es aber nicht der richtige Vorschlag, und dann muss man den ganz schnell wieder vergessen, damit man den Kopf für den richtigen Vorschlag frei hat, der vielleicht auf dem Fuße folgt. Wenn die Ergebnisse dann nicht zusammengefasst werden, gibt es letztlich keine einzige Erklärung. Trotzdem wird vom Schüler erwartet, alles verstanden zu haben. Er sucht dann möglicherweise in den vom Lehrer gestellten Fragen die Erklärung und findet keine.

- Introvertierte Menschen haben größere Schwierigkeiten vor anderen Menschen zu sprechen als extrovertierte. Es sollten ja auch Methodenwechsel im Unterricht stattfinden, damit sich die Vor- und Nachteile, die in den verschiedenen Lerntypen begründet sind, auf alle Schüler gleichmäßig verteilen.

- Manche Menschen brauchen Ruhe, um Mathematik lernen zu können. Ein Verstehen während des Unterrichtsgesprächs ist für sie kaum möglich.

- Gerade Schüler, die sich für Mathematik interessieren, nervt es oft besonders, lange auf die Lösung eines Problems warten zu müssen.

Das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch wird es in Zukunft vermutlich nicht mehr geben, weil Schüler die Fragen des Lehrers während des Unterrichts in eine KI eingeben können und dann einfach die Antworten vorlesen können, die der Lehrer hören möchte.

4.2.6 Was man tun kann

★ Sich die Situation bewusst machen: Wenn man weiß, dass es viele Frustquellen gibt, muss man sich nicht auch noch schlecht vorkommen, wenn man den Unterricht frustrierend findet. Meistens sagt man ja Schülern, sie sollten sich mehr beteiligen und wenn sie es nicht machen, seien sie faul. Vielleicht sind sie aber nicht faul, sondern einfach nur frustriert. Es ist in Ordnung, wenn man vor der Klasse nicht bloßgestellt werden möchte.

★ Sich während des Unterrichts Notizen machen oder - falls das nicht möglich oder verboten ist - dies möglichst zeitnah nachholen.

★ Jede Unterrichtsstunde nacharbeiten: Was genau war der Lehrinhalt? Was habe ich verstanden? Was habe ich nicht verstanden?

★ Wenn zu einer Unterrichtsstunde noch Fragen offen sind: Diese Fragen ausarbeiten und in der nächsten Unterrichtstunde stellen. Es fällt Schülern oft leichter, eine vorformulierte Frage zu stellen, als sich spontan zu äußern.

★ Anhand des Lehrbuchs oder der ausgegebenen Lehrmaterialien Schulstunden vorbereiten, d. h. sich mit dem Lehrstoff auseinandersetzen und Fragen dazu vorbereiten.

★ Wenn die Teilnahme am Unterrichtsgespräch schwer fällt: Andere mündliche Beteiligungsmöglichkeiten nutzen (Hausaufgaben vorlesen, Referate halten, etc.) oder andere Präsentationsformen nutzen (schriftliche Beiträge online stellen, Videos erstellen, etc.)

★ Wenn man unfreiwillig drangenommen wird und sich nicht wegen eines falschen Ergebnisses blamieren möchte, kann man sein Ergebnis erläutern. Z. B.: „Ich habe mir ... überlegt, habe dann ... gerechnet und es ist ... herausgekommen.“ Selbst wenn das Ergebnis falsch sein sollte, ist es nicht falsch, sich etwas überlegt und etwas gerechnet zu haben.

Kapitel 5

In Mathe bekommt man Aufgaben

Die Aufgaben in der Schulmathematik sind eine Heimsuchung. Sie sind überall, man kann ihnen nicht entkommen. Sobald man einen klaren Gedanken fassen möchte, kommt schon die nächste Aufgabe um die Ecke. Im Unterricht bekommt man Aufgaben oder es werden Aufgaben besprochen; im Schulbuch stehen nur Aufgaben; falls der Lehrer mal nicht da ist, vergibt er Aufgaben; man bekommt Hausaufgaben; in Klassenarbeiten bekommt man Aufgaben und wenn man als besonderes Mathematik-Talent gilt, bekommt man Knobelaufgaben. Dass man in Mathe Aufgaben bekommt, hat sich bei manchen Menschen schon so sehr eingebrannt, dass sie glauben, Mathematik sei die Wissenschaft vom Aufgabenlösen. Schüler glauben das sowieso, weil sie ja immer Aufgaben im Matheunterricht bekommen. Aber auch Lehrer sind von diesem Vorurteil nicht ausgenommen: Ich habe immer wieder versucht, mit Lehrern darüber zu sprechen, wie sie z. B. das Distributivgesetz oder die binomischen Formeln begründen. Sie sagten mir dann, welche Aufgaben sie den Schülern geben. Meine Frage, wie sie denn unabhängig von Aufgaben diese Formeln begründen, wurde in der Regel nicht verstanden.

Mittlerweile glauben sogar Chatbots, Mathematik bestehe aus Aufgaben. Ich habe mal gefragt, welche Fragen man sich stellen könne, um Mathematik zu verstehen. Daraufhin habe ich nur Fragen angezeigt bekommen, die dabei helfen, Aufgaben zu lösen. Da die Mathematik nicht aus Aufgaben, sondern im Wesentlichen aus Definitionen, Sätzen und Beweisen und deren Verständnis besteht, sieht man auch aus dieser Perspektive, dass der „Mathematik"-Unterricht in der Schule nicht viel mit Mathematik zu tun hat. Hat man also eine schlechte Note in Mathe, bedeutet das, dass man bestimmte mehr oder weniger sinnvolle Aufgaben zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer bestimmten Zeit nicht vollständig lösen konnte. Ob man Mathematik verstanden hat, sagt die Note nicht. Und selbstverständlich sagt sie auch nichts darüber aus, wie schlau man ist.

5.1 Ohne Aufgabe kein Lernen?

Warum entgegen der Wesensart der Mathematik der Schulunterricht so ostentativ nur aus Aufgaben besteht, wird in der Didaktik mit der Behauptung erklärt, ein Mensch könne nichts lernen, wenn er keine Schwierigkeit zu überwinden habe. Deshalb dürfe neuer Lehrstoff wie z. B. ein Gesetz oder ein Lehrsatz einem Schüler nicht einfach bekannt gegeben werden, sondern der Schüler muss sich die neuen mathematischen Zusammenhänge durch geschickt vom Lehrer lancierte Probleme selbst erdenken. Es fragt sich dann nur, wie frühere Generationen von Schülern, als in Lehrbüchern noch Lehrsätze mit Beweisen und Aufgaben mit Lösungen standen und als das Leistungsniveau weitaus höher war als heute, überhaupt jemals etwas gelernt haben. Außerdem müsste geklärt werden, wie Schüler in anderen Fächern etwas lernen können: In der Physik werden doch auch Zusammenhänge dargestellt, *bevor* Schüler Aufgaben rechnen und in den Fremdsprachen müssen Schüler auch nicht selbst auf die Grammatik-Regeln kommen, sondern sie werden ihnen einfach mitgeteilt.

5.2 Demotivierende Aufgaben

Die Aufgaben, die einem Schüler gestellt werden, haben fast immer ein eindeutiges Ergebnis, welches dem Lehrer schon bekannt ist. Für Schüler fühlt es sich oft merkwürdig an, einem Menschen Fragen zu beantworten, deren Antworten er bereits kennt.

Schüler sollen durch Aufgaben motiviert werden, etwas zu lernen. Aber warum Schüler motiviert sein sollten, Probleme zu lösen, die sie ohne den Matheunterricht nicht hätten, erschließt sich ihnen meist nicht.

Würden Aufgaben so gestellt werden, dass Schüler sie lösen können, hätten sie zwar ein Erfolgserlebnis, aber dann lernen sie ja angeblich nichts. Die Aufgaben, an denen Schüler neuen Lehrstoff lernen sollen, werden also so gestellt, dass Schüler sie nicht oder zumindest nicht ohne Probleme lösen können. Deshalb sind solche Aufgaben meist mit einem Frusterlebnis verbunden. Kaum ein Schüler wird sich freiwillig immer wieder solchen demotivierenden Erlebnissen aussetzen.

Hinzu kommt noch, dass der Schüler auch dann nichts erreichen kann, wenn er die richtige Lösung hinschreibt. Denn erstens hat der Lehrer die richtige Lösung erwartet, weshalb diese also nichts Besonderes ist. Und zweitens kann der Schüler nichts Eigenständiges hervorbringen, da der Lehrer die Lösung ohnehin schon kennt.

5.3 Etwas ausprobieren

Es gibt eine sehr einfache Möglichkeit, diese Problematik zu vermeiden, die sofort zur Verfügung steht und die kein Geld kostet. Betrachten wir dazu das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Die Aussage des Gesetzes ist: Wenn man die Variablen durch Zahlen ersetzt, kommt auf beiden Seiten der Gleichung das gleiche Ergebnis heraus.

Der Lehrer könnte nun seine Schüler bitten, einfach mal Zahlen einzusetzen und etwas auszuprobieren, um zu entdecken, was dabei herauskommt. Gibt es Zahlen, die einfacher sind als andere? Gibt es Zahlen, die man nicht einsetzen kann? Muss man dabei noch etwas beachten? Was passiert, wenn man die Variablen nicht durch Zahlen, sondern gleich durch ganze Terme ersetzt. Stimmen die Ergebnisse dann immer noch überein? Wenn ja: warum? Wenn nein: Warum nicht?

5.3.1 Umkehrung der emotionalen Bewertung

Auch mit dieser Aufgabe und diesen Fragen wird das Gehirn des Schülers in Schwierigkeiten geraten, denn er probiert ja etwas aus, was er noch nie vorher gesehen hat. Die gefühlsmäßige Bewertung ist nun aber genau umgekehrt! Werden erst die Zahlen 1, 2 und 3 eingesetzt, dann die Zahlen 1, 2 und 4 eingesetzt usw. tritt vermutlich keine Schwierigkeit auf. Das ist langweilig und wird somit emotional negativ bewertet. Interessant wird es erst, wenn Schwierigkeiten auftreten und diese zu überwinden sind: Was passiert, wenn man 0 einsetzt? Kommt dann Quatsch heraus? Oder was ist mit negativen Zahlen? Braucht man dann zusätzliche Klammern? Und was kommt heraus, wenn man zwei negative Zahlen multipliziert? Nur wenn man „Minus mal Minus ist Plus“ beachtet, kommt auf beiden Seiten das gleiche heraus. Ist das nicht komisch?

Gerade der letzte Punkt führt zu einer der ikonischsten Fragen, wenn es um das Verständnis von Mathematik geht: Warum ist Minus mal Minus gleich Plus? Es ist ein riesengroßer Erfolg, von einem etwas drögen Rechengesetz auszugehen und dann auf so eine berühmte Frage zu stoßen.

Es gibt immer wieder Möglichkeiten, Schüler im Unterricht etwas ausprobieren zu lassen, um ihnen die Freude am Entdecken von Mathematik zu ermöglichen. Wichtig dabei ist, dass die gestellten Aufgaben nicht letztlich doch zu einer bestimmten Lösung führen sollen, die der Lehrer sehen möchte und schon vorher kennt.

Und noch eine weitere Erkenntnis kann sich Bahn brechen, wenn man etwas ausprobiert: Eine Formel gilt tatsächlich für alle (unendlich vielen) Zahlen, auch wenn das viel mehr Zahlen sind, als man ausprobieren kann. Aber gerade wenn man eine Formel mit langweiligen Zahlen testet, bemerkt man (auch gefühlsmäßig) die Systematik, die zur Erkenntnis führt, dass das Einsetzen weiterer Zahlen die Lage nicht grundsätzlich ändern wird.

5.4 Sinnvolle Aufgaben

In der Mathematik gibt es grundsätzlich zwei unterschiedliche Aufgabentypen:

5.4.1 Fertigkeiten

1) Aufgaben, die für die Geläufigkeit der Anwendung von Rechengesetzen dienen und auch kurz als Routineaufgaben bezeichnet werden. Damit trainiert man Fertigkeiten wie Kopfrechnen, Bruchrechnung, Termumformungen, Äquivalenzumformungen, das Ableiten und das Integrieren.

Das ist in vielen anderen Bereichen auch so: Beim Ballett macht man seine Pliés an der Stange, beim Klavierspielen lernt man die Fingerfertigkeit mit Etüden und als Zeichner führt man täglich sein Skizzenbuch.

Für solche Aufgaben gilt: So häufig wie möglich - so lange wie nötig. Es bringt viel mehr, jeden Tag 10 Minuten zu üben statt einmal in der Woche 3 Stunden.

In der Mathematik erledigt man Routineaufgaben in der Regel in Einzelarbeit und mit vorliegenden ausführlichen Lösungen. Nur selten wird man jemanden wegen der Klärung von Problemen fragen müssen.

Es ist fast schon müßig, zu erwähnen, dass kaum ein Schüler über eine tägliche (oder zumindest regelmäßige) Übungsroutine verfügt, weil es von Lehrern normalerweise nicht gefordert wird. Verständlicherweise empfinden Schüler mit den Jahren Mathematik als immer schwieriger, weil für komplexe Aufgaben immer mehr Grundfertigkeiten vorausgesetzt werden, die aber aufgrund der mangelnden Übung nicht vorhanden sind.

5.4.2 Kompetenzen

2) Aufgaben, mit denen Kompetenzen aufgebaut werden sollen. Kompetenzen sind komplexer als Fertigkeiten. Sie umfassen das Zusammenführen von Fertigkeiten, Wissen, sozialen Interaktionen und persönlichen Einstellungen.

Schauen wir uns dazu mal eine Altersaufgabe an: Maria ist 24 Jahre alt. Wie alt ist Anna, wenn Maria doppelt so alt ist, wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna heute ist? Ich habe mit vielen Schülern über den Sinn dieser und ähnlicher Aufgaben gesprochen, aber kein Mensch konnte mir erklären, warum er das macht. Scheinbar wird im Schulunterricht nicht genügend darauf hingewiesen. Unter diesen Umständen kann es sehr schwer sein, solche Aufgaben ohne Frust zu bearbeiten.

Es hilft dann sehr, wenn es einem vom Charakter her leicht fällt, einfach das zu machen, was andere Leute einem sagen. Aber gerade Menschen, die sich für Mathematik interessieren könnten, die also gerne nach dem „Warum?“ fragen und dafür brennen, abstrakte Zusammenhänge von Grund auf zu verstehen, werden dadurch abgeschreckt. Um im Mathematikunterricht erfolgreich zu sein, muss man also genau das Gegenteil dessen tun, wofür Mathematik steht: für das Fragen nach den Gründen, den Zusammenhängen und den Beweisen.

5.4.3 Sinnvolle Möglichkeiten für Anna und Maria

Was könnte nun an dieser Aufgabe sinnvoll sein? Da gibt es mehrere Möglichkeiten:

1) Von der Balkenwaage zum Lebensalter Diese Aufgabe kann mit Gleichungen gelöst werden. Das kann man faszinierend finden, weil die Gleichungen und ihre (Äquivalenz-) Umformungen vermutlich in einem völlig anderen Zusammenhang eingeführt und besprochen wurden. Meistens zeigt man die Richtigkeit der Umformungen mit einer Balkenwaage. Und nun können wir die mathematischen Strukturen, die sich in einer Balkenwaage befinden, auf die Lebensalter zweier Menschen anwenden und damit auch noch richtige Ergebnisse erzielen! So können wir Zusammenhänge erkennen, die uns ohne die Gleichungslehre verborgen geblieben wären. Auf einen solchen Zusammenhang wird im Schulunterricht normalerweise nicht hingewiesen. Aber solche Zusammenhänge sind diejenigen, die Menschen, die sich für Mathematik interessieren, faszinierend finden. Aber vielleicht geht das auch zu sehr in die Richtung: Herr Lehrer, warum machen wir eigentlich diese Aufgabe? Solche Fragen mögen Lehrer überhaupt nicht (siehe dazu den Abschnitt „Aggressive Scheindiskussion“). Auf der anderen Seite ist der angedeutete Zusammenhang einer, der mit Kompetenzen nichts zu tun hat und deshalb in deutschen Schulen auch nicht unterrichtet werden soll.

2) Gleichungen liefern Informationen Außerdem liefern uns Gleichungen mit ihren Lösungsmengen Informationen, die wir meistens zwar auch anders, aber dann nur mit einem erheblich größeren Aufwand beschaffen könnten. Z. B. können wir mit den Richtungen und den Geschwindigkeiten zweier Schiffe mit Hilfe von Gleichungen ausrechnen, ob die Schiffe zusammenstoßen. Gut, man könnte das auch einfach ausprobieren. Das könnte dann aber sehr teuer werden. Im Fall der Altersaufgabe könnte man schriftlich etwas ausprobieren. Das ist dann nicht so gefährlich, dauert aber immer noch länger, als wenn man es mit einer Gleichung macht. Auch das ist ein Zusammenhang, auf den in der Schule normalerweise nicht hingewiesen wird.

3) Sichere Informationen Die Ergebnisse, die mit Gleichungssumformungen erzielt werden, sind extrem verlässlich. Man stelle sich das ruhig mal bildlich vor: Da steht ein Kapitän auf seiner Kommandobrücke, kritzelt ein paar Gleichungen auf einen Zettel und spricht dann zur Besatzung: „Wir halten Kurs! Denn wie ich ausgerechnet habe, stoßen wir mit dem anderen Schiff nicht zusammen.“ Dieser Kapitän ist von seinen Gleichungen so überzeugt, dass er ihnen sogar seine Passagiere, seine Mannschaft und sein Schiff „anvertraut!“ So etwas kann man faszinierend finden. Menschen, die sich für Mathematik interessieren, können an dieser Stelle weiterfragen: Warum kann man sich so sehr auf die Ergebnisse der Mathematik verlassen? Aber solche Zusammenhänge sollen nicht unterrichtet werden.

4) Eine oder zwei Gleichungen? Die Altersaufgabe lässt sich mit einem linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen lösen. Man kann die Aufgabe aber auch nur mit einer einzigen Gleichung lösen. Daraus ergeben sich viele Fragen, die durchaus spannend sein können: Warum ist das bei dieser Aufgabe so? Gibt es weitere Aufgaben, für die das auch gilt? Welche Aufgaben sind das, für die das gilt? Kann man die beschreiben? Wie sind andere Aufgaben beschaffen, die man entweder nur mit einem Gleichungssystem oder nur mit einer einzigen Gleichung lösen kann? Und weil die Lösung mit einer Gleichung meist als einfacher empfunden wird als die Lösung mit dem Gleichungssystem: Kann man aus einem Gleichungssystem immer auch eine einzige Gleichung machen oder umgekehrt? Nun, das sind alles Fragen, die mit Mathematik zu tun haben, die aber im Schulunterricht eigentlich nie eine Rolle spielen.

5) Methoden testen und trainieren Gerade weil sich diese Aufgabe im ersten Moment möglicherweise etwas verwirrend anhört, bietet sie eine gute Gelegenheit, die eigenen Problemlösefähigkeiten zu trainieren. Man sollte freilich, bevor man sich mit einer solchen Aufgabe beschäftigt, schon einige Problemlösemethoden beherrschen und sie auch erinnern und benennen können. Kann man mit dieser Aufgabe die eigenen Problemlösefähigkeiten erweitern und zwar *weil* die Aufgabe so verwirrend formuliert ist, kann die Bearbeitung der Aufgabe sogar richtig Spaß machen. Das kommt aber im Schulunterricht nicht vor, weil dort nicht systematisch und für den Schüler nachvollziehbar an Problemlösemethoden gearbeitet wird. Ich habe persönlich noch keinen Schüler getroffen, der mir auf Nachfrage die Methoden aufzählen konnte, die er beherrscht.

Um es ganz deutlich zu machen: Wenn wir den Fokus des Aufgabenlösens vom Hinschreiben der richtigen Lösung verschieben würden zum testen und trainieren von Problemlösemethoden, wären wir auf einen Schlag sehr viele Probleme im Matheunterricht los. Diese Umorientierung lässt sich sofort durchführen und kostet kein Geld.

6) Warum so kompliziert? Man kann sich fragen: Warum klingt diese Aufgabe so komisch? Kann ich sie mit meinen bisherigen Methoden lösen? Wenn nein: Warum nicht? Klingt die Aufgabe nur deshalb so anders, weil sie - vielleicht mit Böswilligkeit - extra so kompliziert formuliert wurde oder steckt da vielleicht ein mathematischer Zusammenhang hinter, den man nicht einfacher formulieren kann? Man kann hier viel an der Sprachfähigkeit arbeiten (Stichwort: sprachbildender Mathematikunterricht). Wenn man das vernünftig kommuniziert, hat man einen ganz anderen Sinnzusammenhang, als nur eine Aufgabe, die von Schülern als absichtlich verwirrend formuliert empfunden wird.

7) Wissenschaftliche Methode Wir haben hier eine Schlussweise, wie sie in der Wissenschaft oft vorkommt: Man hat einen einzigen Wert gegeben (das Alter von Maria) und hat ansonsten nur noch Informationen über Verhältnisse von Größen, über Prozesse etc. Aus dieser Ausgangslage kann man mit Hilfe der Mathematik weitere Daten gewinnen. Ein solches Verfahren wird bei der Altersbestimmung mit der C14-Datierung angewendet - wenn man diese Methode zugegebenermaßen etwas vereinfachend betrachten möchte. Man gräbt also einen Knochen aus und hat als einzigen Wert die Konzentration von C14 im Fundstück. Weil man den Prozess, mit dem C14 zerfällt, gut genug kennt, kann man nun auf das Alter des Knochens schließen und weiß dann z. B., dass dieser Knochen 40 000 Jahre alt ist. Die Altersbestimmung von Maria ist quasi die Vorstufe davon.

8) Verhältnis und Abstand Es gibt noch etwas, was man hier lernen kann: Den Unterschied zwischen dem Abstand zweier Zahlen (oder Größen) und dem Verhältnis zweier Zahlen (oder Größen). Das geht deshalb, weil die Lösung der Altersaufgabe damit zu tun hat, diesen Unterschied zu erkennen, denn aus dem Aufgabentext geht hervor, wie sich die Altersverhältnisse im Laufe der Zeit ändern und wir das Alter von Maria finden, in dem wir die konstante Altersdifferenz gleich x setzen. Ein Beispiel: Schauen wir uns mal die 5 und die 1 an. Der Abstand beider Zahlen ist $5-1=4$ und 5 ist *fünfmal* Größer als 1. Addieren wir zu beiden Zahlen 1 hinzu, verändert sich das Verhältnis, aber nicht der Abstand: Der Abstand ist $6-2=4$, aber 6 ist nur noch *dreimal* so groß wie 2. Wachsen beide Zahlen um 2, ist der Abstand immer noch gleich 4, denn $8-4=4$, aber 8 ist „nur noch“ *doppelt* so groß wie 4.

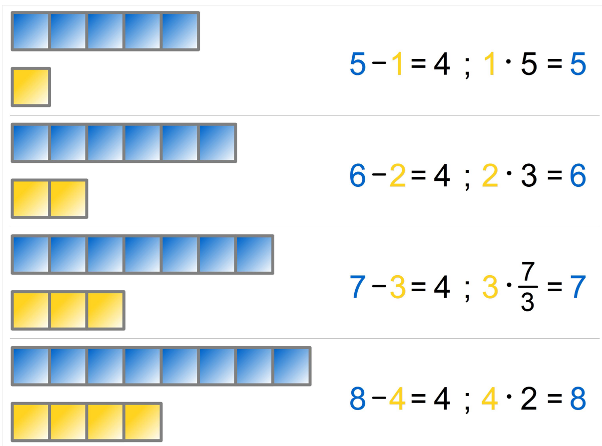


Abb. 5.1 Abstand und Verhältnis

Einen solchen oder ähnlichen Zusammenhang finden wir in vielen Bereichen des Lebens wieder. Siehe dazu z. B. den Abschnitt „Pupsende Kühe“. Ein anderes Beispiel: In den Nachrichten können wir Meldungen finden wie: „Die Wirtschaftsleistung von Land A ist um 2% gestiegen und die von Land B um 20%.“ Um eine solche Aussage richtig einordnen zu können ist es wichtig zu bemerken, dass hier zwei Verhältnisangaben der Wirtschaftsleistungen zweier (vermutlich) unterschiedlicher Länder vorliegen, die nichts über die absoluten Zahlen aussagen. Ist 20% mehr als 2%? Nicht unbedingt! Wenn die Grundgesamtheit, die um 20% wächst, viel kleiner ist als die, die um 2% wächst, kann - in absoluten Zahlen angegeben - 2% größer sein als 20%. Z. B. sind 2% der Wirtschaftsleistung der USA größer als 20% der Wirtschaftsleistung von Tuvalu. Das wäre etwas für eine Folgeaufgabe zu dieser Altersaufgabe.

Da es hier um Wirtschaftsleistungen geht, ist sicher auch noch interessant, von welchem Niveau aus das Wachstum stattfindet. Wenn die Wirtschaft der Schweiz um 20% wachsen würde, hätte das für die Bürger sicher ganz andere Auswirkungen als wenn das auf die Wirtschaft von Burundi zutreffen würde.

Anna und Maria in der Schule Soweit mir bekannt ist, findet keine der acht genannten Möglichkeiten in der Schule statt. Meistens geht es nach dem Aufschrieb des Gleichungssystems und dessen Lösung weiter zu nächsten Aufgabe. Eine Reflexion oder Analyse der Lösungsfindung findet in der Regel nicht statt. Vielleicht ist es dann kein Wunder, wenn man Mathe nicht versteht.

5.5 Aufgaben, die Angst machen

5.5.1 Klein-klein-Aufgaben, Angst, Vergessen

Die Ausrichtung auf Aufgaben, die ein bestimmtes Ergebnis haben, macht einfach sehr viel kaputt. Man hat immer Angst, etwas falsch zu machen. Ein Großteil der Mathe-Angst kommt von diesen Aufgaben. Schüler lernen schnell, wie sie vermeintlich am effektivsten mit solchen Aufgaben umgehen: Lösungsschemata auswendig lernen. Jedes individuelle oder tiefere Verständnis wird dadurch verhindert. Ich weiß gar nicht, wie viele Beweise man noch braucht, damit Politiker begreifen, wie ineffektiv diese Ausrichtung auf Klein-Klein-Aufgaben ist. Sobald ein Mensch die Schule verlässt, hat er den Großteil der auswendig gelernten Lösungsschemata wieder vergessen. Durch solche Aufgaben entsteht Mathe-Angst. Diese Aufgaben werden aktiv gestellt und somit wird Mathe-Angst aktiv erzeugt und damit Verständnis aktiv verhindert.

Wenn ich Eltern frage, woran sie sich als erstes erinnern, wenn sie an ihren Matheunterricht denken, sagen sie meist: Vorne an der Tafel zu stehen und etwas falsch zu rechnen.

Das Phänomen der Mathe-Angst ist im englischen Sprachraum bekannt als „math anxiety“. Aber woher kommt das? Warum ist das auf das Fach Mathematik beschränkt? Warum gibt es keine Erdkunde-Angst?

Ein Teil der Probleme ist im Abschnitt „Frustrierender Unterricht“ dargestellt. Dort geht es um die peinliche Situation, vor seinen Mitschülern im Unterrichtsgespräch eine falsche Antwort zu geben. Das Problem fängt aber schon vorher an: Es beginnt mit den geschlossenen Aufgaben - also Aufgaben, die eine eindeutige Lösung haben, im Gegensatz zu offenen Aufgaben, bei denen das nicht so ist und auch im Gegensatz zu gestalterischen oder kreativen Aufgaben.

Beispiele für geschlossene Aufgaben sind:

- Berechne $58+27$. Die einzige richtige Lösung ist die Zahl 85.
- Bestimme die Lösungsmenge von $x^2+x-6=0$. Die einzige richtige Antwort ist $\mathbb{L}=\{-3;2\}$.

Eine geschlossene Aufgabe beinhaltet immer die Möglichkeit, eine falsche Lösung anzugeben. Und eine falsche Lösung erzeugt ein Misserfolgserlebnis. Niemand möchte das erleben; niemand macht gerne Fehler. Hängt von solchen Fehlern dann noch die mündliche Note ab oder die Versetzung oder sogar die Berufswahl, kann ein enormer Druck entstehen, der sich bis zu einer Mathe-Angst auswachsen kann. Mit offenen oder gestalterischen Aufgaben passiert das viel weniger oder gar nicht. Eine Deutsch-Angst gibt es ja auch nicht, denn in diesem Fach werden keine Aufgaben gestellt, die nur eine einzige richtige Lösung haben (außer vielleicht in einem Grammatik- oder Rechtschreib-Test).

5.5.2 Angst ist gut - aber nicht für Mathe

Angst ist eine sehr sinnvolle Reaktion des Menschen. Sie ermöglicht es dem Menschen, angesichts einer Gefahr für Leib und Leben entweder besonders gut kämpfen oder besonders gut wegrennen zu können - und sie verhindert das abwägende, rationale Denken, welches z. B. für das Lösen einer quadratischen Gleichung nötig ist. Deshalb erbringen Menschen unter Druck viel schlechtere Mathematik-Leistungen als in unbelasteten Situationen.

Noch unbefriedigender wird die Situation für Schüler durch die Tatsache, dass der Lehrer die Lösungen der Aufgaben, die er stellt, ohnehin schon kennt. Dadurch ist der Lehrer immer in der überlegenen Position und kann so niemals gleichberechtigter Partner des Schülers sein. Außerdem kann der Schüler nicht über den Tellerrand des Lehrer hinauskommen. Der Schüler kann zu diesen Aufgaben keine eigenen Gedanken entwickeln, er kann keine eigenen Wege gehen und schon gar nicht den Lehrer „überholen“, im Sinne von: dem Lehrer etwas mitteilen, was dieser noch nicht weiß. Selbstwirksamkeit sieht anders aus. Solche Aufgaben halten Schüler klein und machen immer wieder deutlich, dass es im Mathe-Unterricht eben nicht um den Schüler als Person geht, sondern nur um ein Reiz-Reaktions-Schema, welches der Schüler nachmachen soll. Eine Botschaft des Lehrer an den Schüler ist also: Ich interessiere mich *nicht* für dich, sondern nur für das Ergebnis. Vielleicht fühlen sich auch deshalb manche Schüler im Unterricht nicht „mitgenommen“.

In der Erwachsenenwelt ist eine solche Situation undenkbar: Angenommen, wir redeten mit einem Menschen, die nicht nur alles wüsste, sondern sogar alles *besser* wüsste, der uns immer wieder sagte, wir machten etwas falsch, der uns ständig korrigierte und mit dem wir auch gar nicht frei reden dürften, weil wir nämlich nur auf die Fragen, die er uns stellte, antworten dürften und unsere Meinung dazu völlig egal wäre. Wie lange setzten wir ein solches „Gespräch“ freiwillig fort?

5.5.3 Was man tun kann

★ Sich auf das positive konzentrieren: Wenn ein Rechenverfahren, welches Ergebnisse produziert, die richtig oder falsch sein können, eingeübt werden soll, muss das nicht schlecht sein. Es kann auch ein Erfolgserlebnis sein, ein Rechenverfahren fehlerfrei zu beherrschen.

★ Positive Fehlerkultur einüben: Fehler sind dafür da, um aus ihnen zu lernen. Hat man einen Fehler gemacht, kann man sich fragen: Was weiß ich jetzt, was ich vorher nicht wusste? Wie kann ich vermeiden, diesen Fehler nochmal zu machen? Welche Fehler haben meine Mitschüler gemacht, aus denen ich lernen kann? (Getreu nach dem Spruch: „Der Schlaue lernt aus allem und von jedem.“)

★ Fehleranalyse durchführen: Woran hat es gelegen? War es ein Flüchtigkeitsfehler? (Dann könnte man Mechanismen einbauen, die helfen, Flüchtigkeit nicht aufkommen zu lassen.) Habe ich eine Lücke im bisherigen Lehrstoff? (Dann kann man den entsprechenden Lehrstoff erneut üben.)

★ Sich bewusst machen, was man über dieses Thema schon alles gelernt hat. Dazu kann man sich fragen: Wie habe ich die bisherigen Schwierigkeiten, die bei diesem Thema auftauchten, überwunden? Mit welcher Methode habe ich dieses Thema bisher am erfolgreichsten gelernt?

★ Gleich weiter lernen: Übt man das weiter ein, was man schon kann, verhindert man, dass der aktuelle Frust sich negativ auf das bereits Verstandene auswirkt und man verstärkt bisherige Erfolgserlebnisse.

★ Fehler suchen statt Fehler vermeiden: Hat man z. B. das Thema „Quadratische Gleichungen“, kann man sich direkt am Anfang fragen, wie eine quadratische Gleichung aussehen könnte, mit der man wohl Schwierigkeiten hätte. Wenn vor dem x^2 noch eine Zahl steht? Wenn auf beiden Seiten der Gleichung das x^2 steht? Es ist viel einfacher, den Lehrer um Rat zu fragen, bevor ein Fehler auftritt als danach.

5.6 Neues Thema - neue Aufgabe

Wird ein neues Thema im Matheunterricht behandelt, stellen viele Menschen sich das so vor, dass die Lehrperson das neue Verfahren, den neuen Lehrsatz, etc. vor der Klasse erklärt und die Schüler danach Aufgaben dazu rechnen, um die Lehrinhalte zu verfestigen und zu vernetzen (wie es so schön im Pädagogen-Deutsch heißt). Nach „neuesten“ Erkenntnissen soll das aber so nicht gemacht werden, sondern Schüler sollen als erstes Aufgaben bekommen, die Probleme thematisieren, die durch die neuen Lehrinhalte gelöst werden. Wie man festgestellt hat, sind Schüler nämlich offener für neue Informationen, wenn sie die Notwendigkeit dieser neuen Informationen aufgrund der Lösbarkeit eines Problems nachvollziehen können. Das hört sich nicht nur in der Theorie gut an; das kann auch in der Praxis gut funktionieren - wenn nicht von Schülern erwartet wird, sich die neuen Formeln und Lehrsätze selbst auszudenken.

Ein ganz typisches Thema in diesem Zusammenhang ist „Quadratische Gleichungen“. Wenn die Schüler bisher nur lineare Gleichungen lösen konnten, werden sie ein neues Verfahren brauchen, um quadratische Gleichungen zu lösen. Es kann durchaus sinnvoll sein, die Schüler eine Weile probieren zu lassen, eine quadratische Gleichung ohne die p-q-Formel, Mitternachtsformel, etc. zu lösen und so die Unzulänglichkeit der bisherigen Mittel sehr deutlich zu machen, weil die Methoden, die für das Lösen quadratischer Gleichungen notwendig sind, erheblich viel mehr Mathematik enthalten als die Methoden zum Lösen linearer Gleichungen. Wenn Schülern nicht klar ist, dass sie mit den bisherigen Methoden nicht weiter kommen, empfinden sie die Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen oft als „unnötig kompliziert". Problematisch ist allerdings, die Schüler nicht über den Sinn der Aufgabe zu informieren. So werden alle an der Aufgabe scheitern. In der Theorie sind nun alle Schüler ganz gespannt darauf, wie der Lehrer wohl die Aufgabe lösen wird. In der Praxis sind alle Schüler einfach um eine schlechte und demotivierende Erfahrung reicher.

Was ich bei meinen Nachhilfe-Schülern sehe sind Arbeitsblätter mit Aufgaben zu einem offenbar neuen Thema, die die Lehrperson ausgeteilt hat mit dem Arbeitsauftrag: Macht euch mal Gedanken! Meiner Meinung nach ist es utopisch, von Schülern zu verlangen, sich die Mathematik die sie lernen sollen, auch noch selbst auszudenken. Das können sie nicht und das müssen sie auch nicht können! Da Schüler aber normalerweise nichts von der praktischen Unlösbarkeit der Aufgabe wissen, fühlen sie sich, wenn sie auch nach längerer anstrengender Arbeit nicht auf die Lösung kommen, (mal wieder) zu dumm für die Mathematik.

Unlösbare Aufgaben Zuweilen geben Lehrer Schülern Aufgaben, die unlösbar sind. Ich habe oft mit Lehrern über solche Aufgaben gesprochen. Die Unlösbarkeit war ihnen durchaus bewusst. Dass die Aufgaben trotzdem gestellt wurden, wurde dann meist damit begründet, Schüler müssten ja nicht alles auf dem Silbertablett serviert bekommen und sie könnten sich ja ruhig auch mal ein bisschen anstrengen. Es soll in diesem Buch nicht darum gehen, solche Ansichten zu bewerten, sondern darum, zum einen zu wissen, dass es solche Ansichten gibt und zum anderen Möglichkeiten aufzuzeigen, damit möglichst positiv umzugehen.

Aus einer Fachzeitschrift entnommen ist z.B., dass die Schüler zunächst mit einem Computerprogramm eine (Normal-) Parabel finden sollen, die durch zwei gegebene Punkte geht, was die Schüler in der Regel lösen können. Dann sollen sie eine Parabel finden, die durch drei gegebene Punkte führt, was in aller Regel nicht gelingt. Der Lehrer weiß, dass es nicht lösbar ist, lässt die Schüler aber trotzdem probieren, ohne sie über die Unlösbarkeit zu informieren. Und dann, wenn alle verzweifelt sind, kommt der Lehrer mit seiner großartigen Lösung. In der Zeitschrift stand, der Lehrer dürfe die Hilflosigkeit der Schüler ruhig auskosten. Auch das möchte ich hier nicht weiter bewerten. Ich kenne aber Schüler, die das furchtbar finden.

... und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber Ein konkretes Beispiel: In der Nachhilfe sagte mir ein Schüler, man habe in der letzten Mathematik-Stunde ein neues Thema angefangen und er habe ein Arbeitsblatt dazu bekommen. Auf dem Blatt war eine Strecke gezeichnet mit der Anweisung: „Ergänze zu einem rechtwinkligen Dreieck und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber." Zwar standen auch noch weitere

Aufgaben auf diesem Blatt, die aber zur „Lösung“ der genannten Aufgabe nichts beitrugen.

Nun könnte man meinen, es sei ja ein Leichtes, mit dem Nachbarn zu diskutieren und deshalb sei die Aufgabe nicht so schwer. Aber das war nicht gefragt, denn man sollte aufgrund dieser Aufgabe zu folgender Erkenntnis kommen: Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse. Meiner Meinung nach ist diese Aufgabe unlösbar.

Was könnte sich die Lehrerin, die dieses Arbeitsblatt ausgab, gedacht haben? Vielleicht stellt sie sich vor, dass zur gegebenen Strecke

Abb. 5.2 Strecke

solche Zeichnungen entstehen.

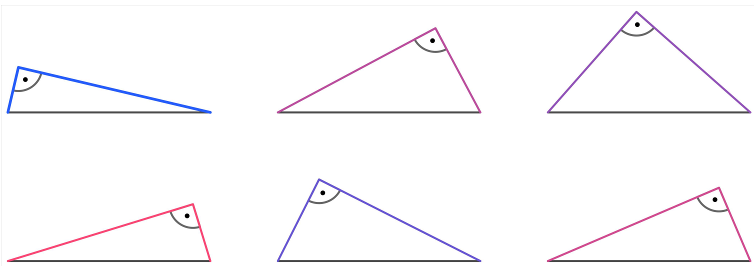


Abb. 5.3 Strecke

Würde man alle Zeichnungen zusammenlegen,

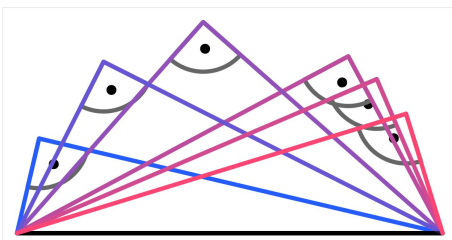


Abb. 5.4 Strecke

könnte man darauf kommen, dass alle rechten Winkel auf dem Halbkreis über der gegebenen Strecke liegen.

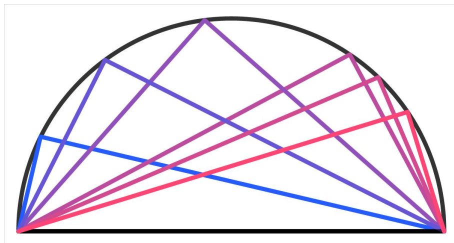


Abb. 5.5 Strecke

In der Aufgabenstellung war aber nur von jeweils einer Ergänzung zum rechtwinkligen Dreieck die rede. D. h. die Situation der beiden benachbarten Schüler sähe wohl eher so aus:

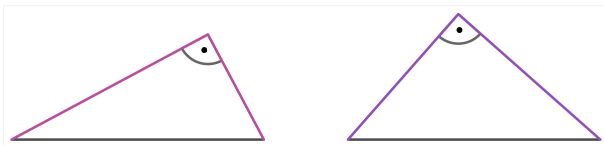


Abb. 5.6 Strecke

In diesen beiden Figuren einen Halbkreis zu sehen, auf dem die Scheitel der rechten Winkel liegen, ist meiner Meinung nach nicht erwartbar.

Außerdem hätte man auch so zu rechtwinkligen Dreiecken ergänzen können:

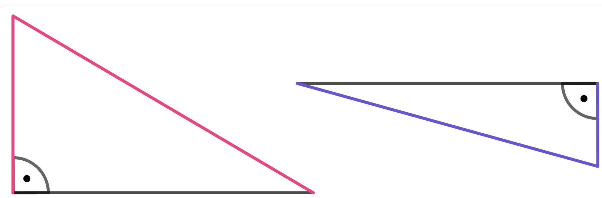


Abb. 5.7 Strecke

Da in diesem Fall die Hypotenusen nicht gleich lang sind, liegen auch nach geeignetem Drehen und Wenden der Dreiecke die Scheitelpunkte der rechten Winkel nicht auf einem gemeinsamem Halbkreis.

Aber es geht noch schlimmer: Vor einer Examensstunde sollten als Hausaufgabe nach einer bestimmten Methode mehrere Flächen berechnet werden. Bei einer Fläche kamen aber offenbar falsche Ergebnisse heraus, obwohl die Schüler die Methode richtig anwendeten. Die Lehrerin, die diese Hausaufgabe stellte, sagte den Schülern nicht, dass bei einer der gestellten Aufgaben ein widersprüchliches Ergebnis heraus kommen werde.

Gegeben war z. B. die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^4 + \frac{7}{10}x^3 - 5x + 3$$

Dazu sollte eine Stammfunktion gebildet werden.

$$F_0(x) = -\frac{1}{50}x^5 + \frac{7}{40}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$$

Dann sollte mit Hilfe des bestimmten Integrals der Flächeninhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse in den Grenzen von 0 bis 5 bestimmt werden. Also

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x)\,dx &= \int_0^5 -\frac{1}{10}x^4 + \frac{7}{10}x^3 - 5x + 3\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{50}x^5 + \frac{7}{40}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_0^5 = -\frac{5}{8} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da das Ergebnis negativ ist, Flächeninhalte aber nicht negativ sein können, liegt offenbar ein Widerspruch vor. Selbst wenn Schüler zur Klärung des Problems den Funktionsgraphen gezeichnet hätten,

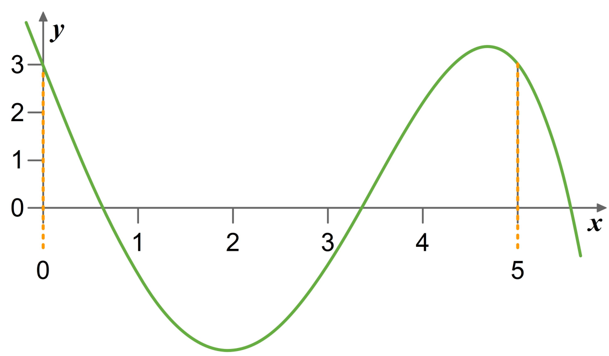


Abb. 5.8 Zu integrierende Funktion

hätte ihnen das möglicherweise nicht weiter geholfen, weil bis dahin im Unterricht noch nicht besprochen wurde, dass bestimmte Integrale negative Werte annehmen, wenn sich der Graph unterhalb der x-Achse befindet.

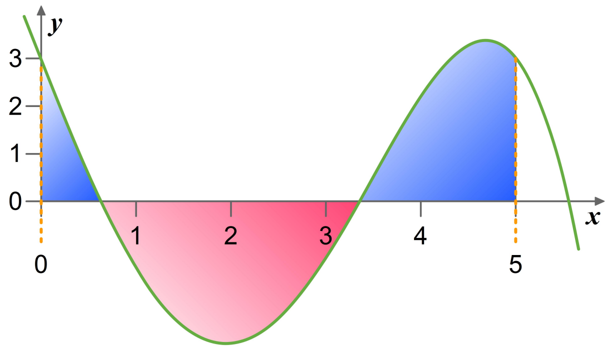


Abb. 5.9 Positive und negative Bereiche

Die Lehrerin, die diese Examensstunde durchführte, hat übrigens bestanden.

Die Liste solcher „Einführungsaufgaben“ in ein neues Thema ließe sich beliebig fortsetzen.

5.6.1 Was man tun kann

★ Sich bewusst machen, dass Aufgaben zu neuen Themen nicht gelöst werden sollen, sondern es soll erkannt werden, dass sie mit den bisherigen Mitteln nicht lösbar sind. Es soll also die Unlösbarkeit gezeigt werden.

★ Wenn man sich unwohl damit fühlt, nicht zu wissen, zu welchem Thema die vorliegende Aufgabe gehört, kann man das ruhig mal in Erfahrung bringen (Lehrbuch, Internet, KI, ...). Möglicherweise kann man mit einer Aufgabe besser umgehen, wenn man weiß, was das Ziel der Aufgabe ist.

★ Wie bei allen Aufgaben, die Probleme bereiten: Protokoll führen! Was habe ich versucht, um die Aufgabe zu lösen? Warum hat das nicht geklappt? Gibt es Aufgaben, die so ähnlich sind, die ich lösen kann? Wenn es keine solchen Aufgaben gibt: Warum nicht? Was ist an dieser Aufgabe anders als sonst? Was müsste ich wissen, um die Aufgabe lösen zu können?

★ Sich ins Gedächtnis rufen, welche Methoden man bisher über dieses oder ein ähnliches Thema gelernt hat. Hat das Thema mit Geometrie zu tun? Mit Wahrscheinlichkeiten? Mit Gleichungen? Welche Gleichungen habe ich bisher lösen können? Was war die komplizierteste Gleichung die ich bisher gelöst habe? Was ist an den neuen Gleichungen neu? Was ist anders?

★ Ein Zeitlimit setzen: Man kann sich z. B. vornehmen, die Aufgabe eine halbe Stunde lang zu bearbeiten, dann die Ergebnisse oder deren Fehlen aufzuschreiben und dann nichts weiter dafür zu tun. Hat man aufgeschrieben, was man in dieser halben Stunde alles gemacht hat, lässt sich auch das Fehlen eines Ergebnisses gegenüber dem Mathe-Lehrer gut kommunizieren.

5.7 Knobelaufgaben und Wettbewerbe

Er gibt junge Menschen, die sich für Mathematik interessieren und die gerne viel mehr über Mathematik lernen möchten, als im Schulunterricht angeboten wird. Was bietet unser Bildungssystem diesen Menschen an?

Es gibt viele außerschulische Angebote wir z. B. Mathematik-Sommercamps. Solche Angebote sind zeitlich begrenzt und nur für einen sehr geringen Prozentsatz der Schülerschaft nutzbar.

Außerdem gibt es Mathematik-Wettbewerbe. Da bekommen Schüler dann ganz besondere Knobelaufgaben. (Mein Professor für lineare Algebra - Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Alan T. Huckleberry - bezeichnete übrigens das, was in solchen Wettbewerben vorkommt, als Mickey-Mouse-Mathematik.) Teilweise sollen die Aufgaben in Gruppenarbeit gelöst werden und fast immer steht nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung. Das ist sicher für einige Schüler genau die richtige Umgebung, um Bestleistungen zu erbringen; für andere Schüler schließen sich Zeitdruck und Mathematik aus und sie mögen es auch nicht, wenn andere Leute ihnen in ihre Gedankengänge reinquatschen.

Von Seiten der Kultusministerien ist die Notwendigkeit der unterrichtsbegleitenden individuellen Förderung erkannt worden. Beispielsweise schreibt das Niedersächsische Kultusministerium dazu:

> Die Feststellung, ob eine kognitive Hochbegabung bei einer Schülerin oder einem Schüler vorliegt, erfolgt auf der Grundlage eines lernbegleitenden diagnostischen Prozesses. Die Lehrkräfte, die den Schüler oder die Schülerin unterrichten, erhalten durch die fortlaufende Beobachtung und Beschreibung des Lern- und Leistungsverhaltens Hinweise auf die individuellen Fähigkeiten und Kompetenzen. Wenn vermutet wird, dass eine Hochbegabung besteht, erfolgen gezielte systematische Beobachtungen und Untersuchungen in Lernsituationen und auch mit informellen Tests. Qualitative Verfahren werden durch quantitative ergänzt. In der Begabungsdiagnose sind neben der kognitiven Leistungsbestimmung motivationale und emotionale Persönlichkeitsvoraussetzungen sowie wesentliche Sozialisationsfaktoren zu erfassen.

Wenn das dann alles erledigt ist, weiß der Mathelehrer, dass sich ein Schüler für Mathe interessiert. Und dann:

> Für die pädagogisch-psychologische Beratung stehen Lehrkräfte, Beratungslehrkräfte der Schule, Schulpsychologinnen und Schulpsychologen, Beraterinnen und Berater sowie schulfachliche Dezernentinnen und Dezernenten der Schulbehörde u.a. zur Verfügung.

Nach erfolgter Beratung geht es so weiter:

> Ein individueller Lern- und Entwicklungsplan sollte für diese Schülerinnen und Schüler möglichst unter ihrer Mitwirkung erarbeitet und vereinbart werden.

Und erst *danach* soll dann wohl eine individuelle Förderung im Unterricht stattfinden.

Man kann sich wohl leicht ausmalen, wie oft ein solch überbürokratisierter Prozess zu einer unterrichtsbegleitenden, nachhaltigen Förderung führt: Sehr, sehr selten. Für Menschen, die vielleicht Mathematiker werden möchten, machen Schulen kaum Angebote. Das wird hier erwähnt, nicht um einen Zustand anzuprangern, sondern einfach nur, um die Realität festzustellen und daraus Konsequenzen ziehen zu können. Der Sportunterricht bereitet schließlich auch niemanden auf den Leistungssport vor genauso wenig wie der Musikunterricht für zukünftige Dirigenten interessant sein dürfte.

Schüler, die sich für Mathematik interessieren, haben oft Probleme mit dem gängigen Mathematikunterricht. Sie langweilen sich im Unterricht, weil sie z. B. im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch auf Suggestivfragen des Lehrers antworten sollen, ohne die Lösung zu verraten, obwohl sie diese schon lange kennen. Sie beschäftigen sich dann mit anderen Dingen, stören den Unterricht und können im Extremfall die Teilnahme am Unterricht komplett verweigern. So kann es also passieren, dass junge Menschen, die eigentlich viel mehr über Mathematik erfahren möchten, als der Schulunterricht bietet, schlechte Noten in Mathe haben.

Bekommt die Klasse Aufgaben für eine Unterrichtsstunde, kann es gut sein, dass manche Schüler nach 5 Minuten fertig sind. Oftmals werden ihnen dann zusätzliche Übungsaufgaben angeboten, aber genau diese Übungsaufgaben brauchen sie ja gerade *nicht*, weil sie über die einzuübenden Fertigkeiten schon verfügen. Das kann für den jeweiligen Schüler eine belastende Situation sein: Erledigt er die zusätzlichen Übungsaufgaben, langweilt er sich noch mehr als vorher. Auf der anderen Seite stellt sich ein Schüler ungern gegen den Lehrer und sagt z. B.: „Frau Lehrerin, mir gefallen Ihre Aufgaben nicht.“ Das würde auch eine gewisse Unruhe in die Klasse bringen.

Ein weiteres Angebot für Schüler, die sich besonders für Mathematik interessieren, sind Knobelaufgaben. Auch diese Aufgaben beinhalten laut Prof. Huckleberry Mickey-Mouse-Mathematik. Meistens muss man einen bestimmten „Trick“ anwenden, um auf die Lösung zu kommen. Der Lehrer verrätselt also sein eigenes Wissen in besonderer Weise, um es dem Schüler besonders schwer zu machen auf das zu kommen, was dem Lehrer ohnehin schon bekannt ist. Das ist für manche Schüler bestimmt interessant. Mit der echten Mathematik, also der Wissenschaft von den abstrakt-logischen Strukturen, hat das aber nichts zu tun und es gibt eben auch Schüler, die sich genau dafür interessieren. Dabei kann jedes Thema der Schulmathematik - angefangen vom Distributivgesetz bis zum Hauptsatz der Analysis - beliebig tief, breit, abstrakt, formal, axiomatisch etc. entwickelt werden (siehe dazu viele Beispiele im zweiten Teil dieses Buches). So kann jeder Schüler den eigenen Bedürfnissen entsprechend sich mit dem aktuellen Thema des Unterrichts befassen. Damit wird auch das zu Recht kritisierte „Vorlernen“ oder das Überspringen einer Klassenstufe unnötig. Zudem sollten Zusatzaufgaben die Möglichkeit bereitstellen, tatsächlich zu eigenen mathematischen Entwicklungen zu kommen (siehe dazu das Kapitel „Mathematik individuell gestalten“). Es kann für Schüler extrem wertvoll sein, ihren Mitschülern die selbst entwickelte Mathematik zu präsentieren.

5.7.1 Was man tun kann

- ★ Schubladendenken vermeiden: Niemand ist einfach „Überflieger“ oder „hochbegabt“. Solche Etiketten führen zu sozialer Ausgrenzung und widersprechen dem, was das Lernen bezwecken soll: Nicht zu bleiben, wie (oder wer) man ist.
- ★ Sich in die Lage des anderen versetzen: Ein Schüler in der Klasse, der schon alles kann, macht den Unterricht für den Lehrer schwieriger.
- ★ Das Gespräch suchen: Wenn Schüler, Lehrer und Eltern wertschätzend und konstruktiv miteinander reden, kann das sehr viel Druck aus der Situation nehmen.
- ★ Als Schüler kann man sich mathematische Themen suchen, mit denen man sich während des Unterrichts beschäftigen kann, wenn man die Unterrichtsanforderungen schneller als vom Lehrer geplant erfüllt hat.
- ★ Außerschulische, mathematisch passende Aktivitäten und Projekte suchen. Es gibt auch viele Möglichkeiten, online mit Gleichgesinnten zu kommunizieren.

5.8 Training ist anstrengend - Mathe auch

Mathematik ist wie sportliches Training: Es kann ungemein Spaß machen - aber anstrengend ist es auch. Und um gleich mit einem Vorurteil aufzuräumen: Mathematiker sind auch nicht faul! So etwas wird zuweilen von Mathe-Lehrern - die übrigens in der Regel *keine* Mathematiker sind - geäußert, um damit zu kokettieren, wie wahnsinnig schlau sie doch seien - also so schlau, dass sie es nicht nötig haben, sich anzustrengen. Von einem Mathematiker habe ich eine solchen Spruch noch nie gehört.

Wenn man Mathe lernt oder mathematisch Probleme bearbeitet und sich dabei anstrengen muss, heißt das nicht, dass man für die Mathematik zu untalentiert ist. Es ist der *Sinn* von Aufgaben, anstrengend zu sein. Das ist beim Krafttraining auch so: Wenn man nur Gewichte bewegt, die leicht sind, erzielt man keinen Trainingseffekt. Nur wenn das Gehirn intensiv angeregt wird, macht es sich die Mühe, sich zu verändern - sprich also: zu lernen. Es reicht z. B. auch nicht, sich ein Thema nochmal anzugucken, wie man so schön sagt. Wenn man die Gewichte im Gym nur anguckt, bringt das ja auch nichts.

Mathematik steht auch aus Gründen der Persönlichkeitsbildung auf dem Lehrplan. Jeder Mensch, der Mathematik lernt, kommt immer wieder an Punkte, an denen er nicht weiter weiß. Diese Spannung aushalten zu können und trotz des Drucks kreativ und offen nach Lösungen suchen zu können, ist eines der Lernziele im Mathematikunterricht. Mit Rückschlägen zielorientiert und motiviert umzugehen, erhöht die Resilienz.

Auf der anderen Seite hat das nichts mit dem Spruch „Mathe muss weh tun.“ zu tun, der als Rechtfertigung für manche Lehrer dienen soll, die ihren Schülern bewusst zu schwere Aufgaben geben, damit „die Schüler sich ’mal richtig anstrengen müssen“. Didaktisch sinnvoll ist ein solches Verhalten natürlich nicht. Wenn man sich beim Krafttraining zu schwere Gewichte auflegt, kann man sich anstrengen, wie man will: Man wird einfach keine Übung durchführen können und so schlicht gar nicht trainieren.

Wie bei sportlichen Leistungen bedarf es auch für das Mathematikverständnis regelmäßigen Trainings. Dabei sind die Trainingszeiten ganz gut vergleichbar. Wenn es für einen jungen Menschen schlecht in Mathe läuft, hat er von den vier wöchentlichen Unterrichtsstunden ziemlich wenig, weil er mit dem Lehrstoff einfach nicht mitkommt. Trotzdem wird er hier und da einmal etwas aufschnappen und am Ende der Woche hat er dann vielleicht zweimal 10 Minuten lang etwas gelernt. Kommt noch eine Hausaufgabe hinzu, in der er für 20 Minuten mal einen guten Lauf hatte. Vergleichen wir das mit sportlichem Training: Wenn man zweimal pro Woche 10 Minuten und zusätzlich einmal für 20 Minuten trainiert, wird man gewaltig unter den eigenen körperlichen Möglichkeiten bleiben. Und nach der mehr als zweimonatigen Pause im Sommer (6 Wochen Ferien + 2 Wochen vor den Ferien, in denen nichts gemacht wird + 1 Woche nach den Ferien, bis der Unterricht wieder los geht) fängt man dann wieder bei Null an.

Das typische (schlechte) Lernverhalten eines Schülers, zwei Tage vor der Klassenarbeit mit dem Lernen anzufangen (Bulimie-Lernen), ist vergleichbar mit dem Versuch, in zwei Tagen z. B. Geräteturnen lernen zu wollen. Das funktioniert einfach nicht! Sicher, man wird in der Klassenarbeit mehr erreichen, als wenn man überhaupt nicht gelernt hätte, aber verglichen mit dem eigenen Potenzial ist das so gut wie nichts.

Auf der anderen Seite der Skala gibt es Leistungssportler, die jeden Tag mehrere Stunden mit ihrem Training beschäftigt sind. Das gilt auch für das mathematische Training von Mathematik-Studenten und Mathematikern.

Irgendwo dazwischen liegt der Trainingsaufwand, den man Schülern empfehlen kann. Stellen wir uns einmal einen Durchschnitts-Schüler vor, der mäßig an Mathematik interessiert ist, ganz gerne gute Noten hätte und noch nicht weiß, was er mal werden möchte. Mit welchem Zeitaufwand kann dieser Mensch rechnen? Aus Sicht eines effektiven Zeitmanagements ist der wichtigste Punkt, keine Zeit in der Schule liegen zu lassen. Wenn man im Unterricht sitzt und nichts versteht, vergeudet man einfach seine Zeit. Deshalb muss das erste Ziel sein, im Unterricht Mathematik zu lernen. Falls das schwierig sein sollte, kann man die Informationen, die im Unterricht vorkommen, notieren und sie noch am gleichen Tag nacharbeiten. Sollten Fragen nicht geklärt werden können, kann man sie in der nächsten Unterrichtsstunde stellen. Man kann auch Unterrichtsstunden so vorbereiten, dass man sich z. B. am Unterrichtsgespräch beteiligen kann - auch wenn ein solches Unterrichtsgespräch vielleicht nervig sein mag. Aber in der Schule herumzusitzen und sich über den doofen Unterricht aufzuregen, ist zumindest vom Zeitmanagement her maximal ineffizient.

Schafft man es also, im Unterricht etwas zu lernen und erledigt man seine Hausaufgaben zeitnah und konzentriert, braucht man nur noch ein paar Minuten zusätzlich, um das eigene Wissen und Können zu reflektieren. Was habe ich in der letzten

Woche gelernt? Was konnte ich vor zwei Monaten noch nicht? Kann ich die Grundrechenarten noch? Wie sieht es aus mit dem Umformen von Bruchtermen, der Prozentrechnung, Dreisatz, Scheitelpunktform, dem Rechnen mit Klammern und negativen Zahlen? Kann ich ohne Vorlage aufschreiben, was in den letzten Mathe-Stunden durchgenommen wurde? Kann ich es mit meinen Worten formulieren? Wenn der durchschnittlich mäßig an Mathematik interessierte Schüler zusätzlich zu den Hausaufgaben zwei- bis dreimal pro Woche jeweils 15 Minuten in die Beantwortung solcher Fragen investieren würde, stünde der guten Note in Mathe nichts mehr im Weg. Lernt man regelmäßig in kurzen Lerneinheiten, kommt schnell ein Gefühl der Sicherheit auf. So kann man ohne Druck pro investierter Zeiteinheit das meiste lernen. Man braucht vor der nächsten Klassenarbeit keine Angst mehr zu haben, weil man ja den gesamten Lehrstoff ständig parat hat. Und während die anderen Schüler dann kurz vor der Klassenarbeit viele Stunden (sehr ineffektiv) lernen müssen, hat man Freizeit.

Kapitel 6

Prüfungen

Unter Stress kann man nicht denken. Man kann unter Stress besonders gut entweder wegrennen oder kämpfen. Beides ist aber in einer Mathe-Prüfung nicht gefragt. In diesem Abschnitt kommen die größten Stressfaktoren in Prüfungen zur Sprache und wie Lehrer und Schüler diese minimieren oder wenigstens damit umgehen können.

6.1 Fester Prüfungszeitpunkt

Der Zeitpunkt der Mathe-Prüfung - sei es nun Klassenarbeit, Klausur, Abschlussprüfung oder Abitur - kann meistens nicht vom Schüler festgelegt werden. Es gibt aber Schulen, die Schülern die Wahl des Prüfungszeitpunktes überlassen. Schüler können sich also dann zu einer Klassenarbeit anmelden, wenn sie sich bereit dazu fühlen. Allein schon die Tatsache, dass der Schüler sich freiwillig für einen Zeitpunkt entscheidet, nimmt Stress aus der ganzen Angelegenheit und befördert eine positive Prüfungsathmosphäre. Wir alle haben bestimmt einmal die Situation erlebt, dass wir abends im Bett lagen und uns schlecht fühlten, weil am nächsten Tag in der Schule eine Prüfung anstand. Wir hatten vielleicht Angst, nicht einschlafen zu können und dann am nächsten unausgeschlafen die Prüfung bestehen zu müssen. Hätten wir gewusst, dass wir die Prüfung auch noch am nächsten Morgen absagen können, wäre alles halb so schlimm gewesen und wir hätten vermutlich viel besser schlafen können.

Damit sich Schüler den Prüfungszeitpunkt selbst aussuchen können, ist es nötig, das reichlich angestaubte Modell des Unterrichts im Klassenverband und im 3/4-Stunden-Takt in ein digitales Modell zu überführen, in dem Schüler alle nötigen Unterrichtsmaterialien auf ihrem digitalen Endgerät zur Verfügung haben und die Zeiteinteilung sowie die Einteilung in Lerngruppen selbst vornehmen. Das ist übrigens keine Frage des Alters. Es gibt auch Grundschulen, die so arbeiten - wobei die Schüler natürlich bei der Zeit- und Gruppeneinteilung Hilfe von den Lehrern erwarten können.

6.2 Einzige Prüfung

Prüfungen wie Klassenarbeiten können Schüler nur ein einziges Mal schreiben. Das erzeugt einen Leistungsdruck, der nicht nötig ist. Durch die digitalen Möglichkeiten, die in den letzten Jahren und Monaten zum Unterrichtsgeschehen hinzugekommen sind, ist es für Lehrer ein Leichtes, beliebig viele Klassenarbeiten/ Klausuren zu einem Thema mit gleichbleibendem Anforderungsniveau herzustellen. So könnte also „eine“ Klassenarbeit/ Klausur mehrmals angeboten werden.

Um den Terminkalender nicht so zu belasten, gibt es die Möglichkeit, Probeklassenarbeiten/ Probeklausuren herauszugeben. Dann könnten Schüler sich mit diesen Klassenarbeiten testen und so darüber Auskunft erhalten, ob sie auf die eigentliche Klassenarbeit genügend vorbereitet sind. Das würde die Vorbereitung der Schüler nicht nur immens vereinfachen, sondern es wäre einfach fair. Auch ich als Nachhilfelehrer mit sehr viel Erfahrung kann nicht wissen, welchen Schwierigkeitsgrad die Aufgaben z. B. zu so einem überschaubaren Thema wie Potenzgesetze haben werden. Nur ein Beispiel: Kommen Brüche als Basen vor oder nicht? Ich hatte schon beide Fälle: Brüche als Basen sind im Unterricht besprochen worden und kamen nicht vor und auch den Fall, dass Brüche als Basen nicht besprochen wurden, aber in der Klassenarbeit vorkamen. Und immer wieder erlebe ich, dass in Prüfungen doch etwas dran kommt, was im Unterricht nicht besprochen wurde.

Verfügten Schüler über Probeklassenarbeiten/Probeklausuren mit vollständigen Lösungen, könnten sie viele Fehler vermeiden, die nichts mit mathematischem Verständnis zu tun haben. Gibt es Punktabzüge, wenn die Äquivalenzzeichen nicht hingeschrieben werden? Muss ein Antwortsatz aufgeschrieben werden? Soll erst die Formel umgeformt werden, bevor die Zahlen eingesetzt werden oder darf man sofort Zahlen einsetzen? Wie wird der Schritt von der Formel zum Einsetzen von Zahlen notiert? (Es gibt Lehrer, die an dieser Stelle ein Gleichheitszeichen fordern, obwohl das falsch ist.) Die Antworten auf diese Fragen richten sich nach den persönlichen Vorlieben des Lehrers. Mit der vollständigen Lösung einer Probeklassenarbeit/ Probeklausur könnte der Lehrer deutlich machen, was er möchte.

Zudem können in Klassenarbeiten unerwartete Schwierigkeiten auftreten. Z. B. wollte eine Schülerin einen Term, der Klammern und negative Zahlen enthielt, mit dem Taschenrechner ausrechnen. In der Klassenarbeit stellte sie dann fest, dass sie offenbar zu falschen Ergebnissen kommt. Sie wusste auch, dass das an der Eingabe in den Taschenrechner lag, konnte aber den Fehler nicht finden und vergeudete bei der Fehlersuche viel Zeit, die ihr dann bei der Bearbeitung der restlichen Aufgaben fehlte. Hätte sie die Möglichkeit gehabt, eine Probeklassenarbeit durchzurechnen, hätte sie das Problem bis zur Klassenarbeit lösen können.

Ein anderes Thema ist das Zeitmanagement während einer Klassenarbeit/ Klausur: Schüler können normalerweise nicht einschätzen, welchen Umfang die zukünftige Klassenarbeit/ Klausur haben wird und in welcher Geschwindigkeit sie die Aufgaben bearbeiten müssten, um die volle Punktzahl zu erhalten. Auch Schüler, die von ihrer guten Vorbereitung auf die Prüfung überzeugt sind, merken in Prüfungen oftmals dann viel zu spät, dass sie nun für die Bearbeitung der restlichen Aufgaben zu wenig Zeit haben. Eine Probeklassenarbeit/ Probeklausur hätte dieses Problem schon vorher offenbaren können.

Auch wenn meiner Meinung nach das Verständnis der Mathematik viel wichtiger ist als die Mathe-Note, ist es doch für Schüler ein sehr großer Unterschied, ob unter der Klassenarbeit/ Klausur eine 4 oder eine 3 steht. Und wenn da nur deshalb die 4 steht, weil während der Prüfung vermeidbare Probleme aufgetaucht sind, die zudem nichts mit mathematischem Verständnis zu tun haben, merken Schüler schnell, dass die Regel: „Wenn ich mich gut vorbereite und Mathe verstehe, bekomme ich auch gute Noten.“ *nicht* gilt. Die Frustration, die es für die Vorbereitung der nächsten Prüfung zu überwinden gilt, ist damit wieder ein Stück gewachsen.

Stellen wir uns nun den typischen Lehrer vor, der angesichts der tatsächlich immer zahlreicher werdenden Aufgaben, die er zu erfüllen hat, nun die Hände über dem Kopf zusammenschlägt und fragt: Was soll ich denn noch alles machen? Wie kann diesem Menschen geholfen werden?

Bis auf die zentralen Prüfungen stellt jeder Lehrer in Deutschland sein Klassenarbeiten/ Klausuren individuell. Das ist für den Lehrer viel Arbeit und hat für den Schüler den Vorteil, dass nur solche Themen vorkommen, die im Unterricht auch besprochen wurden (zumindest theoretisch). Man könnte aber auch anders herum vorgehen: Man einigt sich darauf, welche Lehrinhalte genau z. B. zum Thema „Wurzelgesetze“ in der 9. Klasse Gymnasium vorkommen sollen. Alle Lehrer, die nun (in einem bestimmten Bundesland) eine Klassenarbeit dazu entwerfen, stellen diese samt ausführlicher Lösung einem öffentlichen Online-Pool zur Verfügung. So hat man auf einen Schlag viele hundert Klassenarbeiten zum Thema „Wurzelgesetze“ zusammen. Im nächsten Jahr braucht dann kein Lehrer mehr eine Klassenarbeit zu entwerfen, weil er sich einfach eine aus dem Pool fischen kann. Außerdem haben so Schüler mehr Beispielklassenarbeiten zur Verfügung, als sie in ihrem Leben bearbeiten können.

Trotz einiger Initiativen sind wir in Deutschland sehr weit von einem solchen Pool entfernt.

6.3 Knappe Prüfungszeit

Für jede Prüfung muss vorher die Prüfungsdauer festgelegt werden. Dabei gibt es grundsätzlich zwei unterschiedliche Konzepte: Dem Schüler wird genügend Zeit gegeben, um die Prüfungsaufgaben zu bearbeiten. Möglicherweise sind dann aber Schüler schon vor Ende der Prüfung mit allen Aufgaben fertig. Sie können dann aber keine Leistung zeigen, die über die Prüfungsfragen hinaus geht. Um das zu vermeiden, gibt es Prüfungen, die so viele und so umfangreiche Fragen enthalten, dass sie unmöglich in der Prüfungszeit bearbeitet werden können. So kann man auch vom schnellsten Schüler die höchstmögliche Leistung messen. Solche Prüfungen geben aber nur wenig Aufschluss darüber, was die Schüler ohne Zeitdruck leisten könnten.

Im deutschen Schulsystem tendiert man zur ersten Version. Z. B. hat man im Abitur gerade im Fach Mathematik genügend Zeit, alle Aufgaben vollständig zu bearbeiten. In Klassenarbeiten/ Klausuren sieht das manchmal etwas anders aus. Es sind dann so viele Aufgaben zu bearbeiten, dass man kaum Zeit hat, gründlich über die Aufgaben nachzudenken. Das erzeugt Stress und unter Stress kann man schlecht denken. Gerade die Mathematik steht für gründliches Denken und präzise Analyse, die unter Zeitdruck kaum möglich ist. Das ist ein Grund mehr, warum Schüler in Klassenarbeiten/ Klausuren schlechtere Leistungen zeigen als es ihnen ohne Druck möglich wäre.

6.4 Rückgabe der Klassenarbeiten/ Klausuren

Man stelle sich einen Betrieb mit 30 Angestellten vor. Jeder Woche werden alle zusammengerufen und der Chef verteilt Noten für die Arbeitsleistung der letzten Woche. Würden wir in einem solchen Betrieb gerne arbeiten wollen? Die Schüler in Deutschland müssen das aber regelmäßig ertragen, wenn die Klassenarbeiten zurückgegeben werden - und zwar in einer bestimmten Reihenfolge, z. B. die schlechteste Arbeit zuerst und die beste Arbeit zuletzt. Dann wird der Klassenspiegel noch an in die Tafel geschrieben und somit weiß jeder Schüler in der Klasse, wer genau welche Note hat.

Warum die Bloßstellung der Schüler, die in der Klassenarbeit/ Klausur schlechte Noten hatten, vor der Klasse so wichtig ist, konnte mir bisher kein Lehrer erklären. Man könnte auf dieses zusätzliche, frustrierende Erlebnis einfach verzichten. Könnten sich Schüler die Prüfungszeitpunkte aussuchen, würde wohl die Rückgabe der Klassenarbeit/ Klausur nicht vor der ganzen Klasse stattfinden und die Note eines Schülers bekäme kaum jemand mit.

6.5 Aufgaben mit einer einzigen Lösung

Auf der einen Seite kann man sagen: In Prüfungen geht es immer um benotete Leistungen. Das lässt sich zunächst nicht ändern. Aber im Fach Deutsch hat man doch viel weniger Stress, oder? Warum ist das so? Weil man im Fach Deutsch etwas gestalten kann und in Mathe nicht. Schreibt man eine Textanalyse, kann es nicht vorkommen, dass man nichts hinschreiben kann. In Mathe kann das aber immer passieren. Wenn man nicht auf die Lösung der Aufgabe kommt, dann steht halt nichts auf dem Papier; es gibt dann keine zweitbeste oder drittbeste Lösung. Oder man schreibt etwas hin, was falsch ist. Im Fach Deutsch kann das nicht passieren, denn dabei geht es immer um graduelle Unterschiede. (Siehe dazu den Abschnitt: „Mathematik in Prüfungen gestalten: Aufsätze“.)

6.6 Falsche Vorbereitung

Wie schon im Abschnitt „Training ist anstrengend“ beschrieben, bereiten sich Schüler oftmals falsch auf Prüfungen vor, indem sie kurz vorher mit dem Lernen beginnen. Dadurch bleibt sehr wenig Lehrstoff im Langzeitgedächtnis hängen und ein tieferes Verständnis der Lehrinhalte (Neudeutsch: deep understanding) ist überhaupt nicht möglich.

6.7 Struktur von Prüfungsaufgaben

Die Prüfungsfragen haben eine bestimmte Struktur. Alle Schüler lernen sehr schnell - nämlich wie effektiv es für die Erlangung guter Noten ist, die spezielle Struktur der Aufgaben zu verstehen. Dieses Verständnis ist etwas, was man tatsächlich später im Leben nicht mehr braucht. Individuelles Verständnis von Mathematik ist dabei nicht gefragt.

6.8 Mathematik in karnevalistischer Einkleidung

Anwendungsaufgaben enthalten manchmal Mathematik in karnevalistischer Einkleidung, z. B. soll die Geradengleichung einer Gerade, die durch zwei gegebene Punkte im Raum verläuft, bestimmt werden. Bis dahin ist das eine Standardaufgabe aus der Vektorrechnung. Im Aufgabentext ist von Vögeln die Rede, die Geraden-gleich durch die Lüfte fliegen. So etwas passiert, wenn auf Biegen und Brechen Anwendungsaufgaben gestellt werden sollen, die vermeintlich mit der Lebenswirklichkeit von Schülern etwas zu tun haben. Junge Menschen sind vielleicht unerfahren, aber sie sind nicht blöd. Sie merken, wenn sie nicht für voll genommen werden und wenn Lehrer Pseudo-Anwendungsaufgaben stellen nach dem Motto: „Für die Schüler wird's schon reichen.“ Solange Schule auf solche Prüfungen vorbereiten soll, bleibt individueller Unterricht wohl ein Traum.

6.9 Unterschiedliche Schüler, eine Klassenarbeit

Wir haben in einer Klasse eigentlich immer Schüler, die gerne etwas über die echte Mathematik wissen möchte und nicht nur Aufgabenschemata abspulen möchten und wir haben auch Schüler, denen viele Grundlagen fehlen und die eigentlich beim kleinen Einmaleins anfangen müssten, um den Schulstoff zu verstehen. Beide Gruppen sind von Klassenarbeiten genervt - entweder, weil sie keine Mathematik oder unbekannte Aufgabenschemata enthalten. Wenn der Unterricht im Klassenverband im 3/4-Takt weiter gehen soll und in Mathe-Prüfungen keine individuell zu gestaltenden Lösungen gefragt sind, wird das auch so bleiben. Guter und individueller Unterricht erhöht nicht nur das Leistungsniveau aller Schüler, sondern erhöht auch die Unterschiede zwischen Schülern. Das ist aber nur dann ein Problem, wenn die Lösungen der gestellten Aufgaben keine individuellen Unterschiede zulassen.

6.10 Fazit

Ich frage mich, warum wir uns als Gesellschaft ein solches Prüfungssystem leisten. Warum gestalten wir Prüfungen nicht so, dass wir in den Prüfungen die besten Leistungen der Schüler sehen? Es sind mehrere Möglichkeiten angesprochen worden, die entweder sofort oder in sehr kurzer Zeit umsetzbar sind.

Man stelle sich vor, in einem Bundesland einigten sich alle Mathe-Lehrer darauf, was in einer bestimmten Klassenstufe zu einem bestimmten Thema unterrichtet werden soll und hunderte Lehrer stellten ihre Klassenarbeiten und Lehrmaterialien und Übungsaufgaben etc. online bereit. Wir könnten innerhalb weniger Wochen unseren Schülern zu diesem Thema ein komplettes Lehrangebot mit allen erdenklichen Erklärungen, Übungsaufgaben, Videos, Probeklassenarbeiten etc. machen. Das würde nicht alle Probleme auf einmal lösen - aber sehr viele.

Würde man in Mathe-Prüfungen Aufsätze schreiben lassen, würde der individuelle Gestaltungsspielraum jedes Schülers sofort gegeben sein. Diese Maßnahme würde noch nicht einmal Geld kosten.

Kapitel 7

Anschluss verpasst

Es gibt mehrere Möglichkeiten, in Mathe den Anschluss zu verpassen: In einer Unterrichtsstunde, innerhalb eines Themas oder ganz generell, weil man die Grundlagen eines Themas nicht mehr beherrscht oder ganz vergessen hat. Entsprechend gibt es auch unterschiedliche Möglichkeiten, diesem Problem zu begegnen.

7.1 Anschluss in einer Schulstunde verpasst

Das ist schnell mal passiert! Ein paar Minuten Unaufmerksamkeit und schon weiß man schon nicht mehr, worum es geht. Damit lässt sich auch ganz gut umgehen - wenn man sofort gegensteuert. Tut man das nämlich nicht, erzielt man im weiteren Verlauf der Unterrichtsstunde wohl keinen Lerneffekt mehr und man vergeudet seine Zeit.

7.1.1 Was man tun kann

★ Möglichst viel vom Rest der Unterrichtsstunde profitieren.

★ Weiteren Informationsverlust vermeiden: Das Unterrichtsgeschehen protokollieren, das Tafelbild abschreiben oder speichern. Wenn man den Sinn des Unterrichts nicht versteht, muss genauer mitgeschrieben werden, damit man die Stunde nacharbeiten kann.

★ Auf jeden Fall *nicht* während des Unterrichts einen Mitschüler um eine kurze Erklärung bitten, denn dann hat der Mitschüler auch den Anschluss verpasst.

★ Die Unterrichtsstunde möglichst zeitnah nacharbeiten. Fragt man noch am gleichen Tag z. B. einen Mitschüler nach dem verpassten Inhalt, kann sich dieser vermutlich noch gut an Details erinnern und die Angelegenheit ist dann wohl in wenigen Minuten geklärt.

7.2 Anschluss innerhalb eines Themas verpasst

Auch das kann sehr schnell gehen: Gerade eben dachte man noch, man sei im neuen Thema sehr gut unterwegs und plötzlich hat man eine Aufgabe vor sich, bei der man einfach nicht weiter weiß. Man hat vielleicht den Eindruck, überhaupt nichts mehr zu verstehen. Es ist dann sicher eine gute Idee, den Lehrer um Rat zu fragen, aber der fragt dann zurück: „Was genau hast du denn nicht verstanden?“ Und dann kommt die Antwort, mit der das Problem erst richtig Fahrt aufnimmt: „Alles.“

Auf der einen Seite kann der Lehrer natürlich nicht die gesamte Mathematik erklären und er muss eine Antwort schuldig bleiben. Auf der anderen Seite entstehen solche Probleme aber vor allem deshalb, weil Schüler keine ausführlichen Lösungen ihrer Aufgaben bekommen, sondern die Lösungen im Unterricht besprochen werden. Vielleicht wird eine Lösung von einem Schüler vorgestellt, der erstens nuschelt und zweitens weder alle Zwischenschritte nennt noch erklärt, wie er auf den Lösungsansatz gekommen ist, bis der Lehrer dann unterbricht und anmerkt, einer der Lösungschritte sei falsch. Der Lehrer korrigiert kurz mündlich und weiter geht’s zu nächsten Aufgabe. Ein Schüler, der sich von der Besprechung der Aufgabe Klarheit erhofft hat, hat nun ein paar Stichpunkte und Lösungsfragmente notiert, von denen er aber nicht weiß, ob sie richtig sind, weil er nicht genau verstanden hat, was der Lehrer in der mündlichen Korrektur gesagt hat. Das heißt, der Schüler hat letztlich keine verwertbare Information erhalten. Mit einer ausführlichen Musterlösung wäre das nicht passiert.

7.2.1 Was man tun kann

★ Verständnisprobleme sollten immer sofort geklärt werden. Wartet man z. B. bis kurz vor der Klassenarbeit, haben sich noch viel mehr Probleme aufgetan, die man dann möglicherweise nicht mehr rechtzeitig lösen kann.

★ Der Frageliste zum Lösen von Aufgaben verwenden. Z. B.: Was genau habe ich nicht verstanden? Bis zu welchem Punkt habe ich alles verstanden? etc.

★ Hartnäckig bleiben. Dem Lehrer genau sagen, ab welchem Punkt etwas nicht verstanden wurde. Wenn man mit der Erklärung des Lehrers nichts anfangen kann, gerne nochmal nachfragen. Oder Mitschüler fragen, KI fragen, das Internet fragen etc.

★ Etwas nicht zu verstehen, ist keine Schande. Blöd ist nur, etwas nicht zu verstehen und daraus keine Konsequenzen zu ziehen.

7.3 Fehlender Anschluss zu den Grundlagen

In der Mathematik bauen viele Inhalte aufeinander auf. Um quadratische Funktionen zu verstehen, sollte man schon lineare Funktionen verstanden haben oder um die Bruchrechnung zu verstehen, sollte man die Grundrechenarten beherrschen.

Ein Riesenproblem im Matheunterricht ist, dass Schüler in der weiterführenden Schule oftmals die Bedeutung der Grundrechenarten nicht mehr kennen. Die Schwierigkeit ist hier vor allem: Wenn man z. B. Termumformungen oder Funktionen - die ja verallgemeinerte Rechnungen sind - nicht versteht, müsste man das Rechnen üben und zwar das Rechnen aus der Grundschule. Das macht aber merkwürdigerweise niemand. Vielleicht liegt das daran, dass alles mit dem Taschenrechner gerechnet wird und man deshalb glaubt, das Rechnen als Fähigkeit nicht zu benötigen.

Z.B. wissen Abiturienten oftmals nicht, was subtrahieren ist. Sie können nur eine Rechnung in den Taschenrechner eintippen. Wenn sie z.B. von 100 Erbsen 53 abziehen, können sie mit dem Taschenrechner das Ergebnis 47 produzieren, sie wissen aber nicht, dass das ungefähr die Hälfte ist. Es fehlt einfach das Verständnis von Quantitäten. Sie wissen z.B. nicht, dass 48 gleich 40 + 8 und auch gleichzeitig $6 \cdot 8$ ist. Wie wollen sie dann ein Polynom faktorisieren? Überhaupt ist ein Polynom etwas ähnliches wie eine Zahl in Dezimaldarstellung. Wenn man aber gar nicht weiß, was eine Zahl in Dezimaldarstellung ist, wird es ziemlich schwierig, ein Polynom zu verstehen. Hier z. B. ein Polynom in **x**:

$$9 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 3 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0$$

Setzt man $\mathbf{x} = 10$ erhält man eine Zahl in Dezimalschreibweise:

$$9 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 = 94\,832$$

Tatsächlich ist es für Schüler nicht ganz einfach, Lücken im Lehrstoff selbstständig zu schließen, weil sie oft nicht wissen, was Verständnis ist, schließlich sollen im Schulunterricht meistens nur die richtigen Ergebnisse hingeschrieben werden. Das Lösen von Aufgaben kann auch mit einer Ersatzstrategie erfolgen, wobei der Schüler aber selten weiß, dass es sich um eine solche handelt. Macht man z. B. Äquivalenzumformungen mit einer Reihe auswendig gelernter Umformungen und versteht nicht, welchen Sinn diese Methode hat und warum sie funktioniert, kann man komplexe Aufgaben nicht in Teilaufgaben zerlegen, die dann den verschiedenen Themenbereichen zugeordnet werden. Diesen Mangel wird man aber kaum bemerken, wenn man mit einer Ersatzstrategie Gleichungen erfolgreich löst.

7.4 Das große Vergessen nach der Prüfung

Hinzu kommt: Alles, was man nach der Prüfung wieder vergisst, muss man wieder lernen, wenn das Nachfolgethema abgeprüft wird. Hat man z. B. vergessen, was lineare Funktionen sind, muss man das für gewisse Lösungsmethoden quadratischer Gleichungen nachlernen. Hat man vergessen, was Steigungsdreiecke sind, muss man das beim Thema Ableitungen zusätzlich lernen. Schüler wiederholen keinen Lehrstoff, der gerade im Moment nicht besprochen wird. Das ist aber zumindest ineffektiv, denn sie müssen es bei der nächsten Prüfung wieder lernen. Außerdem hat man das Problem mit einem neuen Thema, dass man erstmal nichts versteht, weil man Lücken im Lehrstoff hat. Manchmal weiß man auch einfach nicht, was einem fehlt.

Es kann lange dauern, bis man herausfindet, was einem fehlt. So gesehen fängt die Prüfungsvorbereitung schon an, bevor das neue Thema beginnt.

7.4.1 Was man tun kann

★ Möglichst früh anfangen, das eigene, individuelle Verständnis von Mathematik aufzubauen. Dabei können die Fragen aus dem Abschnitt „Frageliste zum Verständnis“ helfen.

★ Sobald man etwas Verstanden hat, kann man dieses Verständnis immer wieder am Schulunterricht testen: Hilft mir dieses Verständnis? Kann ich damit den Anforderungen des Unterrichts gerecht werden? Fühle ich mich damit wohl, oder gibt es noch etwas zu klären, zu erweitern, etc.?

★ Man kann an jedem beliebigen Punkt anfangen, individuelles Verständnis aufzubauen. Wenn man eine Aufgabe nicht versteht, kann man sich fragen: Kenne ich alle Begriffe, die in der Aufgabe vorkommen? Bauen diese Begriffe auf anderen Begriffen auf? Kenne ich diese? Gibt es Verfahren, mit denen ich die Aufgabe lösen kann? Zu welchem Thema gehören diese? Bauen sie auf anderen Verfahren auf? usw.

★ Was das Rechnen angeht, sollte man beherrschen: Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen, mit ganzen Zahlen (also auch den negativen Zahlen), mit Brüchen, mit Dezimalzahlen (setzt die Bruchrechnung voraus), mit Prozentzahlen (setzt die Bruchrechnung voraus), mit irrationalen Zahlen usw.

★ Das individuelle Verständnis von Mathematik ist ein Bereich, in dem es Sinn ergibt, sich mit Mitschülern zu vergleichen. Es ist eine wertvolle Erfahrung, zu bemerken, dass jeder Mensch sein eigenes Verständnis der Mathematik hat. Man wird sicher keine zwei Schüler finden, die ihr Verständnis eines Themas genau gleich beschreiben würden. Dem anderen Menschen zuzuhören, sich in ihn hineinzuversetzen, die eigenen Gedanken am Verständnis des anderen zu schärfen: Das schafft eine starke (Klassen-) Gemeinschaft.

Kapitel 8

Die Vorbereitung einer Mathestunde

Es gibt eine Reihe sehr guter Bücher, die sich mit dem Thema beschäftigen, wie guter Mathematik-Unterricht aussehen soll. Angefangen von der zugrunde liegenden Lern- und Unterrichtsphilosophie über die Sozialform der Lernens in der Klasse und der inneren Differenzierung bis hin zum Deckblatt des Unterrichtsentwurfs der Prüfungsstunde kann man alles fein säuberlich nachlesen. Das liest sich auch alles hervorragend! Da haben sich sehr viele schlaue Menschen sehr viele Gedanken gemacht.

Als jemandem, der nicht unmittelbar im Schulbetrieb steckt, drängen sich mir dabei folgende Eindrücke auf:

8.1 Hunde dressieren

Lehrer wollen durch die Verwendung geeigneter Unterrichtsmethoden für ihre Schüler wirklich den bestmöglichen Lernerfolg erzielen, kommen aber (fast) niemals auf die Idee, ihre Schüler nach deren Meinung zu den Methoden zu fragen. Das erinnert mich an das dressieren von Hunden. Auch ein Hundehalter liebt sicher seinen Hund und er möchte für ihn das beste, käme aber trotzdem nicht auf den Gedanken, den Hund danach zu fragen, welche Dressurmethoden vom Hund erwünscht sind. Nun mag ein Hundehalter einwenden, dass man als Mensch schließlich merkt, ob es seinem Hund gut geht oder nicht.

Eben! Und das denken Lehrer auch: Sie merken, ob es ihren Schülern gut geht und zwar ohne die Schüler zu fragen. Lehrer stellen Schülern auch Aufgaben, die mit deren Lebenswirklichkeit zu tun haben - wobei der Lehrer festlegt, was die Lebenswirklichkeit des Schülers zu sein hat.

Es gibt eine Strömung in der Medizin, in der der Patient als Experte für sich und sein Leben gesehen wird. Der Arzt hat weiterhin (in den allermeisten Fällen) erheblich mehr Fachwissen als der Patient und der Arzt schlägt deshalb eine wissenschaftlich begründete Therapie vor, aber der Patient ist derjenige, der - dem Arzt vertrauend - sich und sein Leben auf diese Therapie einlässt. Wie das genau geht, weiß nur der Patient und er ist somit in dieser Hinsicht ein Experte.

Wir können auch Schüler als Experten für sich und ihr individuelles Verständnis sehen. Der Lehrer kann durch sein mathematisches sowie pädagogisch-didaktisches Fachwissen den Weg weisen, aber nur der Schüler kann die neue Information, die er im Unterricht erhält, in sein eigenes Verständnis übersetzen. Dieser Sichtweise folgend müsste der Mathe-Unterricht nicht neu erfunden werden, aber die Denkrichtung des Lehrers würde sich umkehren und ebenso die des Schülers: Letzterer würde sich dann nicht mehr fragen: „Was will der Lehrer von mir?“ oder „Was muss ich hinschreiben?“, sondern er würde sich fragen: „Wie verstehe *ich* es denn?“ oder „Welcher ist *mein* Weg zum individuellen Verständnis der Mathematik?“

8.2 Schöne Ideen

In Büchern für Referendare werden viele schöne Experimente vorgeschlagen. Z.B. kann man zwei kongruente Dreiecke herstellen, in das eine Dreieck die Seitenhalbierenden und in das andere die Winkelhalbierenden einzeichnen, die drei jeweils entstehenden Dreiecke trennen und diese wiegen. Einmal wird man feststellen, dass alle kleinen Dreiecke gleich schwer sind; beim anderen Dreieck wird man das nicht feststellen.

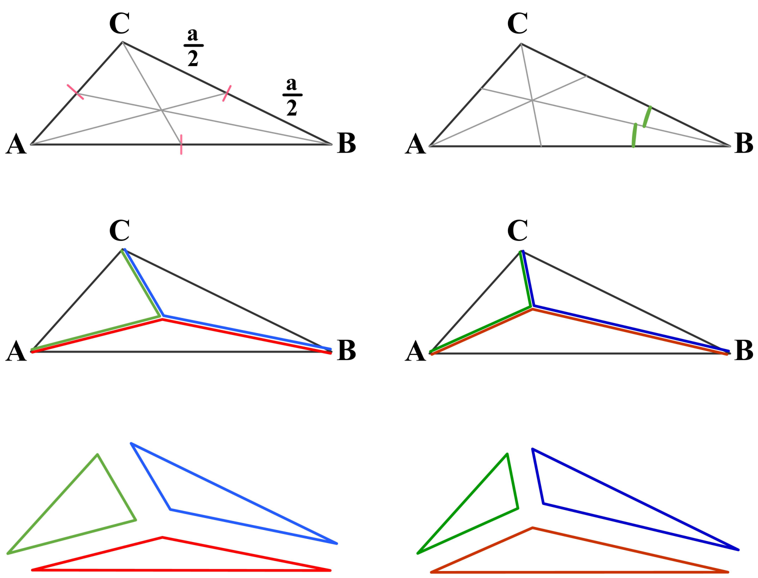


Abb. 8.1 Seitenhalbierende und Winkelhalbierende

Nun wissen Schüler aber auch, dass sie irgendwann eine Klassenarbeit schreiben werden. Darin werden Aufgaben vorkommen, die ein eindeutiges Ergebnis haben.

Sie werden die volle Punktzahl erhalten, wenn die Ergebnisse richtig sind. Vom Ausschneiden und Wiegen von Dreiecken wird in der Klassenarbeit keine Rede mehr sein. Schüler merken schnell, dass die schönen didaktischen Ideen nichts mit der Mathe-Note zu tun haben. Schüler werden also brav mitmachen, es aber trotzdem als Zeitverschwendung wahrnehmen.

Eine Alternative ist, den Schülern mehrere Erklärungs-, Begründungs- und Veranschaulichungsmöglichkeiten anzubieten und in der Klassenarbeit Fragen zu diesen Möglichkeiten zu stellen. Z. B. kann in der Klassenarbeit eine bisher nicht besprochene Möglichkeit vorgestellt werden, die dann mit den Möglichkeiten, die im Unterricht besprochen wurden, verglichen werden soll. Es können Schüler nach ihrer persönlichen Einschätzung gefragt werden, nach ihrem persönlichen Erleben, ihren Erfahrungen und ihren Gedanken dazu. Auch wenn es dabei um das persönliche Empfinden geht, kann die Begründung, warum der Schüler die eine Möglichkeit favorisiert und die andere nicht, reichlich mathematisches Wissen und analytischen Scharfsinn zutage fördern, der dann entsprechend bepunktet werden kann. Dann wäre die „Mathematik zum Anfassen“ nicht nur schmückendes Beiwerk, sondern prüfungsrelevant.

8.3 Schwierigkeiten!

Auch in diesem Zusammenhang sei es nochmals erwähnt: Laut (oft verwendeter) Theorie muss es in einer Unterrichtsstunde eine Motivationsphase, eine Phase der Schwierigkeiten und eine Phase der Überwindung der Schwierigkeiten geben.

Demnach ist es für einen Lehrer undenkbar, z. B. am Anfang des neuen Themas „Logarithmen“ den Schülern zu sagen, was ein Logarithmus ist, denn es muss ja erst die Motivationsphase erfolgen. In dieser Phase bekommen Schüler z. B. unlösbare Aufgaben. Das sind dann solche Aufgaben, die man nur mit Logarithmen lösen kann. Theoretisch sind nun alle Schüler begeistert und sie möchten unbedingt wissen, was ein Logarithmus ist. Das wird ihnen aber nicht gesagt, denn jetzt kommt die Phase der Schwierigkeiten. Der Schüler bekommt nun eine neue Aufgabe, die die Definition des Logarithmus nahe legt. Diese Aufgabe muss laut Theorie derartige Schwierigkeiten enthalten, dass mindestens manche Schüler in der Klasse Fehler machen, denn wüssten nun alle Schüler infolge dieser Aufgabe, was ein Logarithmus ist, wäre eine zu einfache Aufgabe gestellt worden! Nun schließt sich die Phase der Überwindung der Schwierigkeiten an, in der Schüler gestufte Lernhilfen erhalten (z. B. einen Lückentext oder auch das berühmte fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch), mit denen sie mehr oder weniger durch raten auf die richtige Lösung kommen sollen, in diesem Fall also auf die richtige Definition des Logarithmus.

Um es ganz deutlich zu sagen: Laut Theorie *können* Schüler nicht lernen, was ein Logarithmus ist, wenn der Lehrer ihnen sagt, was ein Logarithmus ist!

Regelmäßig habe ich in meinem Unterricht mit Schülern zu tun, denen sich eine solche Vorgehensweise nicht erschließt. Sie lernen in solchen Unterrichtsstunden sehr wenig bis gar nichts und fragen mich, was sie denn hätten lernen sollen. Meistens sind sie dann erstaunt darüber, dass die Erklärung der eigentlichen Lerninhalte der Stunde nur zwei bis fünf Minuten dauert.

Es gibt aber auch ein ganz anderes Unterrichtskonzept: flipped classroom. Grob gesagt bekommen Schüler dabei vor der eigentlichen Unterrichtstunde Materialien ausgehändigt, mit denen sie die Wissensaneignung in Einzelarbeit vornehmen. In solchen Materialien wird beispielsweise die Definition des Logarithmus schlicht und ergreifend genannt. Wenn Schüler und Lehrer dann zusammenkommen, tauschen sie ihre Erfahrungen aus, klären Verständnisschwierigkeiten und üben das Gelernte ein.

Mittlerweile gibt es auch Schulen, an denen Schüler am Anfang eines Halbjahres alle Unterrichtsmaterialien aller Fächer auf ihr digitales Endgerät bekommen. Schüler können so ihre Lernzeiten zum großen Teil selbst organisieren und z. B. für solche Fächer mehr Lernzeit einplanen, die ihnen nicht so leicht fallen.

Kapitel 9

Jetzt machen wir alles anders

9.1 Matheunterricht ändert sich

Die meisten Menschen glauben, Mathematik sei seit Jahrtausenden gleich geblieben und sowohl die Lehrinhalte im Fach Mathematik wie auch die Unterrichtsmethoden seien seit Jahrhunderten unverändert geblieben. Das aber könnte nicht weiter von der Realität entfernt sein. Am Mathematikunterricht wird seit Jahrzehnten herumreformiert, in Deutschland sogar in jedem Bundesland unterschiedlich. Wer verstehen möchte, warum unser Bildungssystem so dysfunktional ist, sollte sich auch mit diesem Aspekt der Bildungspolitik beschäftigen. Ist man als Schüler vielleicht mit den Unterrichtsmethoden des Lehrers unzufrieden, kann man sich gerne mal vor Augen halten, dass der Lehrer vielleicht gar nicht über seine Methoden entscheiden kann, sondern darüber von Bürokraten entschieden wird, die schon lange keinen Schüler mehr aus der Nähe gesehen haben.

Es gibt eine berühmte „Kartoffel-Aufgabe“, die die Entwicklung des Mathematikunterrichts über die letzten Jahrzehnte aufs Korn nimmt. Es gibt viele Versionen davon , z. B.:

9.1.1 1960 - Hauptschule

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50,00 DM. Die Erzeugerkosten betragen 40,00 DM. Berechne den Gewinn.

9.1.2 1980 - Gymnasium

Ein Agrarökonom verkauft eine Menge subterraner Feldfrüchte für eine Menge $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ hat die Mächtigkeit 20 $\{||||| \; ||||| \; ||||| \; |||||\}$. Für die Elemente g von $\mathbb{G}$ gilt: $g =$ 1 DM. Die Menge $\mathbb{E}$ der Erzeugungskosten ist um 4 $\{||||\}$ weniger mächtig als die Menge $\mathbb{G}$. Zeichne das Bild der Menge $\mathbb{E}$ als Teilmenge der Menge $\mathbb{G}$ und gib die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zur folgenden Frage an: Wie mächtig ist die Gewinnmenge?

9.1.3 1985 - Freie Waldorf-Schule

Male einen Sack Kartoffeln und singe ein Lied dazu.

9.1.4 1990 - Integrierte Gesamtschule

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50 DM. Die Erzeugerkosten betragen 40 DM, der Gewinn ist 10 DM. Aufgabe: Unterstreiche das Wort Gewinn und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber.

9.1.5 2020 - Gymnasium Berlin

Um die Gefühle einiger Person:innen der Quechua und Atacameño nicht zu verletzen, sind Kartoffeln verboten worden.

In Deutschland gibt es alle naselang neue Ideen und/ oder Vorschriften, wie Mathematikunterricht stattzufinden habe. Es fing mit der Mengenlehre in den 1970er Jahren an. Über Jahrzehnte wurde das dreigliedrige Schulsystem diskutiert ebenso wie die Verlängerung der Grundschule auf sechs Jahre. Es gab Gesamtschulen und die Verlängerung der Schulzeit. Dann kam der PISA-Schock und nun musste alles ganz schnell geändert werden. Es gab G8 und G9, Kompetenzorientierung, Lerngelegenheiten statt Unterricht, Inklusion, Digitalisierung und allerlei pädagogisch-didaktische Moden wie Gruppenunterricht, entdeckendes Lernen, konstruktivistischer Unterricht, Stationenlernen, Portfolios, Storytelling, Lernumgebungen in Schulbüchern (siehe dazu auch im Abschnitt „Schulbücher“) usw. Die Kernlehrpläne der KMK (Kultusministerkonferenz) werden umfangreicher, repetitiver und schriller: Im neuesten Entwurf vom 23.01.2023 steht: „Unterricht in Mathematik muss geschlechtersensibel gestaltet werden, ...“. Außerdem soll der Mathematikunterricht auch zu anderen Aufgaben Beiträge leisten, dazu zählen

- Menschenrechtsbildung,
- Werteerziehung,
- politische Bildung und Demokratieerziehung,
- Bildung für die digitale Welt und Medienbildung,
- Bildung für nachhaltige Entwicklung,
- geschlechtersensible Bildung,
- kulturelle und interkulturelle Bildung.

Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (Entwurf Verbändebeteiligung, 23.01.2023).[1]

[1] https://www.schulentwicklung.nrw.de/ lehrplaene/upload/klp_SII/m/gost_m_klpentwurf_ vb_2023_01_24.pdf

Wenn man sich unter Mathe-Lehrern umhört, wird man wohl keinen einzigen finden, der ein Problem mit binomischen Formeln hat, weil diese nicht demokratisch genug sind oder dem der Satz des Pythagoras nicht geschlechtersensibel genug ist. Da der Niedergang des deutschen Bildungssystems offensichtlich ist und weder von Wissenschaftlern noch von Politikern bestritten wird, meinen Bildungsminister und Bildungsministerinnen, Aktionismus verbreiten zu müssen. Allerdings haben sie erstens keine guten Verbesserungsvorschläge und können (oder wollen) zweitens nicht die eigentlichen Probleme wie z. B. die Überbürokratisierung der Lehrtätigkeit oder die pädagogisch-didaktische Gängelung der Lehrer angehen. So flüchten sie sich in wohlfeile Worthülsen (digitale pädagogische Inhaltskompetenz als Kernkompetenz einer entsprechend des DPCK-Modells professionalisierten Lehrkraft) oder toxische Bildungsideologien, mit denen sie dem woken Zeitgeist hinterherlaufen wollen. Das treibt dann mitunter solch absonderliche Blüten, wie der öffentlich diskutierte Vorschlag, *allen* Referendaren den Besuch eine NS-Gedenkstätte vorzuschreiben.

Offenbar trauen die Bildungsministerien ihren Lehrern nicht über den Weg. Mit jeder Reform werden entweder bestehende Vorschriften kleinteiliger oder es kommen weitere Vorschriften hinzu. Auf Bundesebene wird öffentlichkeitswirksam angekündigt, man wolle nun Mathe-Lehrer durch Fortbildungen qualifizieren. (Können Lehrer bisher eigentlich gar nicht unterrichten?) In einem neu aufgelegten Zehnjahresprogramm kann man sich als Lehrer zunächst als Multiplizierende qualifizieren lassen oder sich jetzt schon als Multi für sein Bundesland bewerben oder nach einem Jahr Wartezeit mit einem Team aus der Schule an den Fortbildungen durch qualifizierte Multiplizierende teilnehmen.

Alles klar?

Immer wieder hört man von Lehrern, dass sie sich wünschen, einmal einen einzigen Jahrgang von der 5. Klasse bis zum Abitur nach einem einzigen System durchunterrichten zu können, ohne durch Direktiven aus der Schulverwaltung dazu genötigt zu werden, im Galopp die Pferde zu tauschen.

Hierzu noch zwei Zitate aus der Kritischen Stellungnahme zur Kompetenzorientierung von 2017:[2]

> Die Überfrachtung der Schulen mit immer neuen Reformen ohne Plan muss aufhören. Die angefangenen und nur wenig durchdachten Konzepte beispielsweise der Inklusion und Digitalisierung werden ohne Einbeziehung derer, die das Alltagsgeschäft an den Schulen bewältigen, verordnet. Es ist nicht zu erwarten, dass sich die Unterrichtsqualität generell oder speziell in Mathematik verbessert, wenn man Lehrern ständig neue gesellschaftliche Aufgaben aufbürdet, für die auch die Politik selbst keine Lösungen bereit hält; ...

Und außerdem aus dem zweiten Brandbrief von Baumann/ Schwenk/ Spindler (zusammen mit vielen weiteren Unterzeichnern) an die KMK:[3]

[2]https://angewandte-didaktik.mathematik.uni-mainz.de/files/2019/05/2017-08-28-Kritische-Stellungnahmer-zur- Kompetenzorientierung.pdf

[3]https://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2020/03/Brief-an-die-KMK_2020-03-05pdf.pdf

> Die Überfrachtung der Schulen mit immer neuen Reformen, die den Lehrkräften aufoktroyiert und noch nicht einmal in Pilotprojekten getestet werden, muss aufhören. Es ist nicht zu erwarten, dass sich der Mathematikunterricht von Grund auf verbessert, wenn man bürokratische Instrumente wie die sogenannte Qualitätssicherung, ständige Vergleichstests oder die Einrasterung von Abituraufgaben in ein Kompetenzschema anordnet ... . Eine deutliche Verbesserung ist allerdings möglich, wenn Schüler genügend Mathematikunterricht erhalten – durchgängig mindestens vier Wochenstunden; siehe auch die erste Forderung in dem Maßnahmenkatalog der Verbände ... .

Indessen sind die Lösungen dieser Probleme ungemein einfach: Weniger Bürokratie, weniger Einmischung von „oben". Die Schulen vor Ort entscheiden über ihre Belange. Die Lehrer entscheiden über ihren Unterricht. Förderlich ist sicher auch ein konstruktiver und wertschätzender Austausch unter den Lehrern, wie es in vielen Ländern der Welt üblich ist.

Schon in der Meta-Meta-Studie von John Hattie „Visible Learning" von 2009[4], in der 800 Meta-Studien zur Unterrichtsqualität weltweit untersucht wurden, gab es (neben vielen anderen Erkenntnissen) ein zentrales Ergebnis: Die Qualität des Unterrichts hängt zum ganz großen Teil vom Lehrer ab, genauer gesagt von dessen Glaubwürdigkeit und Authentizität. Jedes Hineinregieren von Bürokraten in die Unterrichtstätigkeit eines Lehrers untergräbt als erstes genau diese beiden Eigenschaften.

[4]https://apprendre.auf.org/wp-content/opera/13-BF-References-et-biblio-RPT-2014/Visible%20Learning_A%20synthesis%20or%20over%20800%20Meta-analyses%20Relating%20to%20Achievement_Hattie%20J%202009%20...pdf

Kapitel 10

Schulbücher

Im Jahr 2008, als meine Videos noch recht neu waren, schrieb ich Schulbuchverlage an, um Möglichkeiten der Zusammenarbeit zu besprechen. Im Zuge dessen sprach ich mit Entscheidungsträgern eines sehr großen deutschen Verlags auch über Schulbücher. Man sagte mir: „Wir würden gerne gute Schulbücher machen, aber dann kriegen wir sie nicht genehmigt.“

Spontan könnte man wohl davon ausgehen, deutsche Mathematikschulbücher beinhalteten die präzisesten Definitionen, die elegantesten Formulierungen mathematischer Lehrsätze, die verständlichsten Erklärungen, die intuitivsten Veranschaulichungen, die genialsten Beweise und die instruktivsten Übungsaufgaben, die deutsche Didaktiker der Mathematik ersinnen konnten. Aber erstens ist das nicht so und zweitens soll das auch nicht so sein. Schulbücher sind nicht als gute Lehrbücher gedacht, sondern als Aufgabensammlungen (ohne Lösungen, versteht sich), oder bestenfalls noch als Bereitstellung von Lerngelegenheiten. Das kann man schon daran erkennen, dass diese Bücher noch nicht einmal auf mathematische Richtigkeit hin überprüft werden. Geprüft wird von ein paar Lehrern tatsächlich nur, ob die Inhalte im Buch sich der von der Kultusministerkonferenz festgelegten didaktischen Ideologie unterwerfen, das heißt z. B., ob sich alle Inhalte in das Korsett der prozessbezogenen Kompetenzen

> argumentieren, kommunizieren, Probleme lösen, darstellen, mit Objekten umgehen und mit Medien arbeiten

und der inhaltsbezogenen Kompetenzen

> an den Leitideen Zahl und Operation, Größen und Messen, Strukturieren und funktionaler Zusammenhang, Raum und Form sowie Daten und Zufall

in festgelegter Weise einordnen lassen. Dafür erhalten die prüfenden Lehrer eine Aufwandsentschädigung, die für eine gründliche Prüfung zu der z. B. auch das Durchrechnen aller Übungsaufgaben gehören würde, viel zu gering ist und gerade einmal das flüchtige Lesen ermöglicht.

Ein Blick auf die international verwendeten Schulbücher lässt ein Schema erkennen. Am Anfang eines Kapitels stehen kurze Erklärungen, warum der neue Lehrstoff wichtig ist und wie dieser auf dem vorherigen Lehrstoff aufbaut. Dann folgt der Lehrstoff und danach wird das Thema an durchgerechneten Beispielaufgaben entwickelt. Anschließend gibt es viele Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungen. In deutschen Schulbüchern ist das anders. Z. B.: Am Anfang eines Kapitels mischen Ilham und Mohammed Fruchtsäfte. Dann soll in der Klasse gefragt werden, wer alles Fruchtsäfte mag und welche das genau sind. Es dauert dann eine Weile, bis Schüler erkennen können, dass es z. B. um Bruchrechnung geht. Wenn man Glück hat, steht im Buch dann irgendwo noch der mathematische Kern des ganzen, z. B., wie man Brüche multipliziert. Es gibt aber auch Mathe-Bücher, in denen selbst das nicht steht!

Ist der Schüler bis dahin vorgedrungen, muss er die möglicherweise recht charmante Idee, die Bruchmultiplikation mit Hilfe des Mischens von Fruchtsäften einzuführen, schnell wieder vergessen, weil es im weiteren Unterrichtsverlauf nur noch darum gehen wird, die richtigen Ergebnisse von Aufgaben hinzuschreiben, die ganz anderen Schemata folgen als dem Experimentieren mit Fruchtsäften.

10.1 In Schulbüchern wird (fast) nichts erklärt

Wie schon erwähnt, sollen deutsche Mathematik-Schulbücher keine Lehrbücher sein. Um es ganz deutlich zu machen: Diese Schulbücher sind so geschrieben, dass ein Schüler, wenn er diese Bücher liest, Mathematik *nicht* versteht! Und als ob das nicht schon verrückt genug wäre, lässt sich ein solches Vorgehen auch noch begründen: Wäre ein Schulbuch ein Lehrbuch, könnten Schüler Mathematik auch ohne den Schulunterricht verstehen und sie passten im Unterricht dann nicht mehr auf.

Man mache sich klar, welches Bildungsziel dahinter steckt: Es geht eben nicht darum, dass Schüler Mathematik verstehen, sondern dass sie im Unterricht aufpassen. Konkret soll also ein Mensch geformt werden, der mit gespitzten Ohren brav im Unterricht sitzt, sich schön meldet und alles macht, was der Lehrer will - mal pointiert formuliert. Ich persönlich bin davon überzeugt, dass dahinter keine Verschwörung steckt. Solch ein Menschenbild wird allein schon durch die Eigendynamik eines überbürokratisierten Verwaltungsapparates, der unser deutsches Bildungssystem ist, erzeugt.

Nun möchten Schüler aber dennoch Erklärungen haben und finden sie zuhauf im Internet. Meistens sind diese Erklärungen nicht nur schlecht, sondern auch falsch. Jeder halbwegs seriöse Schulbuchverlag könnte bessere Erklärungen anbieten. Aber wie schon eingangs dieses Kapitels erwähnt, würde ein Buch mit solchen Erklärungen nicht genehmigt werden. Für Schüler ist selbstverständlich sehr ärgerlich, dass Verlage zumindest einen Teil ihres Kerngeschäfts YouTubern überlassen müssen, die von Tuten und Blasen keine Ahnung haben oder deren Geschäftsmodell sogar darin besteht, Schule schlecht zu reden.

Ich habe immer wieder mit Lehrern über dieses Thema gesprochen, auch z. B.

darüber, in Online-Schulbüchern 2 - 3 unterschiedliche Erklärungen eines Sachverhalts optional anzubieten. Selbst wenn diese Erklärungen nicht abgeprüft werden, wäre es - meiner Meinung nach - eine Möglichkeit, Schülern, die sich für Mathematik interessieren, ein vernünftiges Angebot zu machen. Lehrer entgegneten mir daraufhin, erstens interessiere die Schüler „sowas“ nicht und zweitens seien sie nicht in der Lage, die für sie passende Erklärung aus mehreren Möglichkeiten auszuwählen.

Tatsächlich zeigen aber die Aufrufzahlen im Netz, dass erstens sich Schüler sehr wohl für Erklärungen interessieren und zweitens, dass sie sich offensichtlich aus einem Angebot von hunderten bis tausenden von Erklärungen in Videos eine aussuchen können.

Es gibt die Schulbuchreihe „Lernumgebungen“, in der nicht nur keine Erklärungen stehen, sondern auch (zum großen Teil) keine Definitionen, keine Lehrsätze und auch keine durchgerechneten Beispielaufgaben. Jede Doppelseite bildet einen sachlichen Zusammenhang, der aber oftmals nicht mit mathematischen Begriffen bezeichnet wird. Hier ein paar Überschriften der Lernumgebungen aus dem Mathematikbuch 9 von Walter Affolter und anderen[1] :

Zu früh geboren
Vom Leben am Vierwaldstättersee
Genau!
Paris

Wir finden auch noch bei Walter Affolter (und anderen) im Mathematikbuch 8[2] folgende Überschriften:

- Nebenjobs
- Aufwärts - abwärts
- AHA!
- Gelsenkirchen
- entwicklung (SIC!) von zwei bis acht
- ... und dreht und dreht ...

Aufeinander folgende Doppelseiten bauen zudem thematisch nicht aufeinander auf. Die Lehrinhalte sind also ohne erkennbare Ordnung auf die Buchseiten verteilt.

Einer der zentralen Begriffe der Schulmathematik ist der Begriff „Term“. Deshalb mag man eine besonders sorgfältige Definition erwarten.

Die meisten Unterrichtswerke, die ich daraufhin untersucht habe, führen das Wort „Term“ im Stichwortverzeichnis auf. Auf der angegebenen Seite wird dann das Wort „Term“ mehrfach erwähnt und es gibt auch sehr viele Aufgaben und Bildchen und

[1] Affolter et al., Das Mathematikbuch 9, NRW, 1.Aufl., Stuttgart, Leipzig 2010
[2] Das Mathematikbuch 8, Lernumgebungen, NRW; Affolter et al., Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2010

Erkundungen dazu - nur eben keine Erklärung und schon gar keine Definition. Regelmäßig wird auf dieser Seite dieser Fachbegriff nicht erstmalig im Buch erwähnt, sondern man findet ihn viele Seiten vorher in einem Kapitel mit einem ganz anderem Thema - selbstverständlich auch ohne Erklärung.

Im Lambacher Schweizer 7[3] finden wir eine Abbildung von zu Dreiecken angeordnete Streichhölzer und folgenden Text:

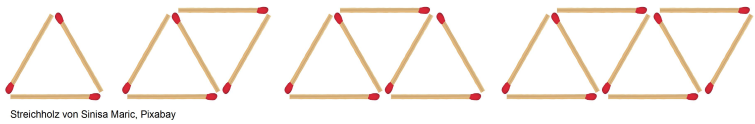


Abb. 10.1 Streichhölzer

„... Man kann jedoch entdecken, dass zwischen der Anzahl der Dreiecke und der Anzahl der Streichhölzer ein Zusammenhang besteht. Dieser kann in einem **Term** formuliert werden.“

Im weiteren Verlauf finden wir auch noch ein Beispiel eines Terms: „$3+(d-1)\cdot 2$“

Das ist alles an Erklärungen. So kann man Mathematik nicht verstehen!

In anderen Schulbüchern geht es doch auch, z. B. im Mathematikbuch 7[4]:

> Terme sind Rechenausdrücke aus Zahlen, Rechenzeichen und evtl. Klammern. Manchmal stehen auch Variablen (Buchstaben) für Zahlen. Die Gesetze, die für das Rechnen mit Zahlen gelten, gelten auch für das Rechnen mit Termen.

Für meinen Geschmack kommt hier zu wenig zum Ausdruck, dass Terme Kombinationen aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen sind, *die man ausrechnen kann*, aber zumindest gibt es eine Erklärung dieses Begriffs. Außerdem wird das Wort „Rechenausdrücke“ verwendet, welches - wenn man so will - die Ausrechenbarkeit in gewisser Weise enthält.

Nun bräuchte man nur noch ein paar Beispiele und Gegenbeispiele und Schüler könnten sogar etwas verstehen. Die Beispiele sind in diesem Zusammenhang deshalb nötig, weil aus den Definitionen meist nicht deutlich genug hervorgeht, dass auch einzelne Zahlen und einzelne Variablen Terme sein sollen. Solche Beispiele werden in „Basis Mathematik 7“[5] genannt. Außerdem finden wir dort folgende Gegenbeispiele: „2+)3; $1+-2$; $a-(b+c$; $(3+(2+1($“

Eine „Fast-Definition“ steht in „Zahlen und Größen 7“[6]:

[3] Blank et al., Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen, Ernst Klett Verlag, Stuttgart Leipzig, 1. Aufl., 2015, S. 112

[4] Affolter et al., Das Mathematikbuch 7, Lernumgebungen, Ernst Klett Verlag, Stuttgart Leipzig, 1. Aufl., 2010, S. 86

[5] Roth, Dieter, Basis Mathematik 7, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, 1. Aufl., 1991, S. 6

[6] Koullen/ Wennekers (Hrsg.), Zahlen und Größen 7, Gesamtschule Nordrhein-Westfalen, Berlin, Cornelsen Verlag, 2015, S. 170

> Ausdrücke mit Variablen, Zahlen und deren Verbindungen mit Rechenzeichen nennt man **Terme**.

So, wie das da steht, ist es leider falsch, denn es fehlt der Zusatz: ... wenn man die Ausdrücke ausrechnen kann (wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt). Wenn dieser Halbsatz noch dort gestanden hätte, wäre es eine fast perfekte Definition gewesen.

Wie wir feststellen, ist die Definition eines Terms kein Hexenwerk - auch nicht für Schüler einer 7. Klasse. Warum solche Definitionen in einigen Schulbüchern absichtlich weggelassen werden, kann ich nicht nachvollziehen. Dabei geht der angerichtete Schaden weit über das Thema hinaus: In der Mathematik haben alle Fachbegriffe (mindestens) eine Definition. Das ist ein wichtiger Teil der Klarheit und Exaktheit der Mathematik und der mathematischen Denkweise. Wenn Schüler gar nicht wissen, dass es Definitionen gibt, werden sie niemals mathematisch Denken können und somit auch Mathematik niemals verstehen können.

10.2 Falsche Mathematik

Das, was unterrichtet wird, in Schulbüchern vorkommt oder im Abitur abgefragt wird ist zum Teil mathematisch falsch. Das ist vielleicht schwer vorstellbar. Wir werden aber anhand einiger Beispiele sehen, wie schlimm die Lage tatsächlich ist. Dass es auf diese Weise Schülern unmöglich gemacht wird, Mathematik zu verstehen, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Schauen wir uns eine Aufgabe einmal genauer an. Sie ist aus „Das Mathematikbuch 8“ von Walter Affolter (und anderen).[7]

„Nimm an, Wissenschaftler hätten Mäuse gezüchtet, die bei einer Abzweigung in einem Drittel der Fälle nach links abbiegen und in zwei Drittel der Fälle nach rechts abbiegen. 18 000 dieser Mäuse werden nun in das links stehende Labyrinth geschickt.

a. Wie viele Mäuse würden bei welchem Endpunkt vermutlich etwa herauskommen?

b. Wie groß wäre die relative Häufigkeit, mit der die Mäuse aus den verschiedenen Löchern jeweils herauskommen?

c. Wie groß wären die Wahrscheinlichkeiten, mit denen eine einzelne Maus aus den jeweiligen Löchern wieder herauskommen würde?“

Links des Aufgabentexts ist noch eine Zeichnung zu finden, die so aussieht wie die folgende Zeichnung.

[7] Affolter et al., Das Mathematikbuch 8, Lernumgebungen, NRW; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2010, Seite 71, Lernumgebung 31, Gesetze des Zufalls

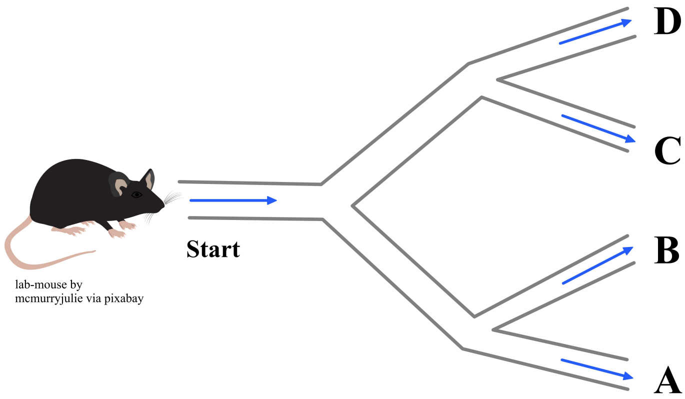


Abb. 10.2 18 000 Mäuse

In dieser Aufgabe sind gleich mehrere Fehler zu finden:

1. Wie können wir uns Mäuse vorstellen, die in einem Drittel der Fälle nach links abbiegen? Gehen wir von einer einzigen Maus aus, die vor einer Abzweigung steht: Wie kann diese Maus bewerkstelligen, in einem Drittel der Fälle nach links abzubiegen? Denkbar ist folgende Situation: Die Maus wird mehrmals vor eine Abzweigung gestellt und sie merkt sich, wie oft sie wie abbiegt. Wenn sie beim ersten Mal vor einer Abzweigung steht, geht sie, wohin sie will. Ist sie nach links abgebogen, wird sie dann die nächsten beiden Male nach rechts abbiegen. Oder wenn sie beim ersten Mal nach rechts abbiegt und beim zweiten Mal nach links abbiegt, wird sie beim dritten Mal wieder nach rechts abbiegen. Aber im Ernst: So etwas machen Mäuse nicht. Wenn eine Maus am Montag zweimal vor eine Abzweigung gestellt wird und am Freitag ein drittes Mal, wird sie sich am Freitag wohl kaum daran erinnern, wohin sie am Montag abgebogen ist. Doch selbst wenn sie sich erinnern könnte: Welche Motivation sollte eine Maus haben, am Freitag so abzubiegen, dass sie genau das Verhältnis ein Drittel zu zwei Dritteln einhält?

2. Stellen wir uns nun eine Maus vor, die sich Notizen macht, um auch am Freitag zu wissen, wie genau sie am Montag abgebogen ist, dann ist aber nicht klar, wie ein Drittel der Fälle berechnet werden soll, wenn die Maus viermal oder siebenmal abbiegt. Auch wenn wir nur dann Drittel berechnen wollen, wenn die Anzahl der Fälle durch 3 teilbar ist, bleiben Fragen offen: Angenommen, eine Maus biegt erst zweimal nach links ab und dann viermal nach rechts. Dann ist sie zwar eindeutig in einem Drittel dieser 6 Fälle nach links abgebogen, betrachten wir aber nur die ersten 3 Fälle, ist sie nicht in einem Drittel der Fälle nach links abgebogen. Oder nehmen wir an, die Maus biege sechsmal hintereinander nach links ab: Ist es in diesem Moment dann eine Maus, die in einem Drittel der Fälle nach links abbiegt, nur weil sie vor hat, die nächsten 12 Male nach rechts abzubiegen?

3. Da in der Aufgabenstellung im Anschluss von 18000 Mäusen die Rede ist,

könnte mit „in einem Drittel der Fälle“ auch gemeint sein, dass sich die Mäuse untereinander absprechen, wer in welche Richtung geht. Ok, jetzt wird es albern. Fazit: Es gibt keine Mäuse, die in einem Drittel der Fälle nach links abbiegen. Und weil in der Aufgabe nicht gesagt wird, was Fälle sind und wie Drittel unter diesen Umständen berechnet werden sollen, können nicht einmal vernunftbegabte Menschen passend zum Aufgabentext abbiegen.

4. Hier wird versucht, eine Anwendungsaufgabe zu formulieren. Während wir bei den Wissenschaftlern, die Mäuse züchten, wohl noch mitgehen, wird die Fantasie bei dem Ziel der Züchtung - nämlich ein Ein-Drittel-Zu-Zwei-Drittel-Verhalten an Abzweigungen zu erzeugen - schon stärker gefordert. Grotesk wird es allerdings bei der Anzahl der Mäuse: Kein Labor der Welt hält 18 000 Mäuse, um deren Verhalten zu studieren! Es ist gut und schön, Anwendungsaufgaben zu stellen, die mit der Lebenswirklichkeit der Schüler zu tun haben. Aber dann müssen diese Aufgaben auch realistisch sein, um keine Falschinformationen zu verbreiten.

5. Vielleicht gibt es aber noch viel mehr Mäuse als die 18000 und die Mäuse leben auch gar nicht im Labor, sondern Wissenschaftler haben eine neue Mäuseart - nennen wir sie *Vertere Musculus* - gezüchtet, die in freier Wildbahn lebt. Man könnte nun quer durch den Lebensraum einer Population einen Zaun aufbauen, der von den Mäusen nur durch Labyrinthe der abgebildeten Bauart passiert werden kann. Dann könnte man durchaus 18000 Mäuse in Labyrinthen beobachten. Aber was bedeutet dann „ein Drittel der Fälle“ auf die Mäuseart *Vertere Musculus* bezogen? Trägt denn jede Maus eine Ein-Drittel-Links-Abbiege-Wahrscheinlichkeit in sich? Und die macht sich dann genetisch bemerkbar, sodass sie weitervererbt werden kann?

6. Kommen wir zur Sprache: Im ersten Satz steht das Wort „hätten“, also Konjunktiv II von „haben“. Wenn wir aber etwas annehmen, sind wir nicht mehr in einer irrealen oder hypothetischen Situation, sondern wir nehmen an, die Wissenschaftler *haben* Mäuse gezüchtet. Nun könnte man einwenden, der Autor wolle durch die Verwendung des Konjunktiv II deutlichen machen, dass trotz der Aufforderung an den Leser, etwas anzunehmen, die angenommene Situation weiterhin hypothetisch bleibt und eben nicht real ist. Gut, dann hätte aber die gesamte Aufgabe im Konjunktiv II formuliert werden müssen. Aber im zweiten Satz sind wir wieder im Indikativ, denn da *werden* die Mäuse durch das Labyrinth geschickt.

7. Bleiben wir bei der Sprache: Im Aufgabenteil **a** wird danach gefragt, wie viele Mäuse herauskommen *würden*. Wir sind also im Konjunktiv II Futur I. Diese Frage könnte man beantworten, wenn die Mäuse vorher geschickt *worden sein würden* - also Konjunktiv II Futur II Vorgangspassiv. Da die Mäuse aber real im Indikativ geschickt werden, können sie nicht im Konjunktiv II herauskommen!

8. Noch wilder wird es in Aufgabe **b**: Es wird gefragt, wie groß die relative Häufigkeit *wäre* (Konjunktiv II Präsens), mit der die Mäuse *herauskommen* (Indi-

kativ Präsens). Das geht nicht! Entweder müssen beide Verben im Indikativ oder beide Verben im Konjunktiv stehen.

9. Im obigen Satz ist zudem die Zeit falsch: Im Aufgabentext heißt es, die „Mäuse werden nun ... geschickt“. Wenn also das Schicken der Mäuse in das Labyrinth im Präsens stattfindet, werden die Mäuse im Futur das Labyrinth verlassen. Man muss also fragen, wie groß die relative Häufigkeit *sein wird*, wenn die Mäuse *herauskommen werden*.

10. Außerdem ist in diesem Satz von Löchern die Rede, die in Aufgabe **a** noch Endpunkte waren. Auch wenn die meisten Schüler wohl erkennen werden, dass in diesem Fall Löcher und Endpunkte dieselben Dinge sein sollen, ist eine solche Nachlässigkeit den Schülern gegenüber schäbig.

11. In Aufgabenteil **c** kommt eine Maus *wieder* heraus, ohne vorher schon einmal herausgekommen zu sein. Sicherlich: Umgangssprachlich sagt man, man gehe hinein und komme wieder heraus - auch wenn es sich um einen einmaligen Vorgang handelt. Aber in einem mathematischen Text muss man sich über die denotative Bedeutung des Wortes „wieder“ im Klaren sein, vor allem dann, wenn das einfache Weglassen des Wortes das Problem behebt.

12. In diesem Aufgabenteil sind zudem die Zeiten falsch: Es wird danach gefragt, wie groß Wahrscheinlichkeiten *wären* (Präsens), wenn eine Maus *herauskommen würde* (Futur). Ich weiß nicht, ob es solche Konstellationen in diesem Universum geben kann, aber es überraschte mich schon sehr, wenn die heutige Größe einer Wahrscheinlichkeit von dem zukünftigen Verhalten einer Maus abhinge.

13. Weiter zu den mathematischen Fehlern: Wie wir schon besprochen haben, kann es Mäuse, die in einem Drittel der Fälle etwas machen, nicht geben. Lassen wir doch einfach mal die Fantasie spielen und stellen uns trotzdem 18 000 Mäuse vor einer Abzweigung vor, von denen zwei Drittel nach rechts gehen. „Zwei Drittel“ soll sich also auf die Anzahl der Mäuse beziehen, die vor einer Abzweigung stehen. Dann gehen $\frac{2}{3} \cdot 18\,000 = 12\,000$ Mäuse an der ersten Abzweigung im Labyrinth (siehe Abb. 10.2) nach rechts. Von denen gehen dann an der zweiten Abzweigung zwei Drittel wieder nach rechts und somit verlassen $\frac{2}{3} \cdot 12\,000 = 8\,000$ Mäuse das Labyrinth am Endpunkt **A**. Leider können wir mit dieser Interpretation aber Aufgabenteil **a** nicht lösen, denn es wird danach gefragt, wie viele Mäuse *vermutlich etwa* an einem bestimmten Endpunkt herauskommen. Wenn aber zwei Drittel der Mäuse jeweils nach rechts gehen, kommen am Punkt **A** *sicher genau* 8 000 Mäuse heraus.

14. Ich vermute, dass Angaben wie „in einem Drittel der Fälle“ als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden soll. Das ergibt aber aus mehreren Gründen keinen Sinn. Eine Maus kann als Lebewesen keine „Links-Abbiege-Wahrscheinlichkeit“ in sich tragen. Die Autoren verfallen hier auf die Idee, eine Wahrscheinlichkeit als Propensität zu verstehen, also eine von Karl Popper vorgeschlagene

quasi-physikalische Eigenschaft, die Objekte in sich tragen können und die man vielleicht mit Verwirklichungstendenz übersetzen kann. Die Wahrscheinlichkeit von einem Sechstel, dass z. B. die Seite mit der Augenzahl 4 eines fairen Würfels nach einem Wurf des Würfels oben liegt, ist dann die in den Würfel eingebaute Verwirklichungstendenz. Ist diese Propensität schon bei unbelebten Objekten problematisch, so ist sie für Lebewesen gänzlich ungeeignet. Popper ging es gerade um einen objektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, bei dem Subjekte nichts verloren haben.

15. Bemühen wir aber weiter unsere Fantasie und stellen uns Mäuse vor, die tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Dritteln an Abzweigungen nach rechts gehen. Dann können wir z. B. ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit von 100 dieser Mäuse 60 nach rechts gehen. Wir können auch ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit 61 oder 62 oder 15 nach rechts gehen. So etwas macht man in der Schulmathematik beim Thema „Binomialverteilungen“. Was wir aber nicht können, ist voraussagen, wie viele Mäuse nach rechts gehen *werden*. Wir können auch nicht voraussagen, wie viele *vermutlich* nach rechts gehen werden oder wie viele *etwa* nach rechts gehen werden. Hellsehen gehört nicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

16. Laut Begleitband soll für den Endpunkt **A** die Zahl 8 000 herauskommen, vermutlich durch die Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 18\,000$. Den mathematischen Zusammenhang kann man sich dabei so vorstellen: Wir interpretieren die zwei Drittel als Wahrscheinlichkeit und das Labyrinth als Baumdiagramm eines zweistufigen Zufallsversuchs. Aufgrund der Pfadmultiplikationsregel können wir dann für den Ausgang **A** die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ berechnen. Wir definieren nun einen neuen Zufallsversuch mit den Ausgängen **A** und $\overline{\mathbf{A}}$. Das ist ein Bernoulli-Versuch mit den Ergebniswahrscheinlichkeiten $P(\mathbf{A}) = \frac{4}{9}$ und $P\left(\overline{\mathbf{A}}\right) = \frac{5}{9}$. Wird dieser Versuch 18 000-mal durchgeführt, entsteht eine binomialverteilte Zufallsgröße $\mathtt{X}$ deren Erwartungswert $\mathbf{E}(\mathtt{X})$ wir mit $\mathbf{E}(\mathtt{X}) = 18\,000 \cdot \frac{4}{9} = 8\,000$ bestimmen können.

    Das ist zwar alles mathematisch richtig, aber für die 8. Klasse ist das zu anspruchsvoll.

17. In der 8. Klasse kann man aber einfach einen Zufallsversuch mehrmals durchführen und dann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit der Anzahl der Durchführungen multiplizieren. Mit einem geeigneten Ereignis und einer entsprechenden Anzahl von Wiederholungen käme man dann wieder auf die Rechnung $\frac{4}{9} \cdot 18\,000 = 8\,000$. Keinesfalls kann dieser Wert aber interpretiert werden als Anzahl, mit der das Ereignis *vermutlich etwa* bei 18 000-facher Wiederholung auftreten wird.

18. Zu Aufgabenteil **b**: Das Wort „jeweils“ bezieht sich nicht auf die Löcher, denn dann müsste es „aus den jeweiligen Löchern“ heißen (wie in Aufgabe **c**). Das Wort “jeweils“ bezieht sich auf das Herauskommen, was dann Sinn ergeben

würde, wenn die 18 000 Mäuse mehrmals durch das Labyrinth geschickt werden würden. Der Aufgabentext legt aber nahe, dass die 18 000 Mäuse nur einmal durch das Labyrinth geschickt werden. Auch wenn dieses Wort in diesem Zusammenhang grammatikalisch nicht falsch ist, so bleibt doch der Bezug des Wortes unklar.

19. Führt man einen Zufallsversuch mehrmals durch, kann man zählen, wie oft ein bestimmtes Ereignis eintritt. Teilt man diese Anzahl durch die Anzahl der Versuche, erhält man die relative Häufigkeit dieses Ereignisses. In Aufgabe **b** sollen wir nun eine relative Häufigkeit berechnen, ohne irgendeine Anzahl zu kennen, mit der ein Ereignis eingetreten ist. Das geht schlicht und ergreifend nicht. Selbst wenn wir in Aufgabe **a** vermutet hätten, dass 8000 Mäuse am Endpunkt **A** herauskommen, wäre es unsinnig, eine relative Häufigkeit zu berechnen, weil sich eine relative Häufigkeit als Teil der deskriptiven Statistik immer auf Beobachtungen konkret durchgeführter Zufallsversuche bezieht und eben nicht auf Vermutungen.

20. Wer bis hierhin noch nicht durchgedreht ist, darf sich auf Aufgabenteil **c** freuen: Wir haben schon zwei Interpretationen des Aufgabenteils **a** gesehen, mit denen wir sinnvoll auf die Gleichung $\frac{4}{9} \cdot 18\,000 = 8\,000$ kommen. Dabei haben wir die Angaben „in einem Drittel der Fälle“ und „in zwei Dritteln der Fälle“ als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, sodass wir die Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{9}$ bestimmen konnten, mit der eine einzelne Maus am Endpunkt **A** herauskommt. In Aufgabenteil **c** wird aber nach genau dieser Wahrscheinlichkeit gefragt. Als Schüler wäre ich jetzt sicher, Aufgabenteil **a** falsch bearbeitet zu haben. Was kann aber dann mit den „Drittel“-Angaben gemeint sein? Relative Häufigkeiten sind es auch nicht. Selbst wenn wir uns auf die absurde Vorstellung einließen, die Mäuse sprächen sich untereinander ab, sodass ein Drittel der 18 000 Mäuse an der ersten Abzweigung nach links gingen und jeweils ein Drittel der Mäuse dann auch an den zweiten Abzweigungen nach links gingen, machten wir offensichtlich einen Fehler, weil dann klar wäre, wie viele Mäuse genau an welchem Endpunkt herauskämen und die Formulierung „vermutlich etwa“ aus Aufgabenteil **a** unsinnig wäre.

21. Stellen wir uns eine große Population von Mäusen der Art *Vertere Musculus* vor, nun aber nicht mit der in jede Maus eingebauten Wahrscheinlichkeit von einem Drittel, nach links abzubiegen, sondern als Mäuse, die entweder immer nach links oder immer nach rechts abbiegen. Ein Drittel dieser Population sollen Linksabbieger sein, die anderen sollen Rechtsabbieger sein. Dann können wir uns zwar vorstellen, dass 18 000 Mäuse zufällig ausgewählt werden und wir können darüber spekulieren, wie viele dann wohl an einer Abzweigung nach links abbiegen, aber dann kämen an den Endpunkten **B** und **C** keine Mäuse an, was nach den Angaben im Begleitband falsch ist.

22. Es geht sogar noch abstruser! Zitat aus dem Begleitband[8]: „Für Wahrschein-

[8]Das Mathematikbuch 8, Begleitband, NRW; Affolter et al., Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2010, Seite 127

lichkeiten kann man bei dieser großen Zahl die relativen Häufigkeiten als Schätzwerte nehmen: 4/9 bei A; je 2/9 bei B und C und 1/9 bei D.“ Das bedeutet: Wir interpretieren die Drittel-Angaben aus der Aufgabenstellung als Wahrscheinlichkeiten, um im Aufgabenteil **a** zu vermuten, dass beim Endpunkt **A** $\frac{4}{9} \cdot 18\,000 = 8\,000$ Mäuse herauskommen werden. In Aufgabenteil **b** berechnen wir die relativen Häufigkeiten, die sich ergäben, wenn die Vermutungen richtig wären. In Aufgabenteil **c** verwenden wir dann die hypothetischen relativen Häufigkeiten, um Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, die wir schon als genaue Zahlen verwendet haben, um auf die Vermutungen zu kommen.

23. Relative Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten gleichzusetzen, ist falsch! Es ist auch falsch, zu behaupten, bei großen Stichproben müssen die Wahrscheinlichkeiten so ähnlich sein wie die relativen Häufigkeiten. Das müssen sie nicht! Auch nicht bei 18 000 Mäusen! Und *weil* das nicht so sein muss, gibt es das Fachgebiet der induktiven Statistik. Dieses Fachgebiet enthält die mitunter sehr komplexen mathematischen Verfahren, mit denen man von relativen Häufigkeiten sinnvoll auf Wahrscheinlichkeiten schließen kann. Wenn man relative Häufigkeiten einfach als Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten nehmen könnte, bräuchte man dieses ganze Fachgebiet doch gar nicht!

Nicht nur in Schulbüchern, sondern auch in Abituraufgaben finden sich solche Fehler. Dazu haben die Professoren Laurie Davies, Holger Dette, Franz-Reinhold Diepenbrock und Walter Krämer einen offenen Brief an die damalige Bildungsministerin von NRW, Barbara Sommer, geschrieben. [9] Dabei geht es im Wesentlichen um die Vermischung der Begriffe „relative Häufigkeit“ und „Wahrscheinlichkeit“. In der Aufgabe sollte (etwas vereinfacht dargestellt) eine empirisch ermittelte Trefferquote des Basketballspielers Dirk Nowitzki als Wahrscheinlichkeit verwendet werden. Die Herren schreiben dazu:

> Viel schwerwiegender als diese fehlende Anzahl der Freiwürfe, ... ist aber die vollständige Vermischung, die sich durch die ganze Aufgabe zieht, von zwei getrennten Begriffen der mathematischen Statistik. Damit wird die Aufgabe unsinnig und unlösbar. Es geht um folgendes. In einem fairen Münzwurf fällt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 Kopf oder Zahl. Wird die Münze nun z. B. 500 mal geworfen, kommt es nur selten vor, dass man genau 250 Kopf– und 250 Zahlwürfe bekommt. Gehen wir davon aus, dass wir 243 Kopf– und 257 Zahlwürfe bekommen. Die empirische Quote für Kopf ist dann 0,486, die Wahrscheinlichkeit beträgt aber nach wie vor 1/2. Diese empirischen Werte sind in ihrer Bedeutung von Grund auf verschieden von dem theoretischen Wert 1/2 und müssen daher auch in der mathematischen Behandlung bzw. Verwendung für Berechnungen unterschieden werden: Die Wahrscheinlichkeit ist eine feste Zahl, während die Anzahl der Kopfwürfe eine Zufallsgröße ist, die in diesem Beispiel einer Binomialverteilung mit den Parametern 500 und 0,5 genügt.

[9] https://bildungsklick.de/schule/detail/ministerium-bei-der-erstellung-von-mathe-aufgaben-im-zentralabitur-ueberfordert

> Die vollkommene Vermischung der beiden Begriffe macht die Aufgabe unlösbar mit der Konsequenz, dass die Lösung des Ministeriums schlichtweg unsinnig ist. Auch die Tatsache, dass leider in manchen (vom Ministerium zugelassenen) Lehrbüchern stellenweise in ähnlich fahrlässiger Weise die Begriffe vermischt werden, zeigt, wie tief das Problem liegt.

Wem das noch nicht deutlich genug ist, wird bei Dr. Raphael Diepgen fündig[10] Seine Kritik geht noch viel weiter und tiefer. Auf fast 9 Seiten zerlegt er die Aufgabe nach Strich und Faden. Da seine profunde Analyse zu umfangreich ist, um sie hier inhaltlich nachzuvollziehen, sollen nur ein paar Textausschnitte zitiert werden, die aber vielleicht das Ausmaß des Schreckens deutlich machen:

> Es ist nun für jeden, der auch nur ansatzweise die Logik des Testens verstanden hat, von vornherein schier undenkbar, dass man hier die einheitliche Nullhypothese in (2) verwirft, in (1) aber nicht – wie es sich aber als „Lösung“ ergibt, wenn man ebenso brav wie sinnentleert jeweils das von den Aufgabenautoren vorgezeichnete μ und σ berechnet ... Dass die Aufgabenautoren aber selbst an dieser grotesk absurden Stelle nicht innegehalten und ihre Wahnsinnskonstruktion abgebrochen haben, zeigt ganz krass, wie sehr sie in ihrer bloß formalen Spielerei das Verständnis für die zu modellierende stochastische Situation gänzlich verloren haben.

Er schreibt als Antwort auf die Frage, warum manche Schüler diese Aufgabe trotzdem lösen konnten, eine „skeptische Spekulation“:

> Viele Schüler erleben den Mathematikunterricht vermutlich als Einübung in mehr oder minder sinnfreie oder unverstandene Sprachspiele oder Regelsysteme, und dies reproduzieren sie dann halt auch im Abitur. Dass vermutlich Tausende von Schülern zum Abschluss eines 9-jährigen gymnasialen Mathematikunterrichtes völlig bedenkenlos eine Nullhypothese in Aufgabe b) (1) nicht verworfen und zugleich in Aufgabe b) (2) doch verworfen haben – und für diesen (von ihnen wohl gar nicht bemerkten) Widerspruch dann auch noch mit voller Punktzahl belohnt wurden –, spricht jedenfalls nicht dafür, dass es im schulischen Mathematikunterricht um die zentrale Kategorie von Mathematik und Logik geht, nämlich Widerspruchsfreiheit. Nur Witze leben vom Spiel mit Widersprüchen.

Prof. Laurie Davies nahm zusätzlich zum offenen Brief inhaltlich Stellung zu dieser (und einer weiteren) Aufgabe[11]. Auch hier soll nur ein kleines Zitat zeigen, um welche Größenordnung von Fehlern es geht:

> Die vom Ministerium angebotene Lösung zeugt von einer völligen Begriffsverwirrung. ... Die Lösung des Ministeriums ist unsinnig und falsch. Die Unterscheidung von Schätzwerten und wahren Werten ist von grundlegender Bedeutung in der Statistik: Die ganze Schätz- und Testtheorie, d.

[10] https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang28-2008/Heft3/2008-3_Diepgen.pdf
[11] https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/Jahrgang29-2009/Heft2/2009-2_davies.pdf

h. die ganze schließende Statistik, basiert darauf. Ein Schüler, der richtig gelernt hat, diese Begriffe zu trennen, kann diese Aufgabe nicht lösen.

Soweit die etwas ausführlichere Betrachtung dieser Abituraufgabe. Es gibt noch viele weitere Aufgaben, die ebenso „falsche Mathematik“ abfragen bzw. die Schüler nur dann lösen können, wenn sie nicht nachdenken und statt dessen einfach nur den eingeübten Ritualen folgen. Ein mathematisches Verständnis kann das Lösen der Aufgaben behindern.

Es geht hier nicht darum, dass sich irgendwo einmal in eine Abituraufgabe eine falsche Zahl eingeschlichen hätte, sondern dass das deutsche Bildungssystem strukturell ein Problem mit mathematischem Verständnis hat und dieses teilweise sogar verhindert.

Nehmen wir als Beispiel die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: In fast allen Schulbüchern finden wir gravierende Fehler, allen voran die falsche Verwendung von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit, welche im offenen Brief von Davies, Dette, Diepenbrock und Krämer erklärt wird (weshalb dieser Brief hier so ausführlich zitiert wird). Es wird davon ausgegangen oder behauptet oder nahe gelegt, die relative Häufigkeit eines Ergebnisses müsse sich nach vielen Durchführungen eines Zufallsversuchs der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses annähern. Betrachten wir hier den schon im Brief angesprochenen Münzwurf: Der Zufallsversuch soll das einmalige Werfen einer Münze sein. Wir gehen davon aus, dass die Ergebnisse „Kopf“ (K) und „Zahl“ (Z) jeweils die Wahrscheinlichkeit $0,5$ haben. Wird dieser Zufallsversuch „oft“ - z. B. 400-mal - durchgeführt, dann muss - so die Behauptung - die relative Häufigkeit von z. B. K in der „Nähe“ der Wahrscheinlichkeit von K liegen. Konkret bedeutet das, dass die Münze ungefähr 200-mal K anzeigen muss, wenn 400-mal geworfen wird. Es kann aber nicht sein, dass die Münze das *muss*, denn dann wäre der Münzwurf kein Zufallsversuch. Der Sinn eines Zufallsversuchs ist doch, dass die Münze eben nicht einem vorgegebenen Gesetz folgen muss. Außerdem bräuchte die Münze ein Gedächtnis, wenn sie die behauptete Annäherung von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit ausführen wollte, denn dann müsste sie z. B. nach in den ersten Würfen „zu oft“ gezeigtem Ergebnis Z in den folgenden Würfen verstärkt K zeigen, um auf die Anzahl von ungefähr 200-mal K zu kommen. Aber - wie wir alle wissen - hat die Münze gar kein Gedächtnis. Und das schreibe ich bewusst in diesem Ton, um deutlich zu machen, wie eklatant die Behauptung, die relative Häufigkeit müsse sich der Wahrscheinlichkeit annähern, dem gesunden Menschenverstand widerspricht.

Dessen ungeachtet wird immer wieder folgendes falsches (!) Schema durchgepaukt: Ein Zufallsversuch wird n-mal durchgeführt. Dabei tritt ein Ereignis[12] $\mathbf{E}$ k-mal auf. Schlussfolgerung: Die Wahrscheinlichkeit $\mathscr{P}(\mathbf{E})$ (gesprochen: „pe von e“) des Ereignisses $\mathbf{E}$ ist dann ungefähr gleich $\frac{k}{n}$. Je größer n ist, desto sicherer ist die Wahrscheinlichkeit $\mathscr{P}(\mathbf{E})$ gleich $\frac{k}{n}$.

Schauen wir uns dazu Beispiele an:

[12] Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen.

Im Lambacher Schweizer für Klasse 8[13] finden wir über das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten:

> Das große Vertrauen in Schätzungen, die auf vielen Versuchen beruhen, lässt sich durch das Gesetz der großen Zahlen rechtfertigen. Es besagt: Die Abweichungen der relativen Häufigkeiten von den Wahrscheinlichkeiten werden mit steigender Versuchszahl tendenziell kleiner.

In diesen beiden Sätzen kommen mehrere Fehler vor: Es gibt nicht *das* Gesetz der großen Zahlen. Tatsächlich gibt es ein schwaches Gesetz der großen Zahlen und mehrere Versionen eines starken Gesetzes der großen Zahlen. Vermutlich ist hier das schwache Gesetz der großen Zahlen gemeint.

Weiter wird ein falscher Bezug zwischen Modell und Realität hergestellt. Das schwache Gesetz der großen Zahlen lässt sich innermathematisch - also im Modell - beweisen. Ob aber die Realität dem Modell entspricht, kann das Modell nicht beweisen. Deshalb kann dieses Gesetz keinen Einfluss darauf haben, ob wir in der realen Welt einer Schätzung vertrauen oder nicht.

Außerdem steht im schwachen Gesetz der großen Zahlen *nicht*, die relative Häufigkeit eines Ereignisses müsse sich nach vielen Versuchsdurchführungen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses annähern - weder tendenziell noch sonst irgendwie! Umgangssprachlich (und etwas vereinfacht) formuliert, steht im schwachen Gesetz der großen Zahlen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses um einen bestimmten Betrag abweicht, immer kleiner wird, je häufiger der Versuch wiederholt wird und sogar gegen 0 geht, wenn der Versuch unendlich oft wiederholt werden würde.

Auch wenn es richtig ist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses in der Nähe der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses liegt, mit steigender Anzahl von Versuchsdurchführungen größer wird, heißt das nicht, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses auch nach sehr vielen Versuchsdurchführungen nicht maximal von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses abweichen kann. Werfen wir z. B. eine Münze 400-mal, kann 400-mal K (Kopf) eintreten. Das ist zwar unwahrscheinlich, aber es kann passieren. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für K immer noch gleich $0,5$, aber die relative Häufigkeit von K ist gleich 1 und weicht damit maximal von der Wahrscheinlichkeit von K ab.

Deshalb gibt es den Begriff „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“, weil eben nur die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit von K in der „Nähe“ der Wahrscheinlichkeit von K liegt, mit zunehmender Anzahl der Versuchsdurchführungen größer wird, obwohl die relative Häufigkeit von K tatsächlich *nicht* in der „Nähe“ der Wahrscheinlichkeit von K liegen *muss*.

Vermutlich wissen das auch die Autoren des „Lambacher Schweizer“, denn sie haben sich perfiderweise noch eine Hintertür offen gelassen: Sie schreiben, die Abweichungen werden *tendenziell* kleiner. So könnten sie - das spekuliere ich jetzt einfach mal ins Blaue hinein - wenn sie mit dem oben genannten Vorwurf konfrontiert

[13] Baum et al., Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasium - G9, NRW, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1. Aufl., 2021, S. 8

würden, sich immer noch damit herausreden, mit „tendenziell“ sei ja „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ gemeint.

Bleiben wir auf dem Boden der Tatsachen: Ich habe in 30 Jahren Unterricht noch nie einen Schüler der 8. Jahrgangsstufe getroffen, der das Wort „tendenziell“ als „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ interpretiert. Statt dessen habe ich aber schon hunderte Male den Satz gehört: „Aber wenn ich die Münze zufällig werfe, kann ich doch nicht wissen, was herauskommt!“

Und schlimmer noch, der „Lambacher Schweizer“ (so wie viele andere Lehrwerke auch) *definiert* die Wahrscheinlichkeit mit einer Erwartung, die Schüler eben nicht haben (ebd., S. 9)

> Mit Wahrscheinlichkeit drückt man aus, welche **relativen Häufigkeiten** man bei langen Versuchsreihen in etwa **erwartet**.

Nein, Schüler erwarten das nicht. Statt dessen merken sie, dass an der Sache etwas faul ist. Sie werden die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht verstehen können, wenn der zentrale Begriff, nämlich die Wahrscheinlichkeit, falsch eingeführt wird.

Schauen wir in das Buch „Zahlen und Größen 8“[14]. Da gibt es einen Philipp, der eine von Güven geäußerte Behauptung überprüfen möchte.

> Deshalb nimmt er die Heftzwecke und wirft sie 100-mal. Die Heftzwecke landet 45-mal auf dem Kopf und 55-mal auf der Seite.

$$\begin{aligned} P(\text{Kopf}) &= \tfrac{45}{100} = 45\% \\ P(\text{Seite}) &= \tfrac{55}{100} = 55\% \end{aligned}$$

Hier wir also allen Ernstes behauptet, die relative Häufigkeit nach 100 Versuchsdurchführungen sei exakt gleich der Wahrscheinlichkeit! Deshalb sei nochmals erwähnt: Weil das *nicht* so ist, gibt es überhaupt das mathematische Fachgebiet der Statistik. Wie sollen wir Schülern, die so etwas in der 8. Klasse lernen, in der Oberstufe erklären, nun dürfe man so nicht mehr schließen und müsse statt dessen statistische Verfahren lernen?

Es gibt auch keinen Zweifel daran, was mit $P(\text{Kopf})$ gemeint ist, denn am Seitenrand finden wir die Erläuterung:

> P wird in der Mathematik als Abkürzung für Wahrscheinlichkeit (engl. probability) genutzt.
>
> P(K) bedeutet „die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kopf geworfen wird“.

Auf derselben Seite sind noch weitere Fehler zu finden:

> Kann man nicht davon ausgehen, dass bei einem Zufallsexperiment die Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, so muss experimentiert werden, um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können.

[14] Koullen, Reinhold (Hrsg.); Wennekers, Udo (Hrsg.), Zahlen und Größen 8, Berlin, Cornelsen Verlag, 1. Aufl., 2008, S. 142

Man kann durch mehrmaliges Durchführen eines Zufallsversuchs die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen schätzen, aber niemals bestimmen. Das ist ein himmelweiter Unterschied. Und zum dritten Mal auf dieser Seite: Weil man *nicht* bestimmen, sondern nur schätzen kann, gibt es die Statistik.

Völlig aus dem Ruder läuft die Situation in den folgenden zwei Sätzen.

> Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses nähert sich bei einer großen Anzahl von Versuchen einem Wert an.
>
> Diesen Wert nennt man **(statistische) Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.**

Die relative Häufigkeit ist eine Zahl. Die kann sich nicht annähern.

Worauf hier Bezug genommen wird, ist eine Folge von relativen Häufigkeiten: Stellen wir uns wieder den Münzwurf vor. Wir wollen relative Häufigkeiten h des Ergebnisses „Kopf“ (K) bestimmen, wobei K die Wahrscheinlichkeit $0,5$ haben soll. Wir können nach einem einzigen Münzwurf die relative Häufigkeit h_1 von K bestimmen, indem wir die Anzahl des Auftretens von K - also entweder 0 oder 1 - durch die Anzahl der Versuchsdurchführungen - also 1 - teilen. Die relative Häufigkeit von Kopf ist nach einer Versuchsdurchführung entweder $h_1 = \frac{0}{1} = 0$ oder $h_1 = \frac{1}{1} = 1$. Nach zwei Versuchsdurchführungen bestimmen wir wieder eine relative Häufigkeit, nämlich die relative Häufigkeit h_2 des Ergebnisses K nach zwei Versuchsdurchführungen. Je nachdem, ob K keinmal, einmal oder zweimal aufgetreten ist, gibt es die möglichen Werte $h_2 = \frac{0}{2} = 0$ oder $h_2 = \frac{1}{2} = 0,5$ oder $h_2 = \frac{2}{2} = 1$. Auf die gleiche Weise können wir die relativen Häufigkeiten h_3, h_4, h_5 usw. berechnen.

Nun betrachten wir die Differenzen benachbarter Folgenglieder und stellen fest, dass diese Differenzen „grundsätzlich“ immer kleiner werden, je höher die Nummern der Folgenglieder sind. Schauen wir uns dazu einfach ein paar mögliche Beispiele an:

$$\begin{array}{rcccl} h_2 - h_1 & = & \frac{1}{2} - \frac{0}{1} & = & 0,5 \\ h_{11} - h_{10} & = & \frac{6}{11} - \frac{5}{10} & = & 0,0\overline{45} \\ h_{101} - h_{100} & = & \frac{51}{101} - \frac{50}{100} & = & 0,0\overline{0495} \end{array}$$

Das liegt aber nicht daran, dass sich die relativen Häufigkeiten „stabilisieren“ (wie es oft heißt) oder dass sie sich „einpendeln“ (was auch oft verwendet wird, als ob es sich um einen physikalischen Prozess handele) oder dass sie (mit eigenem Willen oder Impetus ausgestattet) zu einem vorgegebenen Wert „streben“, sondern schlicht und ergreifend daran, dass sich der Zähler benachbarter Folgenglieder immer nur höchstens um 1 unterscheiden können, während die Nenner immer größer werden, je höher die Nummern der Folgenglieder sind.

Trägt man eine Folge relativer Häufigkeiten in ein Schaubild ein, kann es tatsächlich so aussehen, als ob die relativen Häufigkeiten sich einem Wert annähern. Abgebildet sind hier die relativen Häufigkeiten von K, wie sie durch die Ergebnisfolge Z, K, K, Z, K, K, K, Z, K, K, Z, Z, K, K, K, Z, K, K, K, Z beim 20-fachen Münzwurf entstehen.

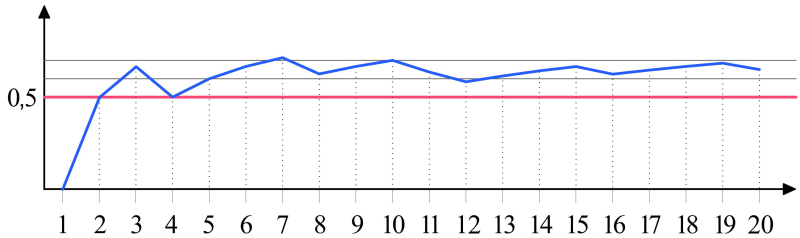


Abb. 10.3 Relative Häufigkeiten

In diesem Fall sieht es so aus, als ob die relativen Häufigkeiten zwischen $0,6$ und $0,7$ hin- und herpendeln. Es wäre aber unsinnig, daraus zu folgern, die Wahrscheinlichkeit für K sei gleich $0,65$, denn diese Folge von relativen Häufigkeiten kann eben auch durch eine Münze entstanden sein, deren beide Ergebnisse Z und K jeweils die Wahrscheinlichkeit von $0,5$ haben. Wir können niemals mit Sicherheit sagen, aufgrund von welcher Wahrscheinlichkeit für K die vorliegende Folge relativer Häufigkeiten entstanden ist.

Wie die abgebildete Folge relativer Häufigkeit weiter geht, können wir ebenfalls nicht wissen. Falls die Wahrscheinlichkeit von K gleich $0,5$ ist, ist es zwar wahrscheinlich, dass sich die relativen Häufigkeiten bei fortlaufender Wiederholung des Zufallsversuchs irgendwann in der Nähe von $0,5$ befinden werden, aber es *muss* nicht so sein. Deshalb müssen sich die relativen Häufigkeiten auch nicht einem Wert annähern. Und selbst wenn sie das augenscheinlich tun, muss dieser Wert nicht die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses sein.

Ebenfalls schlimm ist, dass sich die Autoren des Lehrbuchs einen Begriff ausgedacht haben, der in der Mathematik nicht vorkommt: Die statistische Wahrscheinlichkeit. Man kann doch den Schülern nicht einfach Fantasie-Mathematik beibringen! Aus den obigen Überlegungen geht auch hervor, warum es eine solche statistische Wahrscheinlichkeit nicht geben kann.

Es geht aber noch schlimmer: In der Zeitschrift „mathematik lehren“ steht[15], dass die beiden gängigen Definitionen der Wahrscheinlichkeit zirkulär - also falsch - sind.

> Wie der theoretische Ansatz nach Laplace, ist auch der frequentistische Ansatz im Grunde zirkulär, denn die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit ist über Wahrscheinlichkeiten definiert. Dies kann aber im Schulunterricht mithilfe von Aussagen wie „hat nichts miteinander zu tun“, die außerhalb des mathematischen Modells liegen, ersetzt werden. Auch die wichtige Aussage, dass die relative Häufigkeit bei zunehmender Versuchsanzahl ein immer „verlässlicherer“ Schätzer wird, beruht auf einem noch nicht vorhandenen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Denn „verlässlicher“ heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit außerhalb eines ε-Intervalls um einen Wert p liegt, mit zunehmender Versuchsanzahl gegen Null geht (empirisches Gesetz der großen Zahlen).

[15]Rolfes, Tobias & Fahse, Christian: Zufallsphänomene erfassen, in: mathematik lehren 213 (April, 2019), S. 4

Jetzt kommt die Eine-Million-Euro-Frage: Wenn man weiß, dass es falsch ist, warum macht man es dann? Warum werden in der Schule falsche Definitionen gelehrt?

Die Wahrscheinlichkeitstheorie - so heißt die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der richtigen Mathematik - beginnt immer mit einer blitzsauberen Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Wert einer normierten, messbaren Funktion). Heruntergebrochen auf die Mathematik der Mittelstufe bedeutet das: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist der Anteil des Ereignisses an der Ergebnismenge. Anteile sind Brüche und die sind in der Mittelstufe gut beherrschbar. Also nochmal die Frage: Warum definiert man in der Schule nicht die Wahrscheinlichkeit auf die gleiche Weise, wie sie in der Universitätsmathematik völlig unproblematisch definiert wird?

Nebenbei bemerkt gibt der letzte Satz des Zitats ganz gut den Inhalt des schwachen Gesetzes der großen Zahlen wider. Warum dieses dann als das empirische Gesetz der großen Zahlen bezeichnet wird, entzieht sich meiner Kenntnis.

10.2.1 Einfach mal was runden

Im Arbeitsheft von Lambacher Schweizer für die Einführungsphase[16] steht eine Tabelle, wovon ein Teil so aussieht:

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
rel. Häufigkeit	0,148	0,149	0,151	0,199	0,152	0,201

Die relativen Häufigkeiten sind angeblich durch 5000-maliges Würfeln mit einem gezinkten Würfel entstanden. Nun sollen mal wieder aus den relativen Häufigkeiten ohne Anwendung statistischer Methoden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Dieser Fehler ist oben schon mehrfach behandelt worden.

Laut Aufgabenstellung sollen die Wahrscheinlichkeiten aus den relativen Häufigkeiten „sinnvoll" geschätzt werden. Was die Autoren darunter verstehen, schreiben sie in der Musterlösung: Die Wahrscheinlichkeiten der Würfelseiten mit den Augenzahlen 1, 2, 3 und 5 sollen jeweils auf 15% und die Wahrscheinlichkeiten der Würfelseiten mit den Augenzahlen 4 und 6 sollen jeweils auf 20% geschätzt werden.

Wie kommt man auf so etwas? Weil Wahrscheinlichkeiten von Würfelseiten gerne „glatte" Werte annehmen? Wenn wir nichts über den Aufbau des gezinkten Würfels wissen, warum sollten wir dann annehmen, die Seiten mit den Augenzahlen 1, 2, 3 und 5 hätten die gleichen Wahrscheinlichkeiten? Warum sollten die Wahrscheinlichkeiten dieser Seiten jeweils gleich des arithmetischen Mittels der vier relativen Häufigkeiten sein? Wie soll man denn „sinnvoll" schätzen, wenn die Summe der arithmetischen Mittel nicht so glatt 1 ergibt?

Bei den Fehlern, die hier aufgelistet werden, geht es nicht um Fehler, die sich immer mal einschleichen, wenn man Texte produziert wie z. B. Druckfehler, Grammatikfehler, Bedeutungsfehler. Manchmal haben Leser auch Interpretationen von Auf-

[16]Janssen/ Jungmann (Hrsg.), Lambacher Schweizer Mathematik Einführungsphase Nordrhein-Westfalen, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1. Aufl., 2018, S. 53

gabentexten, an die man einfach nicht gedacht hat. Das kann alles passieren! Aber wie kann es sein, dass eine Aufgabe gestellt wird, die überhaupt keinen Sinn ergibt?

Auf der gleichen Seite finden wir zwei weitere Fehler, die diesen Gedankengang illustrieren. Zitat:

> Die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$, dass B unter der Bedingung A eintritt, heißt bedingte Wahrscheinlichkeit. Es gilt:
>
> $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; .$$

Nun, die Gleichung ist falsch. Im Nenner muss $P(A)$ stehen. So ein Fehler ist zwar super peinlich, aber so etwas kann passieren, selbst wenn 10 Leute den Text korrekturgelesen haben. Was aber nicht passieren darf, sind die beiden Wörter „Es gilt:“ unmittelbar vor der Gleichung. Diese bedeuten, dass die Gleichung eine Folgerung ist. Das ist sie aber nicht, denn sie ist die *Definition* der bedingten Wahrscheinlichkeit. Auch im Lehrbuch[17], zu dem das Arbeitsheft eine Ergänzung ist, bemüht man sich, diese Gleichung als Folgerung erscheinen zu lassen. Man darf aber in einem Mathematik-Lehrbuch Folgerung und Definition nicht durcheinanderwerfen! Auch wenn man von sich überzeugt ist, völlig unwiderstehliche didaktische Ideen zu haben: Die Mathematik wird deshalb wohl nicht umgeschrieben werden.

10.2.2 Vektoren

In der Mathematik werden alle Fachbegriffe definiert. Das ist einer der Gründe, warum die Mathematik so klar und verständlich ist. Deshalb wird man wohl erwarten, dass in Schulbüchern Fachbegriffe nicht nur einfach definiert, sondern auch besonders umfassend, vielschichtig und anschaulich erklärt werden, um den Schülern ein präzises Verständnis zu ermöglichen.

Nicht so im Lambacher Schweizer für die Einführungsphase[18]. Da kommt das „Schlüsselkonzept: Vektoren“ (Klingt die vormals übliche Bezeichnung „Vektorrechnung“ eigentlich zu profan?) gänzlich ohne die Definition des Vektors aus. Wir finden eine Zeichnung, die Fig. 1 heißt und in etwa so aussieht:

[17] Giersemehl et al., Lambacher Schweizer Mathematik Einführungsphase Nordrhein-Westfalen, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1. Aufl., 2019, S. 154 f.

[18] Giersemehl et al., S. 116

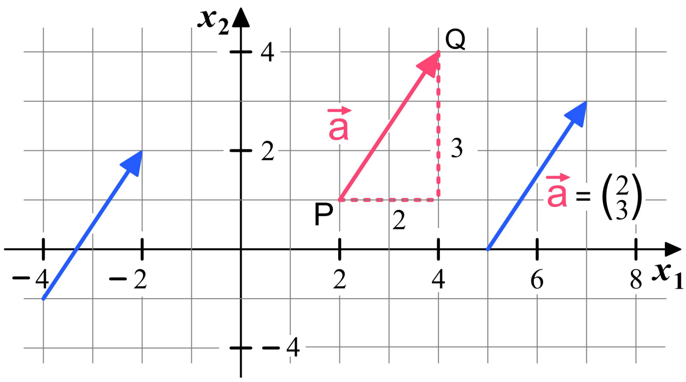


Abb. 10.4 Fig.1

Dazu gibt es folgenden Text:

> Die in Fig. 1 eingezeichneten Pfeile gehören alle zu der gleichen Verschiebung. Man erreicht von einem beliebigen Ausgangspunkt den zugehörigen Zielpunkt jeweils, indem man zwei Einheiten in Richtung der x_1-Achse und anschließend drei Einheiten in Richtung der x_2-Achse geht.

Soweit so verständlich. Danach lesen wir:

> Verschiebungen können durch **Vektoren** beschrieben werden. Die in Fig. 1 dargestellte Verschiebung wird durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ angegeben. Die in Fig. 1 dargestellten Pfeile gehören alle zu dem gleichen Vektor, weil sie alle die gleiche Verschiebung beschreiben.

Wir erfahren in Satz 1 also nicht, was Vektoren sind, sondern, dass Verschiebungen durch Vektoren beschrieben werden können. Unter „Verschiebung beschreiben“ stelle ich mir einen Vorgang mit folgendem Effekt vor: Wenn ich einen bestimmten Vektor kennen würde, würde ich auch eine bestimmte Verschiebung kennen. Laut Satz 2 kann eine Verschiebung durch einen Vektor nicht nur beschrieben, sondern auch angegeben werden. Gut! Wenn ich nun noch wüsste, was ein Vektor ist, könnte ich mir die Sachlage sicher besser vorstellen. Nach Satz 3 sind Vektoren offenbar Objekte, zu denen Pfeile gehören und zwar alle Pfeile, die die gleiche Verschiebung beschreiben. Was ich verstanden habe: Die gleiche Verschiebung kann durch viele Pfeile beschrieben werden und sie kann durch Vektoren nicht nur beschrieben, sondern durch einen bestimmten Vektor auch angegeben werden. Aber was ist nun ein Vektor?

Fatal für Schüler ist hier, dass der Eindruck erweckt wird, es werde definiert, was ein Vektor ist, obwohl das, was da steht, *keine* Definition eines Vektors ist, weil eben dort gar nicht steht, was ein Vektor ist. Schüler sind normalerweise fachlich nicht in der Lage, klar zu erkennen, dass hier eine Definition nur vorgegaukelt wird. Statt dessen werden sie wohl schnell zu dem (falschen) Schluss kommen, für die Mathematik zu dumm zu sein.

Es geht im Buch weiter mit eher technischen Ausführungen und danach finden wir den Satz:

> In der Geometrie kann ein Vektor zeichnerisch durch eine Menge zueinander paralleler, gleich langer und gleich orientierter Pfeile beschrieben werden.

Nun erfahren wir also, dass ein Vektor durch Pfeile mit bestimmten Eigenschaften beschrieben werden kann. Das geht aber offenbar nur zeichnerisch, woraus sich die Frage ergibt, wie denn sonst Vektoren beschrieben werden. Außerdem geht das - so erfahren wir - in der Geometrie. Und wie ist das dann außerhalb der Geometrie?

Zusammenfassend lässt sich sagen:

- Verschiebungen können durch Vektoren beschrieben werden.
- Vektoren können Verschiebungen angeben.
- Wenn Pfeile die gleiche Verschiebung beschreiben, gehören sie zum gleichen (nicht zu demselben?) Vektor.
- Ein Vektor kann zeichnerisch (oder auch unzeichnerisch?) durch bestimmte Pfeile beschrieben werden - aber (vermutlich) nur in der Geometrie (und sonst?).

Und was ist nun ein Vektor?

10.2.3 Analysis: Die Ableitung

Es wird teilweise der Lehrplan so gekürzt, dass die zentralen Ideen gar nicht mehr da sind. Z.B. wird nicht mehr unterrichtet, was ein Grenzwert ist. Das ist aber das zentrale Element der Analysis. Oder anders gesagt: Wenn man sagt, man mache Analysis, der zentrale Begriff der Analysis aber fehlt, dann ist es keine Analysis.

Im Lambacher Schweizer von 1977[19] finden wir folgende Ausführungen, die hier nur in Stichworten genannt werden:

- Definition: Eine Folge heißt Nullfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq n_0$ gilt: $|f(n)| < \varepsilon$.
- Definition: Die Folge $(f(n))$ hat den Grenzwert g, wenn die Folge $(f(n) - g)$ eine Nullfolge ist. $(f(n))$ nennt man dann eine konvergente Zahlenfolge. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = g$.
- Satz: Die Folge $f : n \mapsto f(n)$; $n \in \mathbb{N}$ hat genau dann den Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß für alle $n \geqq n_0$ gilt: $|f(n) - g| < \varepsilon$.

[19] Schweizer, Wilhelm, Analysis 1, Mathematisches Unterrichtswerk Lambacher-Schweizer, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1977

- Das Vollständigkeitsannahme (VA): Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent und hat als Grenzwert eine reelle Zahl.
- Definition: Eine Funktion $f : x \mapsto f(x);\ x \in A$ mit einer rechtsseitig unbeschränkten Definitionsmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt konvergent mit Grenzwert g für x gegen ∞, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 > 0$ gibt, so daß für alle $x \in A$ mit $x < x_0$ gilt:
  $|f(x) - g| < \varepsilon$. Man schreibt: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.
- Definition: Eine reelle Zahl x_0 heißt Häufungsstelle einer Zahlenmenge $M \subset \mathbb{R}$, wenn in jeder ε-Umgebung von x_0 mindestens ein von x_0 verschiedenes Element von M liegt.
- Folgendefinition des Grenzwertes: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion $f : x \mapsto f(x);\ x \in A$ an der Häufungsstelle x_0 von A, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$. Man schreibt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.
- Cauchy-Definition des Grenzwertes: g heißt Grenzwert der Funktion $f : x \mapsto f(x);\ x \in A$ an der Häufungsstelle x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in A$ mit $x \neq x_0$ gilt: Wenn $\left|x - x_0\right| < \delta$, dann $|f(x) - g| < \varepsilon$.
- Stetigkeit nach Cauchy: Die Funktion $f : x \mapsto f(x);\ x \in A$ heißt an der Stelle $x_0 \in A$ stetig, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in A$ gilt:
  $\left|x - x_0\right| < \delta$, dann $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Das sind nur einige wenige Definitionen und Sätze, die man braucht, um auf Seite 122 das Herzstück der Analysis, nämlich die Ableitung, definieren zu können:

- Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heiß in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Es ist $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Im Lambacher-Schweizer von 2019[20] geht das „schneller": Es werden ein paar Geschwindigkeiten gemessen und die Ergebnisse in einer Tabelle festgehalten:

h	$s(1+h) - s(1)$	$\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$	h	$s(1+h) - s(1)$	$\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$
-1	0,3	0,3	1	0,9	0,9
-0,5	-0,225	0,45	0,5	0,375	0,75
-0,1	-0,057	0,57	0,1	0,063	0,63
-0,05	-0,02925	0,585	0,05	0,03075	0,615
-0,01	-0,00597	0,597	0,01	0,00603	0,603
...	...	...	...	...	...

[20]Giersemehl et al., Lambacher Schweizer Mathematik Einführungsphase Nordrhein-Westfalen, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1. Aufl., 2019, S. 55 f.

Unter der Tabelle finden wir dann die folgenden beiden Sätze:

> Die Entwicklung der jeweils letzten Spalte lässt sich entnehmen, dass sich die Differenzen sowohl für positives als auch für negatives h dem festen Wert 0,6 nähert. Dieser Wert wird **Grenzwert** genannt.

Und der Grenzwert ist halt die Ableitung.

Das war's.

Dass das nichts mit Mathematik und schon gar nichts mit höherer Mathematik - nämlich der Analysis - zu tun hat, braucht hier wohl nicht weiter dargestellt zu werden. Ich hoffe, Leibniz und Newton bekommen diesen Lambacher-Schweizer niemals in die Hände.

10.2.4 Weitere Beispiele

Ohne Literaturnachweise und nur stichwortartig seien noch folgende Beispiele falscher Mathematik aufgelistet:

Bedingte Wahrscheinlichkeit Die bedingte Wahrscheinlichkeit wird oft als etwas dargestellt, was eines zweistufigen Zufallsversuchs bedarf: Kann z. B. im ersten Versuch das Ereignis A eintreten und kann im zweiten Versuch das Ereignis B eintreten, so wird behauptet, die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(B|A)$ gebe an, wie wahrscheinlich es sei, dass B unter der Bedingung eintrete, dass A schon eingetreten sei.

Die Behauptung, dies sei die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, ist falsch, denn der hier angesprochene Zusammenhang kann höchsten als Spezialfall durchgehen, da der eigentliche Sinn der bedingten Wahrscheinlichkeit- nämlich die Bezüge von Teilmengen der Grundgesamtheit untereinander - gar nicht zum Ausdruck kommt. Das kann man auch daran sehen, dass mit dieser Auffassung z. B. die folgende Aufgabe[21] prinzipiell nicht lösbar ist[22]: In einer Urne befinden sich zwei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es wird zweimal zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel schwarz ist unter der Bedingung, dass die zweite Kugel weiß ist?

Unabhängige Zufallsversuche In der Mittelstufe wird die stochastische Unabhängigkeit besprochen. Dabei geht es um die Unabhängigkeit zweier Ereignisse ein und desselben Versuchs, auch wenn die in diesem Zusammenhang besprochenen Versuche oftmals zweistufig sind.

In der Oberstufe geht es dann um Bernoulli-Ketten, also um mehrere Bernoulli-Versuche, die hintereinander ausgeführt werden. Und da heißt es plötzlich: Wie man

[21] Borovcnik, Manfred, Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1982, S. 290

[22] Der Aufgabentext im Original ist etwas anders

ja schon in der Mittelstufe mit der stochastischen Unabhängigkeit gesehen habe, seien die einzelnen Bernoulli-Versuche voneinander unabhängig - obwohl in der Mittelstufe nie von unabhängigen Versuchen die Rede war, sondern stets von unabhängigen Ereignissen desselben Versuchs.

Und es kommt noch dicker: Haben wir zwei Zufallsversuche $\mathbf{Z}_1$ und $\mathbf{Z}_2$, kann bei dem ersten Versuch das Ereignis $\mathbf{E}_1$ und beim zweiten Versuch das Ereignis $\mathbf{E}_2$ eintreten. Nun können wir nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2$ fragen, also nach der Wahrscheinlichkeit, dass erst $\mathbf{E}_1$ und dann $\mathbf{E}_2$ eintritt. In Schulbüchern wird nun argumentiert, *weil* die Versuche unabhängig seien, könne man die Wahrscheinlichkeiten von $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ multiplizieren, um die Wahrscheinlichkeit von $\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2$ zu erhalten. Das ist aber grundfalsch, denn die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten gehört zur *Definition* der Unabhängigkeit von Zufallsversuchen. Also: Zwei Zufallsversuche $\mathbf{Z}_1$ und $\mathbf{Z}_2$ sind unabhängig, wenn man (etwas vereinfacht dargestellt) die Wahrscheinlichkeit von $\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2$ bestimmt, indem man die Wahrscheinlichkeiten von $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ multipliziert.

Das ist also wieder ein Fall von Falsch-Herum-Mathematik.

$\mathbf{a^0 = 1}$ Wenn man Potenzen wie 3^4 definiert als abkürzende Schreibweise für $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, dann bekommt man ein Problem mit dem Ausdruck 3^0. In Schulbüchern und im Internet wird nun immer wieder versucht, Gleichungen wie $3^0 = 1$ oder allgemein auch $a^0 = 1$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aus Potenzgesetzen herzuleiten. Der intuitive Gedankengang soll dabei sein: Weil wir schon wissen, dass ein bestimmtes Potenzgesetz richtig ist, ergibt sich als Folgerung (oder Spezialfall) $a^0 = 1$. Richtig ist aber, dass in der Mathematik *definiert* wird, was $a^0 = 1$ bedeuten soll. Gäbe es gute Gründe für z. B. $a^0 = 0$, würde man die Potenzgesetze so abändern, dass sie zu $a^0 = 0$ passen würden. Was wir also in Schulbüchern und dem Internet vorfinden, ist eine Verwechslung von Definition und Folgerung.[23]

In den meisten Schulbüchern wird behauptet, der Ausdruck 0^0 sei nicht definiert, obwohl in einigen Bereichen der Mathematik ganz klar $0^0 = 1$ definiert ist.[24] Tiefsinnige Überlegungen dazu findet man auch bei F. Schweiger[25] zusammen mit einer klaren Ansage aus dem Bundesgesetzblatt(!) für die Republik Österreich:

> Dem Schüler ist stets die Beweisbedürftigkeit mathematischer Aussagen klarzumachen, sein kritisches Verständnis für mathematische Beweise ist zu schulen; die klare Unterscheidung der Begriffe Axiom, Satz, Definition ist zu fordern.

Es geht aber auch viel profaner: Die Definition $0^0 = 1$ braucht man schon für den Binomischen Lehrsatz, wenn dieser für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten soll. Er lautet:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

[23] Einer der vernünftigen Gründe, warum $a^0 = 1$ festgelegt wurde, findet sich im Abschnitt „Warum ist $2^0 = 1$?

[24] https://www.spektrum.de/kolumne/wie-viel-ist-null-hoch-null/1793090

[25] https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1982%20Band%209/Schweiger1982.pdf

Definition: Term Was man in Schulbüchern lesen kann: „Ein Term ist eine sinnvolle Zusammenfassung von Symbolen ...“, oder: „Ein Term ist ein sinnvoller Ausdruck ...“. Da aber niemand weiß, was in diesem Zusammenhang *sinnvoll* bedeuten soll und dieser Begriff in diesen Büchern auch vorher nicht als terminus technicus definiert wird, liegt keinerlei Definition vor.

Negative Zahlen Bei der Einführung negativer Zahlen und des Rechnens mit negativen Zahlen wird eine Reihe von Rechnungen präsentiert, die der Schüler dann folgerichtig ergänzen soll. Das wird dann als Begründung verkauft, obwohl es keine ist. Ebenso verhält es sich mit der Frage, warum Minus mal Minus gleich Plus ist. Da wird oft ein Pseudogesetz vorgeschoben, und dann heißt es schnell: Und *weil* das so ist, ist Minus mal Minus Plus. Die Multiplikation negativer Zahlen muss aber definiert und kann nicht hergeleitet werden, obwohl es einen Haufen guter Gründe dafür gibt, diese Multiplikation so zu definieren, wie es gegenwärtig gemacht wird.

10.2.5 Was man tun kann

★ Wenn man weiß, dass in Schulbüchern keine/ wenige Erklärungen stehen, braucht man auch nicht danach zu suchen. Damit kann man viel Zeit sparen.

★ Wenn man weiß, dass Schulbücher so geschrieben sind, dass Schüler Mathematik *nicht* verstehen, braucht man sich nicht dumm vorzukommen, wenn man nichts versteht.

★ Wenn etwas in Schulbüchern erklärt wird, geht es fast immer darum, wie man etwas rechnet und nicht darum, warum man etwas so rechnet oder warum ein mathematischer Lehrsatz richtig ist oder warum etwas sinnvoll ist. Es gibt aber all diese Erklärungen. Man müsste sie dann nur woanders suchen.

★ Hat man den Eindruck, dass das, was im Schulbuch steht, falsch ist, braucht man sich nicht lange das Gehirn darüber zu zermatern, sondern kann aufschreiben, warum genau man meint, etwas sei falsch. Man kann mehrere Lösungsmöglichkeiten ausprobieren und wenn man dann nicht weiter kommt, es auch wirklich dabei belassen und weitere Informationen beschaffen - z. B. jemanden fragen, der sich damit auskennt.

Kapitel 11

Wozu braucht man Mathe?

Das ist eine sehr wichtige Frage! Wenn man schon Mathe lernen muss, sollte man auch wissen, wozu man die Mathematik braucht. Allerdings sind mit dieser Frage auch Probleme verbunden.

1) Wenn Schüler mir diese Frage stellen, wollen sie meist (99,99%) keine sachliche Antwort haben, sondern sie wollen mir erzählen, besser als ich zu wissen, dass man Mathe nicht braucht. Dieses Thema wird im Abschnitt „Mathe braucht man nicht“ behandelt.

2) Wie wir schon gesehen haben, bekommt man in der Schule gute Noten, wenn man Aufgabenschemata gut auswendig lernen kann - was „später im Leben“ tatsächlich niemand braucht.

Das einzig vernünftige, was man mit dem Unterricht in Mathematik an Schulen machen kann, ist, soviel Verständnis wie möglich mitzunehmen. Mit diesem Verständnis kann man dann allerhand anfangen.

11.1 Wozu man Mathe braucht

Das Internet hält so einige Standardantworten auf die Frage „Wozu braucht man Mathe?“ bereit, die man in etwa so zusammenfassen kann:

1. Probleme lösen: Mathematik bietet Werkzeuge und Techniken zum systematischen Problemlösen an. Sie hilft uns, komplexe Probleme zu analysieren, zu strukturieren und Lösungen zu finden.

2. Logisches Denken: Mathematik fördert das logische Denken und die Entwicklung von analytischen Fähigkeiten. Sie lehrt uns, klare Schlussfolgerungen zu ziehen und präzise Argumente zu formulieren.

3. Alltagssituationen bewältigen: Mathematik ist überall um uns herum. Wir verwenden sie, um Zinsen zu verwalten, Rezepte anzupassen, Zeitpläne zu erstellen, Entfernungen zu berechnen und vieles mehr. Mathematische Kenntnisse sind in vielen alltäglichen Situationen nützlich.

4. Wissenschaft und Technologie: Mathematik ist eine wichtige Grundlage für Wissenschaft und Technologie. Sie bildet das Rückgrat vieler wissenschaftlicher Disziplinen wie Physik, Chemie, Ingenieurwesen und Informatik. Ohne Mathematik wären Fortschritte in diesen Bereichen kaum möglich. Dazu wird auch die Mathematik selbst permanent weiterentwickelt.

5. Berufliche Anwendungen: Mathematik ist in vielen Berufsfeldern unverzichtbar. Ingenieure, Architekten, Datenanalysten, Finanzexperten, Programmierer und viele andere Berufe verwenden Mathematik, um Probleme zu analysieren, Modelle zu erstellen und Lösungen zu entwickeln. Auch im Handwerk spielt Mathematik eine wichtige Rolle.

6. Kritisches Denken: Mathematische Konzepte und Beweistechniken erfordern präzises Denken und logische Argumentationen. Durch die Beschäftigung mit Mathematik entwickeln wir kritisches Denken und die Fähigkeit, komplexe Zusammenhänge zu begründen und fundierte Entscheidungen zu treffen.

7. Modellierung und Vorhersage: Mathematik ermöglicht es uns, die Welt um uns herum zu modellieren und Vorhersagen über zukünftige Ereignisse zu treffen. Von der Wettervorhersage über die Finanzmärkte bis hin zur Bevölkerungsprognose oder den Verlauf einer Pandemie nutzen wir mathematische Modelle, um Phänomene zu verstehen und Prognosen zu erstellen.

11.1.1 Die mathematische Weltsicht

Es gibt aber noch weitere Aspekte, die die Notwendigkeit von Mathematik zeigen. Dazu sei ein Vergleich erlaubt:

Man lernt im Fach Deutsch, die Welt aus einer sprachlichen Sicht zu sehen. Sprache ist die Grundlage unseres Weltverständnisses und sogar unseres Denkens. Außerdem ist sie Voraussetzung für alle Geisteswissenschaften. Im Fach Mathematik lernen wir, die Welt aus einer mathematischen Sicht zu sehen. Diese ist Voraussetzung für alle Natur- und Ingenieurwissenschaften und außerdem Grundlage aller logischen-abstrakten und algorithmischen Strukturen, wobei letztere die Grundlage der Informatik bilden.

Dazu gehören nicht nur geometrische und quantitative Strukturen, sondern z. B. auch Ordnungsstrukturen und Wahrscheinlichkeiten. Guter Mathematikunterricht erzeugt also die Möglichkeit, die Welt aus einer bestimmten Perspektive sehen zu können. Das Verständnis unserer modernen Welt ist ohne Mathematik nicht denkbar.

Auch, wenn wir beschließen, die Mathematik nur zu einem sehr geringen Teil in unser Leben zu lassen, so werden wir aber doch mit Menschen zu tun haben, die die Welt und das Leben aus der mathematischen Perspektive sehen (können). Wenn wir konstruktiv mit diesen Menschen kommunizieren möchten, ist es wichtig, deren Perspektive zu kennen. Vielleicht sind diese Menschen Arbeitskollegen oder Vorgesetzte, die Entscheidungen - vielleicht sogar über uns - treffen, die wir ohne eine mathematische Sichtweise nicht verstehen und so diese Entscheidungen auch nicht diskutieren können.

11.1.2 Dunning-Kruger-Effekt

Das Weltverständnis eines Menschen reicht nur so weit, wie es seine sprachlichen und mathematischen Grenzen zulassen. Oder, um es sehr klar zu sagen: Menschen, die über ein gewisses sprachliches und mathematisches Niveau nicht hinausgekommen sind, wissen nicht, dass es über ihr Niveau hinaus noch vieles auf dieser Welt gibt, was verstanden werden kann. Bei diesen Menschen kommt dann der Dunning-Kruger-Effekt zum tragen (der zwar nicht wissenschaftlich korrekt in der ganzen Allgemeinheit nachgewiesen werden kann, der aber trotzdem auf einen wichtigen Zusammenhang hinweist): Menschen mit geringer Kompetenz neigen dazu, ihre Fähigkeiten zu überschätzen, während Menschen mit hoher Kompetenz dazu neigen, ihre Fähigkeiten zu unterschätzen. Inkompetente Personen haben Schwierigkeiten, ihr Wissen und Können einzuschätzen, was meistens dazu führt, dass sie sich selbst für sehr kompetent halten. Zusätzlich meinen sie, andere Menschen könnten nicht kompetenter sein als sie. Im Volksmund kennt man diese Menschen als Leute, die nicht über ihren Tellerrand hinaus schauen können. Sie meinen, nicht nur alles zu wissen, sondern auch alles besser zu wissen. Der Umgang mit solchen Menschen kann mitunter sehr schwierig sein.

Ist hingegen ein Mensch in einem Fachgebiet ein Experte, weiß er, was er alles nicht weiß und zieht ein eher bescheideneres Auftreten vor. In der Schule geht es darum, jungen Menschen eine solide Bildung zu vermitteln, damit sie den entscheidenden Wendepunkt erreichen. Sie sollen so viel wissen, dass sie erkennen, wie begrenzt ihr Wissen ist und gleichzeitig verstehen, welche umfangreichen Lernmöglichkeiten ihnen noch offenstehen.

Ich erlebe den Dunning-Kruger-Effekt in meinem Unterricht jedes Jahr in den Sommerferien, wenn die Schüler wegen ihrer Nachprüfungen, die am Ende der Ferien stattfinden, zu mir kommen. Es sind immer wieder Schüler dabei, die den Ernst der Lage nicht erkennen und meinen, ihre Versetzung in die folgende Jahrgangsstufe sei nicht gefährdet - obwohl sie die gegenteilige Information schriftlich vorliegen haben. Es kommt dann teilweise zu grotesken Argumentationen wie: Wenn man jung ist, hat man die Pflicht, sich in den Sommerferien zu amüsieren und dürfe gar nicht Mathe lernen.

Die gute Nachricht ist: Wenn man am Anfang der Sommerferien vor den Büchern sitzt und verzweifelt, weil der Lehrstoff so umfangreich ist, ist man schon den entscheidenden Schritt weiter als die Leute, die gerade im Urlaub sind. Bisher haben alle meine Schüler, die aus der Verzweiflung die Konsequenz zogen, in den Sommerferien vernünftig Mathe zu lernen, die Nachprüfung geschafft.

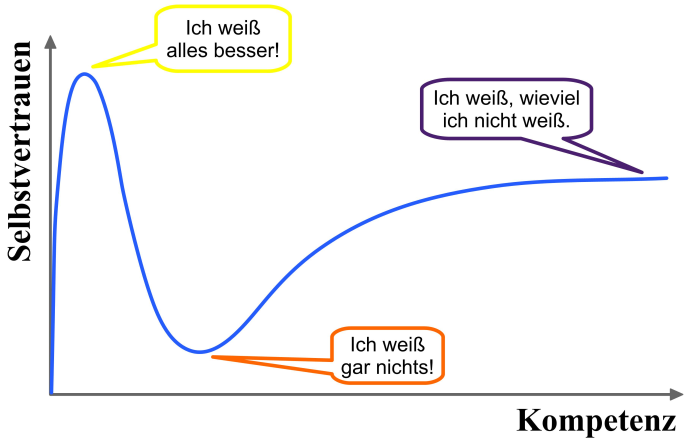


Abb. 11.1 Dunning-Kruger-Effekt

Es ist von großer Bedeutung, sich im Matheunterricht nicht mit anderen zu vergleichen, sondern den Fokus auf die eigene Entwicklung zu legen. Es kann hilfreich sein, die eigenen Aufzeichnungen des Lernprozesses anzuschauen und zu reflektieren, was man vor einer Woche, einem Monat oder sogar einem Jahr gelernt hat. Dabei wird man überrascht sein, wie viel man damals noch nicht wusste im Vergleich zu dem, was einem jetzt selbstverständlich erscheint. Besonders beeindruckend wird es, wenn man erkennt, wie begrenzt das Wissen und Verständnis von vor einem Jahr aus heutiger Perspektive erscheint. Diese Erkenntnis führt dazu, zu realisieren, dass das eigene derzeitige Verständnis aus der Sicht anderer Personen, wie zum Beispiel des Mathematiklehrers oder eines Mathematikers, als sehr bescheiden angesehen werden könnte. Schließlich haben diese Menschen nicht nur ein Jahr, sondern viele Jahre Wissen und Erfahrung aufgebaut und damit einen entsprechend großen Lernvorsprung.

11.1.3 Klare Sprache

Entsprechend der Winterschen Grunderfahrungen (siehe dazu im Kapitel „Mathematikunterricht ohne Mathematik“) soll Mathematik in der Schule auch als eigenständiges geistiges Gebäude vermittelt werden. Dieses Gebäude besteht aus Definitionen, Lehrsätzen und Beweisen, welche so präzise wie nur irgend möglich formuliert sind. Es ist kein Wort zu viel, kein Wort zu wenig. Die sprachbildende Komponente des Mathematikunterrichts ist durchaus gewollt. Von einer solchen Sprache könnten viele Bereiche unseres gesellschaftlichen Zusammenlebens profitieren: Stellen Sie sich nur mal vor, in allen beruflichen Meetings dieser Welt würde klar und präzise gesprochen werden. Dadurch könnten sicher pro Jahr Milliarden von Arbeitsstunden eingespart werden.

Von einer exakten Sprache und einer klaren Beweisführung könnten auch gesellschaftliche Debatten profitieren, seien es Klimawandel, Geschlechterrollen, Schule der Zukunft, Elektroautos, etc. Wer weiß, wie scharf argumentiert werden muss, um

Evidenz zu schaffen, ist schlecht manipulierbar und fällt weniger auf Demagogie herein.

11.1.4 Wikipedia

Spätestens seit der Existenz von Wikipedia gibt es die Behauptung, man brauche nun keine Schule mehr, weil man ja alles Wissen nachlesen könne. Das mag für die Informationsbeschaffung auf dem Niveau der Allgemeinbildung richtig sein. Was aber im Mathematikunterricht gelehrt werden soll, ist die Fähigkeit, von einer Argumentation zu erkennen, ob sie stichhaltig ist oder ob es sich um Ideologie handelt. Dazu ist viel Übung im Erklären und Beweisen notwendig. Eine solche Fähigkeit kann man sich nicht mal eben anlesen.

11.1.5 Individuelle Logik

Sobald mathematische Lehrsätze wie z. B. die Kehrwertregel, umfassend erklärt werden, wird man die Unterschiedlichkeit der einzelnen Erklärungsmöglichkeiten bemerken. Sind Schüler an diesem Punkt angekommen, könnte die Institution Schule zeigen, was sie jungen Menschen zu geben hat. Wenn Schüler jetzt - angeleitet durch den Lehrer - miteinander ins Gespräch kommen und feststellen, dass das, was sie selbst für logisch halten, andere überhaupt nicht für logisch halten, dann hat man wirklich etwas für das Leben gelernt. Es gibt „Laberfächer“, in deren Zusammenhang es niemanden wundern würde, wenn es zum selben Sachverhalt mehrere Meinungen gibt. Aber dass das in der Mathematik auch so ist und so sein muss und gar nicht anders geht, dürfte für die meisten jungen Menschen neu sein. Das, was für mich logisch ist, ist wirklich meine eigene Sicht der Mathematik. Diese Sicht für mich aufzubauen und gleichzeitig die Sichtweise anderer in ihrer Unterschiedlichkeit wahrnehmen und akzeptieren zu lernen, dazu macht man Mathematik in der Schule.

11.1.6 Leben oder Tod

Ein von Schülern häufig vorgebrachtes Argument gegen das Lernen von Mathematik in der Schule ist: Ich muss selbst nichts berechnen, weil das ja Experten tun, denen ich vertrauen kann. Das Problem dabei ist aber: Zu (fast) jedem Thema gibt es unterschiedliche Expertenmeinungen. Welchem Experten sollte man also vertrauen?

Millionen Menschen haben das während der Corona-Krise erlebt: Eltern müssen entscheiden, ob ihr Kind geimpft wird oder nicht. Die einen Experten sagen, das Kind werde sterben, wenn es nicht geimpft wird. Die anderen Experten sagen, das Kind werde sterben, wenn es geimpft wird.

Eltern müssen sich also ihre eigene Meinung bilden, um für ihr Kind eine verantwortungsvolle Entscheidung treffen zu können. Hat man ordentlichen Statistik-Unterricht in der Schule gehabt, ist man in der Lage, sich die entsprechenden wissenschaftlichen Studien durchzulesen und auch zu verstehen. Und selbst wenn man sich nicht reihenweise Studien durchliest, so ist man doch in der Lage, wissenschaftliche

Fakten und Argumentationen von politisch oder ideologisch motivierten Argumentationen zu unterscheiden. Hat man keinen guten Mathe-Unterricht gehabt, ist man dazu nicht in der Lage und muss einfach irgendwelchen Leuten glauben. Wenn es um das Leben des eigenen Kindes geht, ist das für Eltern bestimmt kein so gutes Gefühl.

Anmerkung: Wenn ich dieses sehr krasse Beispiel Schülern erkläre, sind sie normalerweise danach immer noch überzeugt davon, niemals im Leben Mathe zu brauchen. Meiner Meinung nach liegt das daran, dass selbst volljährigen Schülern das Gefühl, Verantwortung zu haben, (oftmals) völlig fremd ist. Sie mussten nie auf ihre kleinen Geschwister aufpassen, eine Hund erziehen, bei der Ernte mithelfen, ein Theaterstück inszenieren, für Geld arbeiten oder mussten auch nie ihren Freunden in einer dramatischen Situation helfen. Wenn dieser Teil der menschlichen Bildung fehlt, wird es für junge Menschen schwierig, Verantwortung für die eigene Zukunft zu übernehmen.

11.1.7 Pupsende Kühe

In den gesellschaftlichen Diskursen über aktuelle Themen der Zeit wie z. B. Ernährung und Klimawandel gibt es so einige Gemeinplätze wie z. B.:

Die Kühe pupsen Methan und Methan ist klimaschädlich und deshalb dürfen wir alle kein Fleisch mehr essen.

Hat man im Mathematikunterricht des eigene Verständnis von Zusammenhängen aufgebaut, wird man sofort merken, dass diese Aneinanderreihung von Behauptungen noch nicht einmal einen kausalen Zusammenhang aufweist.

Das ist aber nicht alles, wofür wir Mathematik in diesem Zusammenhang brauchen können. Wenn wir uns real an der politischen Willensbildung unserer Demokratie beteiligen möchten, müssen wir auch mit Argumentationen umgehen, die sich auf die obige Phrase beziehen - sei es nun eine Argumentation dafür oder dagegen. Es folgt nun in aller Ausführlichkeit ein solcher Gedankengang:

Einer der größten Produzenten von Rindfleisch ist Uruguay. Dort werden Rinder hauptsächlich auf Naturweiden gehalten.[1] Manche Hersteller legen sogar Wert darauf, dass ihre Rinder zu 100 % Gras fressen, sie immer auf Weiden gehalten werden und auch keine Antibiotika oder Wachstumshormone den Rindern zugeführt werden.[2] Die Beweidung findet dabei normalerweise auf Flächen statt, die für andere Formen der Landwirtschaft wertlos sind. Es wird durch die Viehhaltung also nicht der Anbau von Getreide oder Mais verhindert. Wird das Gras von den Rindern abgefressen, wird es zum Wachstum angeregt und speichert dadurch CO_2, sogar mehr als pro Flächeneinheit ein Wald speichern kann.[3] In Thüringen werden Karpatische Wasserbüffel dazu eingesetzt, Feuchtmoore wieder aufzubauen.[4] Das ist gut für den

[1] https://www.agrarheute.com/tier/rind/uruguay-mehr-rinder-menschen-570404#:~:text=Rindfleisch%20aus %20Uruguay%20genie%C3%9Ft%20weltweit,jedwede %20andere%20Leistungsf%C3%B6rderer%20sind%20verboten.

[2] https://www.block-fleischerei.de/global-regional/uruguay

[3] https://www1.wdr.de/mediathek/video-weideland-als-co-speicher-100.html

[4] https://www.daserste.de/information/wissen-kultur/w-wie-wissen/Wasserbueffel-und-Hochlandrinder-fuer-Klima-und-Naturschutz-100.html

Naturschutz, der Bindung von CO_2 und den Artenschutz. Allerdings produzieren nicht nur die Büffel als Wiederkäuer Methan, sondern auch Feuchtmoore sind Methanemittenten. Bisher bildeten übrigens die Feuchtgebiete der Erde die mit Abstand größte Quelle von Methan.[5] Das könnte sich aber mit den Daten des europäischen Erdbeobachtungssatelliten Sentinal-5P[6] oder mit dem Instrument *Earth Surface Mineral Dust Source Investigation (EMIT)* an der Internationalen Raumstation ISS[7] relativieren. Nun ist bei den Ultra-Emittenten Turkmenistan ganz vorne mit dabei, wo Methan in großem Stil als Abfallprodukt bei der Förderung fossiler Brennstoffe entsteht.[8]

Ist denn eine Kuh nun klimaschädlich? Rinder stoßen durch rülpsen (ca. 95 %) und pupsen (5 %) Methan aus.[9] Im Gegensatz zu Kohlendioxid verbleibt es aber nicht lange in der Atmosphäre. Laut Umweltbundesamt ist es schon nach 12,4 Jahren abgebaut, indem es zu Kohlendioxid zerfällt. [10] Durch die Nahrung nimmt die Kuh Kohlendioxid auf und der Kreislauf beginnt von vorn. Langfristig erhöht also eine Kuh nicht den Anteil der Treibhausgase in der Atmosphäre.[11] Alles andere wäre auch eine Überraschung, wenn man bedenkt, dass

1. alle Wiederkäuer Methan produzieren,[12]

2. sich diese Wiederkäuer seit 35 Millionen Jahren auf der Erde verbreiten und

3. der Kohlendioxidgehalt der Erdatmosphäre in dieser Zeit rapide abgenommen (!) hat.[13]

Deshalb wird vorgeschlagen, die in CO_2-Äquivalenten gemessenen kurzlebigen Klimaschadstoffe wie Methan von Rindern anders zu bewerten als das bei der Förderung fossiler Rohstoffe entstehende Methan.[14] Es ist schließlich ein Unterschied, ob das bei der Erdölförderung entstehende Methan[15], welches bis zu 500 Millionen Jahre in der Erde lagerte[16] der Erdatmosphäre hinzugefügt wird oder sich eine Kuh als Teil der Natur in einem ausgeglichenen CO_2-Kreislauf befindet.

[5] https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Methan

[6] https://www.derstandard.de/story/2000133106052/satellitendaten-enthuellen-die-groessten-methanlecks-der-welt

[7] https://futurezone.at/science/sensor-iss-raumstation-groesste-methan-emittenten-quellen-klimawandel-erderwaermung/402200928

[8] https://www.derstandard.at/story/2000146267274/hotspots-der-globalen-methanemissionen-liegen-in-turkmenistan

[9] https://www.wetter.de/cms/klimakrise-methan-steigt-2021-staerker-als-je-zuvor-warum-ist-die-konzentration-des-gases-so-hoch-4965475.html

[10] https://www.umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimaschutz-energiepolitik-in-deutschland/treibhausgas-emissionen/die-treibhausgase

[11] https://www.fokus-fleisch.de/methan-mythos-warum-rinder-keine-klimakiller-sind

[12] https://de.wikipedia.org/wiki/Methangärung

[13] https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Känozoikum

[14] https://www.nature.com/articles/s41612-018-0026-8

[15] https://www.sciencemediacenter.de/alle-angebote/research-in-context/details/news/mehr-methanemissionen-aus-der-erdoelfoerderung-als-gedacht/

[16] https://www.lienert-ehrler.ch/upload/Entstehung.pdf

Übrigens war der Methanausstoß von Wiederkäuern z. B. in den USA vor der Ankunft der Europäer kaum niedriger als der Methanausstoß von landwirtschaftlich gehaltenen Wiederkäuern heute.[17] Das liegt vor allem an den 50 Millionen Bisons, die damals durch die Prärien streiften. Selbst wenn man alle Rinder aus den USA entfernen würde, würden das Land höchstwahrscheinlich wieder die Bisons, Elche, Hirsche und Wildschafe übernehmen und genauso viel Methan emittieren wie zuvor die Rinder.[18] Falls das nicht der Fall sein sollte, würde es zu Buschbränden kommen, die dann noch mehr Methan freisetzen würden. [19]

Kommen wir zurück zum Rindersteak aus Uruguay! Argumentiert wird, wenn schon nicht das Rind und dessen Haltung das Problem sei, so sei aber doch der Import des Fleisches wegen des langen Transportwegs sehr klimaschädlich. Schauen wir uns dazu einmal eine Beispielrechnung an: Ein großes Container-Schiff verbraucht pro Standardcontainer 1,4 Liter Schiffs-Diesel auf 100 km.[20] Ein solcher Container kann mit 50 000 Rindersteaks à 200 Gramm befüllt werden. Das entspricht einem Gewicht von 10 Tonnen (plus Verpackungsgewicht), wobei für solche Container 28,23 Tonnen erlaubt sind.[21] Die tatsächliche Entfernung, die ein Schiff vom Hafen in Montevideo (Uruguay) bis nach Rotterdam zurücklegt, beträgt 7681 nautische Meilen [22] , entsprechend 14 225,21 km. Auf dieser Distanz werden pro Steak ca. 4 Milliliter (= 0,004 Liter) Treibstoff verbraucht. Zum Vergleich: Fahren wir mit einem Auto, das auf 100 km 5 Liter Benzin verbraucht zu einem 2 km entfernten Supermarkt hin und auch wieder zurück, verbrauchen wir 200 Milliliter (0,2 Liter) Benzin. Das ist also die 50-fache Menge, die für das Steak von Südamerika bis nach Europa aufgewendet wurde.

Sicherlich: Berücksichtigt wurde hier nur der Transport des Fleisches auf dem Seeweg. Durch die Verarbeitung im Erzeugerland und durch den Transport von Rotterdam in den Supermarkt entsteht aber ein zusätzlicher CO_2-Ausstoß. Doch das gilt auch für viele andere Lebensmittel: Der Weizen für unser Brot wird mit Zugmaschine (Traktor, Schlepper) und Sämaschine in den Boden gebracht, wird mit einem Mähdrescher geerntet und zum Bauern transportiert. Von dort geht es mit dem Lkw weiter zur Mühle, zur Großbäckerei, zum Zentrallager des Discounters und dann weiter in den Supermarkt.

Schauen wir uns noch eine weitere Rechnung dazu an: Wird in einem Auto ein Liter Benzin verbrannt, werden 2,37 Kilogramm (!) CO_2 ausgestoßen. Durch einen Liter Diesel entstehen sogar 2,65 Kilogramm CO_2. [23] Gehen wir also davon aus, das

[17] https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22178852/

[18] https://www.deutschlandfunkkultur.de/klimagas-nicht-nur-rinder-sind-methanschleudern-100.html

[19] https://gfmc.online/wp-content/uploads/Planet-at-Risk-Vol-3-No-1-2015-Fire-White-Paper.pdf

[20] https://www.blick.ch/auto/abgefahren/umwelt-mythos-im-fakten-check-die-luege-vom-dreckigen-schiff-id16750846.html

[21] https://freightfinders.com/de/container-transport/20-ft-iso-container/

[22] http://ports.com/sea-route/port-of-montevideo,uruguay/port-of-rotterdam,netherlands/#/?a=0&b=0&c=Port%20of%20Montevideo,%20Uruguay&d=Port%20of%20Rotterdam,%20Netherlands

[23] https://www.helmholtz.de/newsroom/artikel/wie-viel-co2-steckt-in-einem-liter-benzin/

Steak habe mit seinen verbrauchten 4 Millilitern Kraftstoff 0,01 Kilogramm CO_2 freigesetzt. Im Schnitt verursachen Deutsche 11,17 Tonnen CO_2-Äquivalente pro Jahr.[24] Das sind ungefähr 30 Kilogramm pro Tag. Damit trägt der Schiffstransport unseres Rindersteaks ein Dreitausendstel zu unserem täglichen CO_2-Ausstoß bei. Wollten wir diese „Umweltsünde“ wieder wett machen, könnten wir uns einmal mit kaltem statt mit warmem Wasser die Hände waschen.[25]

In den genannten Quellen befinden sich haufenweise Schaubilder und aufbereitetes Datenmaterial. Da ist es schon hilfreich, sich mit Statistiken auszukennen, um möglichst schnell einschätzen zu können, wie glaubwürdig welche Quelle sein könnte.

So viel Datenmaterial kommt schnell zusammen, wenn man mal ein bisschen hier und da googelt.

In der oben zitierten Studie, in der es um die unterschiedliche Bewertung von Emissionen geht[26] kommt folgender Satz vor:

> Best-fit lines (dotted) in Fig. 3 are computed by a linear regression between the logarithms of the quantities plotted, with RMS fractional prediction errors expressed as
>
> $$100 \times \left(exp \left(\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}} \right) - 1 \right) \%$$
>
> where χ^2 is the sum of the squared residuals of the logarithmic fit and n is the number of scenarios or regions.

Wenn man das verstehen möchte, sollte man wissen, was Logarithmen, lineare Regressionen und Residuen sind. Es ist sicher richtig, dass man nicht erst solche Studien lesen und verstehen muss, bevor man sich an einer Diskussion beteiligen darf. Man sollte aber auch bedenken, dass man möglicherweise mit Leuten diskutiert, die solche Studien verstanden haben. So ist man dann direkt im Nachteil, wenn man Mathe nicht kann. Wenn man diese Begriffe nicht kennt, weiß man auch nicht, wie wichtig dieser Satz ist. Vielleicht ist es der entscheidende Satz dieser Studie, vielleicht wird aber nur das übliche Standardverfahren erwähnt, welches mit der Hauptaussage der Studie nur am Rande zu tun hat.

Letztlich ist es eine Frage des Gefühls: Es ist ein Unterschied, ob man seine Unwissenheit in solchen Diskussionen immer kaschieren muss oder ob man mit breiter Brust sagen kann: „Ich weiß, was da steht und ich habe das auch verstanden!“

Wir müssen außerdem berücksichtigen, wie schnell solche Datenanalysen vonstatten gehen müssen. Will man sich eine Meinung zu solchen Gegebenheiten neben der beruflichen Tätigkeit, der Kindererziehung, der Zeit mit dem Ehepartner, den Kampf mit den Behörden und den Reparaturen am Haus bilden, muss man ziemlich schnell sein.

---

[24] https://www.gasag.de/magazin/nachhaltig/co2-ausstoss-mensch

[25] https://soapandprecede.com/wissen/nachhaltigkeit/co2-duschen-wasserverbrauch-berechnen/

[26] https://www.nature.com/articles/s41612-018-0026-8

Und wenn sie - liebe Leserin, lieber Leser - meinen, die Daten seien völlig falsch dargestellt, aus dem Zusammenhang gerissen und überhaupt seien die Quellen der Daten unglaubwürdig: Gut so! Jetzt sind wir im Geschäft! Wenn Sie die Daten überprüfen oder kritisieren wollen, sollten sie sich aber mit den mathematischen Grundlagen dieser Daten auskennen.

11.1.8 Ottomotorische Verbrennung

Auf der Suche nach Anwendungen von Mathematik fiel mir mal ein Vorlesungsskript in die Hände: Es ging darum, was zukünftige Ingenieure wissen müssen, um die Brennräume von Otto-Motoren weiterentwickeln zu können. Da kamen z. B. viele Differentialgleichungen vor. Und auch wenn ich nicht alles sofort auswendig gelernt habe, habe ich jetzt einen ganz guten Eindruck, was man da alles lernen kann. Und ich habe einen Eindruck, was z. B. Ingenieure eines Autoherstellers machen, wenn sie die Einspritzung des Benzins in den Brennraum optimieren wollen. Und wenn mir jetzt jemand erzählt, dass die Entwicklung eines neuen Motors ungefähr zwei Milliarden Euro kostet, dann kann ich mir vorstellen, warum. Denn es sitzen die Ingenieure nicht nur am Brennraum, sondern auch an der Kurbelwelle, an den Dichtungsringen, am Getriebe etc. Kennt man sich in der Mathematik gut aus, kann man sich ein solches Script mal eben durchlesen, um die Komplexität der Sache zu verstehen. Andernfalls bleibt einem derartige Literatur verschlossen.

11.1.9 Finanz-„Produkte“

Ich habe mir mal ein Buch über Finanzmathematik durchgelesen. Jetzt weiß ich nicht nur, wie man Kreditzinsen berechnet, sondern kann mir auch besser vorstellen, was in einer Bank alles so berechnet wird oder auch mit welchen Mitteln dort gearbeitet wird. Jetzt werden es Betrüger ziemlich schwer haben, mir toxische Finanzprodukte aufzuschwatzen. Ich würde mir z. B. überlegen: Wo würde in diesem Buch eine Rechnung zu dem stehen, was dieser Finanzheini mir gerade erzählen will? Was müsste man da alles berechnen? Und wenn man schon so fragt, fällt das ganze Kartenhaus zusammen. Jetzt muss ich nicht mehr in etwas investieren, was ich nicht verstehe.

Das ist zwar ein eher untypisches Beispiel für die Anwendung von Mathematik, aber da es solche Beispiele gibt, soll hier auch eines davon erwähnt werden. Als Mathematiker bin ich mit Mathebüchern vertraut und kann ein Mathebuch in meiner Freizeit lesen - so wie andere Leute Romane lesen.

11.1.10 Künstliche Intelligenz

Kaum ein Thema wird zur Zeit so heiß diskutiert wie die KI (künstliche Intelligenz). Kann ein KI-generierter Avatar Gefühle haben? Werden die Maschinen bald die Kontrolle der Welt übernehmen? Es gibt sogar Leute, die die Auslöschung der Menschheit aufgrund der KI auf uns zukommen sehen. Um einen kühlen Kopf zu behalten, ist es notwendig, zumindest in Grundzügen verstanden zu haben, wie eine KI funktioniert. Diese Grundzüge sind selbstverständlich mathematischer Natur.

11.2 „Mathe braucht man nicht“

Ich finde es immer wieder erstaunlich, wie mir Schüler mit dem Brustton der Überzeugung sagen: „Das, was wir hier in Mathe machen, brauchen wir später nicht mehr.“

Was soll ich darauf entgegnen? Vielleicht: „Mathematik wird sei über 100 Jahren weltweit in allen Schulen unterrichtet. Und bisher hat noch niemand - wirklich niemand - bemerkt, dass man das gar nicht braucht. Du bist wirklich der erste Mensch, dem das auffällt!“ Oder sollte ich persönlicher antworten: „Mensch, jetzt unterrichte ich schon seit über 30 Jahren und mir ist das noch nie aufgefallen. Aber jetzt, da du das sagst, fällt mir auch auf, dass man das gar nicht braucht!“ Oder vielleicht so: „In Deutschland kostet der Mathematikunterricht an Schulen ungefähr 2 Milliarden Euro pro Jahr. Und allen Lehrern, allen Bildungswissenschaftlern, allen Politikern und allen Steuerzahlern ist noch gar nicht aufgefallen, dass man das gar nicht braucht, was man im Mathe-Unterricht lernt. Du bist wirklich die allererste Person, die darauf gekommen ist. Vielleicht solltest du das den Leuten einmal sagen, dann wird denen das bestimmt auch auffallen!“

11.2.1 Agressive Scheindebatte

Wenn Schüler ein Schulfach nicht mögen, behaupten sie, man brauche es nicht. Das ist bekannt. Vielleicht ist das nur mein persönlicher Eindruck, aber in Mathematik scheint es besonders schlimm zu sein. Schillers „Lied von der Glocke“ braucht auch kaum jemand, um seinem Tagesgeschäft nachzugehen. Oder wie sieht es mit dem endoplasmatischen Reticulum aus? Braucht das jemand, um Brötchen zu kaufen? Wird in anderen Fächern dieses „Braucht man nicht!“ auch so ostentativ vorgetragen?

Solche Diskussionen werden fast immer von Schülern initiiert, die Probleme mit dem Verständnis der Mathematik haben. Jede Person, die erlebt, wie befriedigend es ist, mathematische Zusammenhänge zu verstehen, führt keine solche Scheindebatte. Ich habe auch noch nie jemanden getroffen, der etwas verstanden hat und dann sagte: Oh, so ein Mist, jetzt bin ich schlauer geworden. „Verstehen“ ist eine Grundkonstante des menschlichen Lebens und ist direkt mit dem Belohnungszentrum im Gehirn verknüpft.

Wenn Schüler mich fragen, wozu man Mathe braucht, wollen sie eigentlich nie eine Antwort hören. Statt dessen wollen sie in aggressiver Weise durchsetzen, besser zu wissen als ich, dass man Mathe nicht braucht. Es geht ihnen nur darum, in dieser Situation zu obsiegen und mich fertig zu machen. Das gelingt ihnen zwar nicht, aber eine sinnvolle Diskussion ist auch nicht möglich.

11.2.2 Eltern

Mitunter kommt dieses „Mathe braucht man nicht!“ sogar von den Eltern. So etwas trägt dazu bei, Bildung verächtlich zu machen. Schülern hilft es mit Sicherheit nicht, wenn ihnen ihre Eltern sagen, was sie lernen, sei ohnehin nichts wert, da sie es niemals brauchen würden.

Scheinbar gibt es wohl Eltern, die nicht wissen, welche Rolle Mathematik in unserer Gesellschaft spielt. Ich rede z. B. mit erwachsenen Menschen, die nicht wissen, dass zur Entwicklung von Smartphones, Schiffsantrieben oder auch Medikamenten Mathematik notwendig ist. Ohne Mathematik hätten wir noch nicht einmal etwas zu essen, weil die Agrarflächen mit Maschinen bearbeitet werden, die von Ingenieuren gebaut wurden, die dafür einen Haufen Mathematik verwendeten.

11.2.3 Aber braucht man Mathe *wirklich*?

Schulische Lerninhalte sind nicht nötig, um in unserer Gesellschaft überleben zu können. Ansonsten wären sehr viele Menschen bereits tot. Lehrinhalte eröffnen Sichtweisen auf die Welt. So wird es jungen Menschen ermöglicht, die Welt z.B. aus Sicht der Biologie, der Kunst, der Sprache, der Soziologie, der Physik oder eben auch der Mathematik zu sehen. Es werden genau *die* Inhalte vermittelt, die über das Alltagsverständnis der Welt hinausgehen. Deshalb ist auch die Frage, wozu man Mathematik im Alltag braucht, so unsinnig - obwohl man Mathe natürlich auch dort verwenden kann, wenn man möchte.

Unterrichtsinhalte sollten an die sich verändernde Welt angepasst werden und dazu ist es - zumindest in unserer Gesellschaft - üblich, darüber zu Streiten. Z.B. vertritt die Deutsche Mathematiker Vereinigung diesbezüglich andere Ansichten als die Deutsche Kultusministerkonferenz. Das wie eine Stammtischparole vorgetragene „Mathe braucht man nicht“ ist aber nicht Teil der Fachdiskussion.

11.3 Mathe ist nicht Rechnen

Viele Menschen glauben, Mathematik sei das, was man in der Schule macht. Und außerdem meinen sie, dass man in der Schule rechnet. Beides stimmt nicht. Alles, was ab der 8. Klasse mit Variablen und Termumformungen passiert, ist damit in der Wahrnehmung der meisten Menschen irgendetwas merkwürdiges, was keinen Sinn hat.

Ich frage mich manchmal, was Leute, die meinen, Mathematik sei rechnen, glauben, was Studenten tun, wenn sie Mathematik studieren. Tatsächlich habe ich schon von einem erwachsenen Menschen (Arzt) die Meinung gehört, im Mathematikstudium werde die Schulmathematik nochmal erklärt.

Was auch immer wieder zu hören ist: Wenn das Ergebnis richtig ist, gibt es die volle Punktzahl. In der Mathematik geht es darum, abstrakte Dinge und abstrakte Denkweisen zu verstehen und nicht darum, Ergebnisse hinzuschreiben. Solche Falschansichten behindern den Lernerfolg.

11.3.1 Mehr als Rechnen

Es gibt viele Gründe, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Man kann die Klarheit der Sprache, wie sie z. B. in Beweisen vorkommt, faszinierend finden. Voraussetzung dafür ist aber zu verstehen, dass Mathematik nicht rechnen ist. Man kann auch von der Anwendung her zur Mathematik kommen, wenn man z.B. als Mediziner sieht, wie viel Schindluder mit Statistiken getrieben wird. Man kann über die Ästhetik geometrischer Gebilde zur Mathematik kommen. Oder man kann aus philosophischen Gründen Mathematik betreiben, weil man sich z.B. über die Axiomatik wundert.

11.3.2 Chance vertan

Diese ganzen Zugänge zur Mathematik werden normalerweise nicht beachtet, weil in der gesellschaftlichen Wahrnehmung Mathematik mit dem Rechnen identifiziert wird. Da tritt z. B. jemand in einer Talkshow auf, der besonders schnell Wurzeln von Zahlen ausrechnen kann und es wird von Moderator und Gästen permanent behauptet, dies sei Mathematik. Im Privaten erlebe ich das ebenfalls durchgehend: Fast alle meine Bekannten sind der Ansicht, als Mathematiker könne ich besonders schnell rechnen (was tatsächlich gar nicht der Fall ist). Dadurch gehen enorm viele Chancen verloren, denn wenn junge Menschen ihre Interessen ausloten und von der Mathe-Seite nur Rechnen ist Spiel gebracht wird, ist das wohl ziemlich unattraktiv.

11.3.3 Fantasie

David Hilbert wurde einmal nach dem Grund gefragt, warum einer seiner Studenten das Fach gewechselt hat und nun Schriftsteller ist. Er antwortete: „Er hatte zu wenig Fantasie." Diese Aussage ist nur deshalb witzig, weil die meisten Menschen scheinbar nicht wissen, wie viel Fantasie für ernsthafte Mathematik nötig, obwohl man sich das fast schon herleiten kann: Da es in diesem Fach um abstrakte Objekte und Strukturen geht, braucht man Fantasie, um diese sich vorstellen zu können. Wie soll das auch anders gehen? Sicher lassen sich erstaunlich viele Ideen der Mathematik auch an konkret begreifbaren Modellen zeigen, aber der tägliche Umgang eines Mathematikers mit diesen Dingen findet fast vollständig in Gedanken statt - oder, wenn man so will: in der Fantasie.

11.3.4 Forschung

Ebenfalls mit der Ansicht, es gehe um Rechnen, nicht kompatibel ist die Tatsache, dass Mathematik Gegenstand der aktuellen Forschung ist. Dieses Fach wird also laufend weiterentwickelt. Wenn ich das Leuten erzähle, sagen sie häufig: Also 1+1 ist 2. Das war schon immer so und das wird sich auch nicht ändern. Das ist aber so sinnlos wie zu behaupten, Autos könne man nicht weiterentwickeln, weil das Rad nicht runder werden könne oder es könne keine neuen Romane geben, da alle Buchstaben bereits bekannt seien.

11.4 Was muss ich hinschreiben?

Schüler sind vielleicht jung und unerfahren, aber sie sind nicht doof. Sie kriegen sehr schnell mit, was es braucht, um gute Noten zu bekommen: Das richtige Ergebnis hinschreiben. Wenn ich mit ihnen dann die zu erledigenden Hausaufgaben bespreche, fragen sie mich folgerichtig: Was muss ich hinschreiben?

11.4.1 Unsinnige Verfahren

Das fatale an dieser Sache ist, dass die Schüler teilweise damit Recht haben. Selbstverständlich weise ich als Lehrer darauf hin, wie wichtig das Verständnis ist, um Aufgaben lösen zu können. Allerdings gibt es auch Aufgaben, die man durch das Auswendiglernen unsinniger Verfahren bewältigen kann. Wenn Schüler dann daraus den Schluss ziehen, Mathematik brauche man nicht, haben sie recht, solange sie unter „Mathematik“ diese Verfahren subsumieren. Wenn nun noch die Eltern mit ihrem sehr einseitigen Wunsch nach guten Noten dazukommen, ist das Schlamassel perfekt. Schüler fühlen sich dann bestätigt, wenn sie Mathe nur als Reiz-Reaktions-Schema aus „Aufgabe bekommen“ und „Lösung hinschreiben“ sehen. Vermutlich auch deshalb kommen sie in Diskussionen zum Thema „Wozu braucht man Mathe?“ zu solche abstrusen Argumenten wie: „Ich brauche kein Mathe, weil ich mir nicht vorstellen kann, dass mich auf der Straße mal jemand nach der binomischen Formel fragt.“

11.4.2 Schüler mitverantwortlich

Stellen wir uns einen jungen Menschen vor, der zum Fußballtraining erscheint, sich aber nicht für Fußball interessiert, auch gar nicht trainieren möchte und dem Trainer sagt: „Ich möchte nur wissen, wie man Tore schießt.“ Wir können uns vorstellen, wie die Geschichte ausgeht: Entweder der junge Mensch trainiert vernünftig, nämlich so wie der Trainer es sagt - oder er kann wieder nach Hause gehen.

In der Schule gibt es die letztere Option nicht, da ja Schulpflicht besteht. Deshalb muss der Schüler ein Einsehen haben und es einfach mal mit Verständnis statt mit unsinnigen Verfahren (die später im Leben tatsächlich niemand braucht) probieren. Das individuelle mathematische Verständnis aufzubauen ist aus vielen Perspektiven die sinnvollste Möglichkeit, die ein Schüler hat, mit dem Mathe-Unterricht umzugehen. Meine Meinung: Wenn man schon in der Schule sitzt, kann man auch etwas lernen! Was möchte der heutige Schüler denn später seinen Kindern über die heutige Schulzeit erzählen? „Ich habe mich immer durchlaviert.“ oder „Ich. Habe. Mathe. Verstanden.“? Außerdem macht der Matheunterricht mehr Spaß, wenn man etwas versteht.

Viele schöne Möglichkeiten der Unterrichtsgestaltung seitens des Lehrers stehen und fallen mit der Selbstständigkeit der Schüler. Pointiert ausgedrückt bekommt also jede Klasse den Unterricht, den sie verdient.

Kapitel 12

Mathematik im Internet

12.1 Fachbücher

Schauen wir zunächst auf die Vergangenheit: Es gab mal eine Zeit, in der man nach Fachwissen in Fachbüchern suchte. Das hatte den Vorteil, dass diese erstens von Fachleuten mit Fachwissen geschrieben wurden und man zweitens an jeder Stelle des Buchinhalts einen fachlichen Zusammenhang erkennen konnte. Lernt man aus einem Fachbuch, kann man sicher sein, dass alles, was in diesem Buch steht, richtig ist und einen Sinn ergibt. Die verwendeten Fachbegriffe gibt es tatsächlich und sie werden auch richtig angewendet.

Der Prozess des Verstehens kann anstrengend sein. Man braucht mitunter Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Das lässt sich aber nur dann sinnvoll aufbringen, wenn man von der Richtigkeit des Lehrmaterials überzeugt ist. Gerade für Mathematikbücher galt: Suchte man einen Begriff, sah man im Stichwortverzeichnis nach und gelangte zur entsprechenden Seite des Buchs. Kamen auf dieser Seite Begriffe vor, die man nicht kannte, konnte man sicher sein, die Begriffsexplikationen auf den vorherigen Seiten des Buchs finden zu können - wenn sie nicht für das Verständnis des Buchinhalts ohnehin vorausgesetzt wurden, was aber in einem der ersten Kapitel (meistens Einleitung genannt) eindeutig kommuniziert wurde. Zudem hatte man im Buch einen fachlich motivierten Aufbau. Oder anders formuliert: Man wusste halt, wo vorne und wo hinten ist. Darüber hinaus waren alle relevanten Informationen in räumlicher und logisch stringenter Nähe zueinander zu finden. Die Autoren von Fachbüchern benutzten eine Sprache für die Ewigkeit. Ich traue mich das kaum zu sagen, aber man schrieb korrektes Deutsch. Grammatik ist dazu da, sich präzise auszudrücken. Und wo könnte eine präzise Sprache wichtiger sein als in der Mathematik? Es gab auch eigentlich keine Druckfehler. Vielleicht gab es auf 300 Seiten irgendwo mal einen Kommafehler.

Ich selbst habe die Schulmathematik zum großen Teil aus richtigen Büchern gelernt (nicht aus etwas, was sich heutzutage „Lehrbuch“ nennt). Die Geometrie z. B. aus einem Buch von Erich Gasse[1]. Da standen Definitionen, Sätze, Beweise, Erklä-

[1] Gasse, Erich, Mathematik für technische Berufe, Braunschweig, Vieweg Verlag, 15., durchgesehene Auflage,

rungen, Aufgaben und Lösungen drin. Verglichen mit heutigen Verhältnissen war das traumhaft schön.

Ein Nachteil dieser Fachbücher war die beschränkte Verfügbarkeit. Wohl dem Menschen, der über eine gut sortierte Hausbibliothek verfügte. Trotzdem war es z. B. für eine wissenschaftliche Tätigkeit unmöglich, alle Bücher zu besitzen, die man brauchte. Wollte man also etwas wissen, was die eigenen Bücher nicht hergaben, musste man in eine Bibliothek gehen. Dazu musste man den Wissenserwerb zeitlich und räumlich planen und wenn man Pech hatte, war dieses eine Buch, welches man benötigte, gerade ausgeliehen.

12.2 Mathe-Texte und -Videos im Netz

In diesem Abschnitt geht es darum, die mathematischen Inhalte im Internet qualitativ einzuordnen.

12.2.1 Wikipedia

Wikipedia ist ein Online-Lexikon und stellt demnach Fakten bereit. Eine didaktische Aufbereitung findet nicht statt. Deshalb dürfte es für einen Schüler wohl schwierig bis unmöglich sein, nur mit Wikipedia als einziger Quelle Mathematik tatsächlich zu begreifen.

Zu beachten sind auch die sehr unterschiedlichen Terminologien, die in der Mathematik Verwendung finden - abhängig davon, in welchem Teil der Mathematik man sich gerade befindet. Ein Beispiel: Normalerweise wird in der 7. Klasse der Funktionsbegriff eingeführt. Dieser wird mit allerhand Beispielen aus dem Alltag motiviert und kristallisiert dann zu der Gleichung

$$y = m \cdot x + b\ .$$

Außerhalb der Schulmathematik kann eine Funktion $f : M \to N$ definiert werden als linkstotale, rechtseindeutige Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times N$. Dabei bedeutet linkstotal

$$\forall x \in M\ \exists y \in N \big((x,y) \in f \big)$$

und rechtseindeutig bedeutet

$$\forall x \in M\ \forall y_1, y_2 \in N \Big((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \Big)$$

Möglicherweise ist eine solche Definition einer Funktion nicht das, was man als Schüler gesucht hat.

1967

12.2.2 Negative Auslese

Während die Inhalte von Wikipedia noch einer gewissen Kontrolle unterliegen, gilt dies für die meisten anderen mathematischen Inhalte im Netz nicht. So lassen sich denn auch viele Fehler in Texten und Videos finden. Es scheint sogar eine negative Auslese zu geben: Je schlechter z. B. ein Video aus mathematischer und didaktischer Sicht ist, desto mehr Aufrufe scheint es generieren zu können. Das Niveau mathematischer Erklärungen erlebte seit der Popularität des Internets einen Absturz apokalyptischen Ausmaßes. Teilweise besteht der gesprochene Text in solchen Videos noch nicht einmal aus ganzen Sätzen, sondern aus zusammenhanglosem Gestammel. Damit nicht genug finden sich auch noch Claqueure, die Kommentare wie „Beste Erklärung der Welt!“ dalassen. Was diese Leute verstanden haben wollen, wird mit Sicherheit ihr Geheimnis bleiben. Vor der Etablierung des Internets hatte sich so etwas niemand vorstellen können.

Man mache sich klar, dass viele YouTuber und Konsorten Etikettenschwindel betreiben: Da heißt ein Video z. B. „Exponentielles Wachstum“, aber statt der erwartbaren Definition werden Kochrezepte zur Lösung möglicher Abituraufgaben gezeigt. Ein Schüler hat normalerweise nicht genügend mathematische Erfahrung, um folgenden Schluss klar zu sehen und die Konsequenzen zu ziehen: „Vom Titel her verspricht das Video eine Erklärung oder eine Definition des exponentiellen Wachstums, aber der Autor des Videos hat mich angelogen und zeigt keine. Deshalb suche ich jetzt weiter nach einer Definition.“ Die meisten Schüler werden statt dessen ein unangenehmes Gefühl verspüren und denken, sie seien wohl zu dumm, um das exponentielle Wachstum zu verstehen.

Aber auch, wenn der Titel eines Videos nicht in die Irre leitet, werden fast nur Verfahren gezeigt, die so simplifiziert wurden, dass sie völlig ohne Verständnis mechanisch ausgeführt werden können. „Wenn die Aufgabe so und so ist, musst du das und das hinschreiben.“ Eine Darstellung mathematischer Zusammenhänge, die Verwendung der Fachtermini, eine kohärente Präsentation oder gar das Bereitstellen einer Begründung oder Erklärung findet normalerweise nicht statt. Es gibt sogar „Darstellungen von Oberstufen-Mathematik“, in denen auf Formeln verzichtet wird, weil Formeln ja schon zu kompliziert seien. „Wenn du eine Aufgabe bekommst, in der etwas aussieht wie das hier, dann musst den Teil hier da hinschreiben.“ So redet man mit Kleinkindern, die noch nicht alle Gegenstände ihrer Lebenswirklichkeit bezeichnen können.

Das Traurige für Schüler ist: Sie wissen nicht, dass das Gezeigte keine Mathematik enthält. So versuchen sie möglicherweise etwas zu verstehen, was nicht verstehbar ist, weil die Zusammenhänge, die verstanden werden könnten, nicht gezeigt werden.

Ein weiteres Problem: Die Internet-Leute stellen sich zwischen Schüler und Lehrer und sagen: „Hey, ich mache das jetzt ganz einfach für dich. Der böse Lehrer macht das viel zu kompliziert.“ Damit wird zusätzlich die Autorität des Lehrers untergraben. Die Schüler, denen man vorgibt, helfen zu wollen, haben dadurch keinen Vorteil.

12.2.3 Kommerzielle Anbieter

Kommerzielle „Bildungs-“Anbieter im Netz haben das Ziel, Geld zu verdienen. Das ist an sich nichts schlimmes, denn letzteres ist - rein rechtlich gesehen - der Sinn eines Unternehmens.

Nun gibt es grundsätzlich zwei Wege, ein Unternehmen, welches mit Bildungsvideos Geld verdient, aufzuziehen:

1) Man produziert Videos und wertet aus, womit man am meisten Geld verdient. Dementsprechend produziert man dann weitere Videos. Ebenso verfährt man mit der Werbung: Man produziert mehrere Werbespots und wertet aus, welche am meisten Geld bringen. In dieser Richtung arbeitet man dann weiter. Außerdem gibt man sich den Anstrich, besonders sorgfältig auf die Bedürfnisse der Schüler einzugehen und ganz besonders innovativ zu sein - was man aber aufgrund des dargestellten Verfahrens selbstverständlich nicht ist. Letztlich ist es für die tägliche Arbeit der Angestellten wurscht, ob sie Videos oder Schweinehälften verkaufen: Es geht nur darum, monetäre Interessen zu befriedigen.

2) Man holt Leute mit möglichst viel Sachverstand zusammen, produziert die besten Videos, die man sich vorstellen kann und versucht dann, das ganze mit dem Argument, besonders gute Videos auszuliefern, zu vermarkten. In der Werbung wird man dann wohl keine Eltern zeigen, die nun wegen der guten Noten ihrer Kinder völlig beglückt sind, sondern man wird eher argumentieren, warum man die besten Videos hat und mehr auf Fachleute (wie z. B. Lehrer) setzen, in der Hoffnung, aus fachlichen Gründen weiterempfohlen zu werden.

Ich persönliche kenne zur Zeit keinen kommerziellen Anbieter, den ich zur Nummer 2 zuordnen würde.

12.2.4 Was man tun kann

★ Man sollte nie vergessen, dass es die für einen selbst passende Erklärung gibt. Versteht man also im Netz dargestellte Mathematik nicht, ist man nicht zu dumm, sondern hat nur noch nicht die passende Erklärung gefunden.

★ Möchte man Schulstoff mit Hilfe des Internet nachbereiten, kann man seinen Lehrer nach Empfehlungen fragen. Das kann einem eine lange Suche ersparen und man lernt vermutlich den am besten zur nächsten Klassenarbeit passenden Lehrstoff.

★ Man muss letztlich für sich entscheiden, welcher Seite man vertraut oder bei welchem YouTuber man etwas lernt. Die Angebote sind sehr unterschiedlich und eine lange Phase des Ausprobierens kann durchaus sinnvoll sein.

★ Wenn ein kommerzieller Anbieter in der Werbung nur auf vorgespielte Notenverbesserung statt auf Verständnis der Mathematik setzt, ist er vermutlich unseriös.

12.3 KI und Chatbots

KI (künstliche Intelligenz) und Chatbots (Sprachroboter wie ChatGPT, Bard, Bing, Claude, etc.) werden die Bildungslandschaft stark verändern.

Man kann jetzt schon Aufgaben der Schulmathematik in englischer Sprache als Prompts für Chatbots verwenden und bekommt richtige Ergebnisse und auch ganz ordentliche Lösungswege angezeigt. Außerdem kann man zu jedem Lösungsschritt gezielt Fragen stellen und um eine ausführlichere Dokumentation bitten. In deutscher Sprache funktioniert das noch nicht ganz so gut; es ist aber wohl eine Sache von Monaten, bis das der Fall sein wird.

Wenn dann also die Lösung (inklusive ausführlichem Lösungsweg) jeder Matheaufgabe zur Schulmathematik stets sofort zur Verfügung stehen wird, werden Schüler sich umorientieren müssen. Es wird nicht mehr darum gehen, dem Lehrer die Erledigung der Hausaufgabe nachzuweisen. Statt dessen wird es darum gehen, dass jeder einzelne Schüler sich fragt: „Wie verstehe ich denn die Mathematik?“ Verglichen mit der bisher üblichen Frage „Was muss ich hinschreiben?“ ist das eine Drehung um 180 Grad. Es geht um den Aufbau eines individuellen Verständnisses, darum, Mathematik als sinnvoll zu erleben und sich mit Mathematik wohlzufühlen. Kein Chatbot der Welt kann mir als Lernendem sagen, wie ich die Mathematik verstehen muss, damit sie für mich rational wie auch emotional Sinn ergibt.

Lehrer können KI nutzen, um z. B. Probeklassenarbeiten und Probeklausuren in beliebiger Anzahl herzustellen, die genau den Anforderungen entsprechen, die der Lehrer möchte. Auch können Übungsaufgaben in beliebiger Anzahl mit vollständigen Lösungswegen sekundenschnell erzeugt werden, sofern es sich um Standardaufgaben handelt. Eine KI kann allerdings keine neuen Lösungswege formulieren oder besonders kreative Aufgaben oder didaktisch wertvolle Zeichnungen anbieten.

Es wird sich für die Mathelehrer etwas ändern, die sich bisher als die allein befugten Personen gesehen haben, ihrer Klasse Lösungen von Aufgaben angedeihen zu lassen.

Es gibt einige Lehr- und Lernprogramme, mit denen der Prozess von der Leistungsdiagnose für jeden einzelnen Schüler über individuelle Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungswegen in beliebiger Anzahl, Probeklassenarbeiten etc. bis hin zur individuellen Klassenarbeit automatisiert mit KI und ohne Lehrer ablaufen kann.

Auch wenn es vermutlich noch sehr lange dauern wird, bis solche Lernprogramme an Deutschlands Schulen flächendeckend zum Einsatz kommen, können wir uns überlegen, welche Vor- und Nachteile ein solches System hat.

Die Vorteile sind:

- Es ist am Anfang eines neuen Themas klar, was genau das Lernziel ist.
- Es werden Erklärungen angeboten, die wiederholt abgerufen werden können.
- Es sind Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungswegen in beliebiger Anzahl vorhanden.

- Mit Tests kann jeder Schüler beurteilen, was er schon kann und was er noch lernen muss. Auch Lücken im Lehrstoff früherer Themen können diagnostiziert werden.
- Jeder Schüler bekommt ein individuelles Lernprogramm zugewiesen.
- Es stehen Probeklassenarbeiten zur Verfügung, sodass kein Schüler in der Prüfung unliebsame Überraschungen erleben muss.
- Niemand muss Angst haben, bei einer falschen Antwort vor der Klasse bloßgestellt zu werden.

Häufig ist zu hören, ein Nachteil solcher KI-gestützten Lernsysteme sei die Tatsache, dass Schüler umso mehr von diesen Systemen profitieren, je selbstständiger sie lernen können. Das ist zwar richtig, trifft aber auch auf alle anderen Lernmöglichkeiten zu, die heutzutage an deutschen Schulen angeboten werden.

Eindeutig sind mit solchen Systemen die Schüler im Vorteil, die alleine und visuell gut lernen können. Diejenigen, die eher haptisch oder auditiv lernen oder auch eher im Austausch mit andern Menschen gut lernen können, sind im Nachteil.

Um einmal konkret zu werden, können wir uns folgende Situation vorstellen: Wir sind in einer typischen 9. Klasse, führen ein KI-gestütztes Lernsystem ein und es geht um ein Wurzelgesetz mit den üblichen Aufgaben dazu, deren Lösungen richtig oder falsch sein können. Dann werden wir auf der einen Seite Schüler sehen, die sich für Mathematik interessieren und die im Mathe-Unterricht der letzten Jahre stets etwas gelernt haben. Deren Lernstandsdiagnose wird keinerlei Lücken im Lehrstoff zutage fördern. Sie werden dann ca. 15 Minuten dafür brauchen, drei bis vier Aufgaben zu diesem Wurzelgesetz zu rechnen und es für den Rest ihres Lebens ohne die Erledigung weiterer Übungsaufgaben zu beherrschen. Auf der anderen Seite werden wir Schüler sehen, deren Lernstandsdiagnose ergibt, dass sie die Grundschulmathematik nicht beherrschen und sie also zumindest einen Teil des Lehrstoffs der letzten acht Schuljahre erneut lernen müssen, um das Wurzelgesetz verstehen zu können.

KI-gestützte individuelle Trainingsprogramme können nun dabei helfen, eine innere Differenzierung im Matheunterricht auch faktisch umzusetzen.

Kapitel 13

Und sonst noch

13.1 Eltern

13.1.1 Gute Noten

Eltern möchten, dass ihre Kinder gute Noten in der Schule haben. Das ist verständlich. Nun haben aber die Schulnoten in Mathe nicht viel mit dem mathematischen Verständnis eines Schülers zu tun. Gute Noten können mit relativ wenig Verständnis erzielt werden und ein gutes mathematisches Verständnis führt nicht unbedingt zu guten Noten. Gerade in der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann Verständnis eine gute Bewertung verhindern, wenn nämlich Aufgaben falsch oder grob unsinnig gestellt sind und von Schülern erwartet wird, falsche Mathematik als Lösung hinzuschreiben (siehe dazu den Abschnitt „Falsche Mathematik“). Oder es kann die mündliche Note schlecht ausfallen, weil jemand Ruhe braucht, um Mathematik zu lernen - eine Ruhe, die sich im Klassenraum nur selten einstellt.

Obwohl ich die Einteilung von Menschen in dumm und schlau vehement ablehne, weil sie völlig unsinnig ist, muss hier ganz deutlich gesagt werden: Liebe Eltern, wenn Ihr Kind eine schlechte Mathe-Note hat, heißt das *nicht*, dass Ihr Kind dumm ist!

Aus meiner Unterrichtstätigkeit weiß ich, wie sehr es jungen Menschen hilft, wenn deren Eltern nicht nur die Note im Blick haben, sondern sich auch für das mathematische Verständnis und dafür interessieren, wie ihr Sohn/ ihre Tochter den Mathe-Unterricht erlebt. In meinem Unterricht schaffe ich zunächst für den Schüler positive Erlebnisse mit Mathematik, um eine Offenheit dem Lernen und dem Fach gegenüber zu erreichen. Eine positive Lernatmosphäre ist nicht nur die Voraussetzung für mathematisches Verständnis (und damit tendenziell auch für gute Noten), sondern es ist ein Wert an sich, zu dem Eltern durch echtes Interesse und eine optimistische Einstellung einen großen Teil beitragen können.

Machen wir uns klar, wie negativ sich Notendruck auf Schüler auswirkt: Lernt ein Schüler z. B. für die nächste Klassenarbeit, weiß er niemals, ob er genügend gelernt hat, weil ihm normalerweise das didaktische Fachwissen dazu fehlt. Er *kann* somit die Erwartung seiner Eltern, sich gut auf die Klassenarbeit vorzubereiten, gar nicht erfüllen. Zudem kann der Schüler nicht wissen, was in der Klassenarbeit drankommt, denn: Ich erlebe immer wieder im Nachmittagsunterricht, wie sich Lehrer nicht an die eigenen Vorgaben halten. Z. B. geben Lehrer ihren Schülern eine Liste mit einer detaillierten Aufstellung, welche Lehrinhalte und sogar welche Aufgabentypen vorkommen werden. Trotzdem kommen dann in der Klassenarbeit Aufgaben und sogar Themen dran, die mit der Liste nichts zu tun haben. Auch in dieser Beziehung ist der Schüler also auf verlorenem Posten.

Auch an dieser Stelle sei der Hinweis an die Mathe-Lehrer erlaubt: Ist eine Klassenarbeit erstellt, lassen sich mit KI auf Knopfdruck beliebig viele ähnliche Klassenarbeiten erzeugen. Händigt man Schülern diese als Probeklassenarbeiten aus, können sie sich viel besser vorbereiten, als wenn sie sich von den Aufgaben überraschen lassen müssen.

13.1.2 Was man tun kann

★ Statt einfach nur gute Noten zu erwarten, können Eltern solche Erwartungen an ihre Kinder richten, die diese auch erfüllen können, wie z. B.

  – bis zur nächsten Klassenarbeit jeden Tag 20 Minuten lernen.
  – bis zur nächsten Klassenarbeit die vom Lehrer ausgegebenen Übungsaufgaben lösen können
  – Hausaufgaben regelmäßig anfertigen

★ nach jeder Mathe-Stunde zusammen mit dem Kind die Inhalte der Stunde durchgehen und konkret erfüllbare Maßnahmen ableiten, falls Verständnis- oder sonstige Probleme auftreten

★ nach jeder Klassenarbeit mit dem Kind zusammen altersgerecht analysieren, wie man gemeinsam in Zukunft vorgehen möchte

★ immer wieder deutlich machen, dass es primär um die geistige Entwicklung des Kindes und nicht um gute Noten geht

★ immer wieder deutlich machen, wie wenig schlechte Noten mit der Intelligenz des Kindes zu tun haben.

13.1.3 Negative Einstellung

Wenn Eltern eine negative Einstellung zur Mathematik haben, geben sie diese an ihre Kinder weiter - auch wenn sie sich bemühen, sich nichts anmerken zu lassen. Dieses Buch ist unter anderem geschrieben worden, damit Eltern sich mit der Mathematik aussöhnen können. Auch wenn Eltern während ihrer Schulzeit nicht so gut in Mathe waren, heißt das nicht, dass sie das (möglicherweise) Fehlen eines „Mathe-Gens“ an ihre Kinder vererben (siehe dazu „Was heißt schon Talent?“). Mit einem halbwegs vernünftigen Mathe-Unterricht, Zeit zum Üben und den richtigen Methoden (siehe dazu „Der Schlüssel zum Verständnis“) kann jedes Kind Mathe lernen.

Schlimmer noch als eine negative Einstellung ist es, wenn Eltern aktiv daran arbeiten, die Mathematik zu diskreditieren, indem sie z. B. ihren Kindern erzählen, Mathe brauche man im Leben nicht. Die Begründung ist dann oft: „Ich habe Mathe auch nicht gebraucht.“ Aber nur weil Eltern die Mathematik nicht gebraucht haben, heißt das nicht, dass ihre Kinder auch keine Mathematik brauchen werden (siehe dazu „Wozu braucht man Mathe?“). Die Welt ändert sich und wird sich weiter ändern. Wir wissen nicht genau, was unsere Kinder brauchen werden. Wir können uns aber verschiedene Szenarien vorstellen. Das wird auch weltweit genauso gemacht. In allen denkbaren Szenarien kommen aber immer drei Fächer als erstes vor: Muttersprache, Fremdsprache, Mathematik.

13.1.4 Was man tun kann

★ Jeder Mensch kann Mathe lernen. Wenn Eltern ihre Kinder unterstützen, geht das sogar noch besser.

★ Es gibt kein Mathe-Gen, deshalb kann man auch keinen Mangel eines Mathe-Gens an seine Kinder vererben.

★ Keine Schuldigen suchen. Es brächte auch nichts, wenn der Lehrer schuld wäre.

13.1.5 Bulimie-Lernen

Mathe lernen ist so ähnlich wie sportliches Training: Möchte man in einer Sportart seine persönliche Bestleistung erreichen, muss man über Jahre hinweg regelmäßig trainieren. *Regelmäßig* bedeutet dabei, alle ein bis zwei Tage zu trainieren (im Leistungssport zuweilen zwei Trainingseinheiten pro Tag). Leider sehen meiner Erfahrung nach viele Eltern diese Parallele zwischen Sport und Mathematik überhaupt nicht: Alle zwei bis drei Monate vor der Klassenarbeit drei Tage hintereinander ein bis zwei Stunden Mathe lernen reiche völlig aus, meinen sie. Regelmäßig vor Klassenarbeiten kontaktieren mich Eltern und fragen nach ein paar zusätzlichen Nachhilfestunden genauso wie sie kurz nach Klassenarbeiten vereinbarte Stunden absagen mit der Begründung, bis zur nächsten Klassenarbeit sei ja noch viel Zeit. Das ist aber das typische Bulimie-Lernen: Kurz vor der Klassenarbeit das Wissen in sich hineinstopfen, es in der Klassenarbeit auswerfen und kein Wissen bei sich behalten. Weder mathematische Fähigkeiten noch Fertigkeiten können auf diese Weise aufgebaut werden. Mit den Jahren werden so die Wissenslücken immer größer, bis man vielleicht einen Monat vor dem Abiturtermin feststellt, dass man eigentlich die gesamte Schulmathematik wiederholen müsste - wofür es dann selbstverständlich zu spät ist.

13.1.6 Eltern als Nachhilfelehrer

Klar, das kann alles super funktionieren. Manche Eltern sagen: „Naja, das werde ich meinem Kind ja wohl noch selbst erklären können.“ Aus Erfahrung muss ich leider sagen: Nein, vielleicht nicht. Etwas selbst unbestreitbar verstanden zu haben bedeutet nicht, es auch erklären zu können. Das fängt schon bei der Grundschulmathematik an. Eltern lernen mit ihren Kindern das kleine Einmaleins, indem sie das Kind die Zahlenreihen aufsagen lassen. Die Aufgaben, die das Kind aber im Schulunterricht sowie in Klassenarbeiten zu lösen hat, erfordern meist aber völlig andere Denkweisen als das Aufsagen beispielsweise der 8-er Reihe.

Viele Menschen meinen, Mathematik ändere sich nicht. Sie begründen das mit Sätzen wie: „Eins und eins ist zwei und daran wird sich auch nichts ändern.“ Auch wenn sich das Ergebnis wohl nicht ändern wird[1], so hat sich in den letzten Jahren geändert, wie gerechnet wird, womit gerechnet wird, worauf Rechnungen angewendet werden, mit welchen Methoden gerechnet wird usw. Wenn also Eltern ihren Kindern die Mathematik so erklären, wie sie sie vor 30 Jahren gelernt haben, werden diese Erklärungen für die Kinder höchstwahrscheinlich nur sehr eingeschränkt nutzbar sein. Schlimmer noch: Wird in der Schule Mathematik ganz anders betrieben als die Eltern es erklärt haben, führt das eher zu Verwirrung als zum Lernerfolg. Zudem können Kinder in einen Loyalitätskonflikt geraten: Wenn ein Schüler eine Hausaufgabe mit einer bestimmten Methode bearbeiten soll, die Eltern aber eine andere Methode für besser halten, hat der Schüler die Wahl, sich entweder mit den eigenen Eltern anzulegen und die Methode des Lehrers zu verteidigen oder den Eltern zu folgen und damit die Hausaufgabe aus Sicht des Lehrers falsch zu erledigen.

13.2 Nachhilfe

Der Nachhilfemarkt in Deutschland ist sehr speziell: Es treffen werbetechnisch extrem hochgerüstete, bundesweit agierende Nachhilfekonzerne auf Eltern, die einzig und allein daran interessiert sind, sich mit möglichst wenig Geld bessere Noten für ihr Kind zu erkaufen. Welche Blüten das treibt, sieht man an folgendem Beispiel:

> Nachhilfeanbieter werben gerne mal damit, ihre Nachhilfekräfte seien besonders jung. Dahinter steht die Vorstellung, als junger Mensch sei man an den Problemen der Schüler „am nächsten dran“. Stellen Sie sich einmal vor, sie hätten demnächst eine Gehirn-OP und der Gehirnchirurg stellt sich Ihnen im Vorgespräch als besonders jung und unerfahren vor. Fühlen Sie sich dann deshalb besonders gut aufgehoben? Oder - noch schlimmer: Sie lassen Ihr Auto in einer Werkstatt reparieren und dort sagt man Ihnen, man werde die Reparatur einem besonders jungen Lehrling, der sich im ersten Lehrjahr befindet, überlassen. Dann freuen Sie sich doch bestimmt und zahlen einen besonders hohen Preis, weil nicht

[1] Es gibt übrigens Bestrebungen, auch das Ergebnis zu verändern. Weil beim Rechnen eindeutige Ergebnisse vorkommen, wird Rechnen von manchen Menschen als männlich empfunden und in ihrer Ablehnung alles männlichen versuchen sie, alternative „Ergebnisse“ zuzulassen.

> der alte Kfz-Meister mit viel Erfahrung an Ihrem wertvollen Auto herum schraubt, oder? Sicher nicht! Merkwürdigerweise funktioniert das in Deutschland im Nachhilfemarkt aber tatsächlich so: An das eigene Auto darf nur das höchstqualifizierte Fachpersonal. Für das eigene Kind ist aber der billigste Student sicher gut genug.

Der Durchschnittslohn von Nachhilfekräften liegt knapp über dem Mindestlohn. Dass man damit keine hochqualifizierten Lehrer bezahlen kann, bedarf wohl keiner Erklärung. Man darf sich als Eltern auch gerne klar machen, dass (meistens) der größte Teil des Geldes, welches man pro Unterrichtsstunde an das Nachhilfeinstitut bezahlt, nicht beim Lehrer ankommt, sondern bei den Leuten bleibt, die das Institut betreiben.

Trotzdem kann Nachhilfe sinnvoll sein und sie kann viel mehr, als die sofortige Notenverbesserung. Es geht auch darum,

- eine positive Atmosphäre zu schaffen,
- den Schülern zuzuhören,
- zu zeigen, dass Mathe auch ganz anders sein kann,
- Interesse für Mathematik zu wecken,
- Begeisterung für Mathematik zu zeigen,
- Schüler zu stärken, Geborgenheit zu vermitteln,
- Erklärungen anzubieten, die in der Schule nicht angeboten werden können,
- Erklärungen zu zeigen, die dem Lerntyp entsprechen,
- individuelle Lernmethoden zu lernen,
- auf die speziellen Fragen eines Schülers einzugehen,
- ein starker Partner an der Seite des Schülers zu sein.

Es kann für einen Schüler ein schönes Gefühl sein, wenn sich jemand um ihn kümmert und wenn den Nachhilfelehrer tatsächlich interessiert, was der Schüler denkt und wie er etwas versteht.

Wenn ich als Nachhilfelehrer eine Stunde Zeit mit einem einzigen Schüler habe, wird er - wenn nicht andere Probleme vorliegen, die mit Mathe nichts zu tun haben - etwas verstehen und mit dem guten Gefühl nach Hause gehen, (einen Teil der) Mathematik verstanden zu haben. Dieses Gefühl ist Gold wert! Viel zu oft kommen sich junge Menschen dumm vor, weil sie schlechte Noten haben und deshalb glauben, Mathe nicht verstehen zu können. Eine einzige Nachhilfestunde, in der der Schüler tatsächlich etwas versteht, kann das Selbstbild massiv positiv und nachhaltig verändern.

Und noch schöner wird's, wenn Schüler in der Nachhilfe so richtig zeigen können, was in ihnen steckt. Es ist keine Seltenheit, wenn ich mit einem Schüler den Schulstoff von einer Woche in 20 Minuten erarbeite.

13.2.1 Was man tun kann

★ Sich als Eltern mit seinem Kind zusammen gut überlegen, was man von der Nachhilfe erwartet: Soll es eine Hausaufgabenaufsicht sein? Soll sich die Note verbessern? Soll das Kind ein individuelles Verständnis von Mathematik aufbauen?

★ In sinnvollen Zeiträumen die Erreichung der Ziele überprüfen.

★ Die menschliche Komponente nicht vergessen: Wenn sich das Kind im Nachhilfeunterricht wohl fühlt, ist das viel wert, auch wenn sich die Note nicht sofort verbessert.

★ Den Nachhilfelehrer um eine Einschätzung des Unterrichtsverlaufs bitten. Erzählt er dann begeistert von all den Unterrichtsideen, die schon umgesetzt wurden? Kennt der Lehrer die (Ihnen bekannten) Schwierigkeiten Ihres Kindes und bietet er erfolgversprechende Lösungen an?

★ Möglichst keine langfristigen Verträge eingehen.

13.3 Dyskalkulie

Dyskalkulie ist eine Teilleistungsschwäche und bezeichnet ausgeprägte Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens. Dabei geht es nicht um Schwierigkeiten, die mit Mathematik zu tun haben, sondern es geht nur um das Zahlenrechnen, welches wir normalerweise in der Grundschule erlernen. Mit der Intelligenz einer Person hat Dyskalkulie kaum etwas zu tun. Ähnlich wie bei der Gesichtsblindheit geht es bei der Dyskalkulie um einen sehr engen Bereich der menschlichen Kognition.

Um Mathematik zu verstehen ist es von Vorteil, rechnen zu können. Nötig ist es allerdings nicht. Ab dem Zeitpunkt, an dem im Schulunterricht Variablen, Terme und Gleichungen vorkommen, spielt das Rechnen eine immer geringere Rolle. Da außerdem für jede beliebige Rechnung der Taschenrechner verwendet werden kann, kann man auch mit Dyskalkulie in der Schule gute Noten haben.

In der richtigen Mathematik geht es zudem um präzise Definitionen, um logische Begründungen und abstrakte Strukturen. Das Zahlenrechnen kommt dabei eigentlich gar nicht mehr vor.

Eltern möchten keine dummen Kinder haben. Kranke Kinder sind aber ok. Deshalb wird von mehreren Seiten her versucht, Dyskalkulie als Krankheit hinzustellen. Z. B. ist das Kind dann nicht zu dumm für Mathe, sondern es hat unglücklicherweise eine Krankheit, für die es ja nichts kann. Außerdem sehen Eltern dadurch mitunter die Möglichkeit, Druck auf Lehrer auszuüben. Letztere sollen Schülern dann trotz schlechter Leistungen gut Noten geben, weil das ja sonst Diskriminierung sei.

Das Problematische an diesen Argumentationen ist das Schubladendenken: Statt individuelle Lösungen zu suchen, wird versucht, durch das Etikett „Dyskalkulie“ Forderungen durchzudrücken. Für einen konstruktiven Umgang mit Problemen in der mathematischen Bildung eines Schülers müssen aber meistens alle Beteiligten zusammenarbeiten: Schüler, Eltern, Lehrer. Das kann anstrengend sein. Geht aber nicht anders.

Die andere Gruppe von Personen, die daran interessiert sind, dass Dyskalkulie als Krankheit verstanden wird, sind Anbieter von Dyskalkulie-„Therapien". Nennt man sein kommerzielles Bildungsangebot Therapie statt einfach nur Nachhilfe, kann man viel höhere Preise am Markt durchsetzen. Oftmals kann man auf deren Websites einen Online-Test durchführen, der überdurchschnittlich häufig zum Ergebnis hat, dass man an Dyskalkulie leidet, weil die Website-Betreiber ja ihre Therapie verkaufen wollen. Außerdem ist meist von neuesten Erkenntnissen die Rede, die der jeweilige Anbieter in seinen Therapien berücksichtigt und die - selbstverständlich - alle anderen Anbieter nicht berücksichtigen. Deshalb kann man das eigene Angebot noch teurer verkaufen.

Dyskalkulie ist aber keine Krankheit und es gibt weder Pillen noch Therapien dagegen. Es ist eine Symptombeschreibung. Dyskalkulie lässt sich auch nicht so Diagnostizieren, wie sich bei manchen Krankheiten z. B. ein Virus nachweisen lässt.

Wie für die Gesichtsblindheit gilt auch für die Rechenblindheit - also Dyskalkulie - dass das Üben des Rechnens - egal mit welchen Mitteln - eben nicht die Rechenfähigkeit erhöht. Die Nicht-Therapierbarkeit ist also die definierende Eigenschaft der Dyskalkulie. Deshalb kann man Dyskalkulie auch nicht „heilen".

Guter Mathematikunterricht in der Schule wie auch in der 1-zu-1-Betreuung (Nachhilfe) sollte immer den individuellen Zugang eines jeden Menschen zur Mathematik berücksichtigen und dementsprechend ein fachlich fundiertes und individuelles Lehrangebot bereitstellen, welches sich nach den spezifischen Lernvoraussetzungen eines jeden Menschen richtet. Dabei ist es irrelevant, ob die Lernvoraussetzungen als Dyskalkulie oder mit anderen Begriffen beschrieben werden. Jeder Mensch kann sein Verständnis für Mathematik verbessern, unabhängig davon, wo man startet.

13.3.1 Was man tun kann

- ★ Jeden Tag ein paar Minuten üben statt einmal in der Woche zwei Stunden.
- ★ Wenn man das Rechnen mit Zahlen jeden Tag üben muss, ist das normal und heißt nicht, dass man Dyskalkulie hat.
- ★ Die Art des Übens sollte vom Lernfortschritt abhängen. Wenn sich z. B. beim Auswendiglernen des kleinen Einmaleins kein Fortschritt erzielen lässt, sollte man die Methode des Lernens ändern.
- ★ Rechnungen mit begreifbaren Materialien üben: Rechnungen an der Zahlengerade durchführen, Rechnen mit Holzwürfeln, Zehnerstäben, Hunderterplatten etc., Cuisenaire-Stäbe verwenden, Multiplikationen am Hunderter-Brett durchführen, usw.
- ★ Beim Rechnen Ersatzstrategien verwenden.
- ★ Es gibt keine Lernstrategie, die für alle Menschen passt. Deshalb sollte man die Lernmethoden durch Versuch und Irrtum immer wieder anpassen.

★ Jeder Mensch kann sich mathematisch verbessern - auch Menschen mit Dyskalkulie!

13.4 Unterrichtsausfall

Es gibt Länder, in denen der Unterricht nicht ausfällt, wenn ein Lehrer krank ist. Jeder Lehrer muss im Krankheitsfall seine Unterrichtsentwürfe am Krankheitstag bis 7:00 Uhr morgens an die Schule gesendet haben. Dann wird der Ersatzlehrer informiert, der den Unterricht durchführt.

In Deutschland hingegen gibt es erstens keine Ersatzlehrer, die vorgehalten werden und zweitens sind die Schulen so knapp mit Lehrern besetzt, dass jeglicher Ausfall eines Lehrers meist nicht ersetzt werden kann. Ich weiß gar nicht, wann mir ein Schüler zum letzten Mal sagte, in seiner vergangenen Schulwoche sei *kein* Unterricht ausgefallen. Oftmals finden nur ein oder zwei Unterrichtsstunden pro Tag statt. In Zukunft wird der Lehrermangel höchstwahrscheinlich schlimmer werden, weshalb es zu noch mehr Unterrichtsausfall kommen wird.

Zusätzlich gibt es offiziell geplante Unterrichtsausfälle: Wandertage, Klassenfahrten, bewegliche Ferientage, Projekttage oder -wochen (an/ in denen zwar der Unterricht nicht ausfällt, meist aber kein Mathe-Unterricht gemacht wird), Schulfest, Abiturstreich, Sportfeste, Zeugniskonferenzen der Lehrer, Fortbildungen der Fachlehrer etc.

Zu ergänzen sind noch die regelmäßig stattfindenden, aber offiziell nicht geplanten Unterrichtsausfälle: Erst einige Tag nach den Sommerferien findet regulärer Unterricht statt, vor den Weihnachtsferien fallen mehrere Tage Unterricht wegen allgemeinen Kekse-Essens aus, zum Halbjahreswechsel und vor und nach den Osterferien sind auch noch mehrere Tage unterrichtsfrei und nach der letzten Klassenarbeit vor den Sommerferien können sich Schüler und Lehrer nicht mehr zu regulärem Unterricht aufraffen. Relativ neu ist das Phänomen, dass Familien mit ihren Kindern schon Wochen vor der Zeugnisausgabe in den Urlaub fliegen.

Das kann man alles schlimm finden, aber dadurch wird sich nichts ändern. Es ist jetzt wohl Aufgabe der Schüler (hoffentlich zusammen mit ihren Eltern), sich umzuorientieren: Sie sollten viel selbstständiger werden und die Unterrichtsausfälle zum Lernen verwenden, statt zu chillen. Sie haben die Möglichkeit, ihre Abschlussprüfung oder das Abitur mit viel oder wenig vorausgegangener Lernzeit zu absolvieren. Deshalb wäre es gut, wenn sie sich von der Vorstellung, Unterricht finde im Klassenverband mit anwesendem Lehrer statt, verabschieden würden.

Teil II

Mathematik kann ganz anders sein

Kapitel 14

Das Positive an Mathematik

Eine Influencerin stellte ihren Followern einmal die Aufgabe, mit einem Wort das positivste des aktuellen Tages zu nennen. Ich schrieb in den Thread: Mathematik. Die Reaktionen reichten von völligem Unverständnis bis hin zu Wut. Da wurde mir klar, wie wenig Menschen über die positiven Eigenschaften von Mathematik informiert sind - obwohl sie laut Stundenplan dieses Fach in der Schule hatten. Die folgende Liste ist selbstverständlich nicht vollständig.

- Mit Mathematik denkt man immer unabhängig - auch unabhängig von Leuten, die einem ihre Meinung aufzwingen wollen. Ein mathematischer Beweis ist nur der Wahrheit verpflichtet. Es ist schlicht und ergreifend nicht möglich, in einen Beweis Lügen einzubauen.

- Es gibt vieles, was in der Mathematik nicht vorkommen kann: Prahlerei, Egoismus, Hierarchie, Demagogie, Verkaufsstrategien etc.

- Vielen Frauen wird - z.B. von männlichen Anhängern archaisch ausgelegter Religionen - das Studium der Mathematik verboten, weil diese Männer Angst haben, die Frauen könnten dann zu schlau zum Gehorchen werden (wobei diese Befürchtung ja durchaus berechtigt ist). In der Mathematik hat nicht recht, wer älter ist oder lauter schreit. Insofern ist Mathematik zutiefst liberal und weltoffen. Alles wird begründet, bewiesen und auf Sinnhaftigkeit überprüft. Alternative Fakten, Schaumschlägerei oder Pseudowissenschaft haben dort keinen Platz. Ebenso ist Mathematik das inkludierendste und gender-freundlichste, was es auf der Welt gibt. Zumindest in *der* Lesart, dass für die Mathematik das Geschlecht einer Person völlig egal ist.

- Mathematisches Verständnis öffnet den Geist und die Seele. Es geht immer darum, etwas neues an sich heranzulassen und über sich hinaus zu wachsen. Anders lassen sich mathematische Zusammenhänge gar nicht verstehen. Das geht nur mit positiven Schwingungen.

- Hinter jedem Beweis kann sich eine neue Welt auftun. Und oft genug passiert das auch! Es sind Welten voller Licht und Harmonie - zumindest empfinden das viele Mathematiker so (mich eingeschlossen).

- In der Mathematik gibt es keinen Platz für Betrug, noch nicht einmal für den Selbstbetrug. Man kann sich nicht selbst darüber betrügen, ob man etwas verstanden hat oder nicht.

- Mathematik verbindet und fördert Freundschaften. Treffen sich zwei Mathematiker, reden sie nur über Mathematik - mit wachsender Begeisterung. Wenn Sie das mal beobachten, werden Sie feststellen, dass diese Menschen von jetzt auf gleich ganz anders werden - so wie eine Person, die plötzlich in ihrer Muttersprache sprechen darf. Fast schon überflüssig ist es, zu erwähnen, dass Mathematikern das Geschlecht, die Hautfarbe, die Herkunft, die Religion des anderen Mathematikers politisch-ideologisch völlig egal ist.

- Wenn man in Mathe etwas versteht, ist das ein Gefühl, was mit nichts auf dieser Welt vergleichbar ist. Mathe ist halt die Königsklasse. Wenn man das dann selber kann, ist einem die Anerkennung sicher. Ich erlebe das mit der Königsklasse jeden Tag.

Kapitel 15

Verständnis

Es gibt viele Beschreibungen des Verständnisses von Mathematik: Meistens geht es darum, auf die richtigen Lösungen der gestellten Aufgaben zu kommen, logische Zusammenhänge zwischen mathematischen Sachverhalten herstellen zu können und neue Informationen in Gelerntes integrieren zu können. Das ist zwar alles nicht falsch, trifft aber einen gewissen, entscheidenden Punkt nicht. Um diesen deutlich zu machen, sei ein Vergleich erlaubt: Was bedeutet es, Musik zu verstehen? Neben vielen üblichen und anerkannten Beschreibungen werden wir uns sicher auf eine Sache einigen können: Wir können Musik nur dann verstehen, wenn wir einen triftigen Grund haben, uns ernsthaft mit Musik zu beschäftigen. Das kann ein apodiktischer Zorn sein, den die Rolling Stones anfangs ihrer Karriere auf die Bühne brachten; das kann ein feingeistiges Riff sein wie es Sting in „The Shape of My Heart" hervorgebracht hat oder das kann ein disruptives Konzept sein, welches John Cage in „4'33" zu „Gehör" bringt.

Auch in der Mathematik gibt es viele unterschiedliche Anlässe, die Lust auf mehr machen. Allen gemein ist wohl: Wir haben uns angestrengt, haben etwas wirklich verstanden und sind in der Lage, das bewusst wahrzunehmen. Das ist der Moment, in dem wir zum ersten mal merken: „Das, was ich jetzt verstanden habe, war vorher nicht in meinem Leben. Und es ist wirklich toll, dass es da ist. Das möchte ich jetzt öfter haben!" Vielleicht sehen wir dabei die Harmonie der Zahlen, wie sie alle zusammenpassen und wie wir damit alle Rechnungen ausführen können. Oder wir sehen mathematische Konzepte wie Anteile, Symmetrien oder Funktionen, die wir vorher nicht sehen konnten. Oder wir sehen zum ersten Mal einen Beweis und merken sofort, dass wir ab jetzt in einer ganz anderen Liga spielen.

Leider gibt es Menschen, die in ihrer gesamten mathematischen Schullaufbahn niemals ein solches Erlebnis hatten. Das ist auch deshalb sehr schade, weil faktisch jeder Mensch im Mathe-Unterricht etwas versteht. Nur wird das vielen Schülern aufgrund der „spezifischen" Gegebenheiten unseres Bildungssystems gar nicht bewusst. Es bräuchte einen Moment des Innehaltens und der Rückschau, um zu bemerken, welche mathematischen Sachverhalte man z. B. vor zwei Wochen oder vor zwei Stunden noch gar nicht kannte. Einige Möglichkeiten, solche Momente zu schaffen, sind in den Abschnitten „Frageliste zum Verständnis“ und „Frageliste zum Lösen von Aufgaben“ besprochen.

15.1 Warum ist die Banane krumm?

Mit der ständig wiederholten Frage „Warum?“ fragen Kinder einem das sprichwörtliche Loch in den Bauch. Leider kommt diese Frage im Schulunterricht so gut wie gar nicht vor, obwohl es in der Mathematik nichts gibt, was nicht begründet ist. Das mag einer der Gründe dafür sein, warum viele Menschen Mathe nicht verstanden haben. Wenn Sie, lieber Leser, liebe Leserin, an Ihren Mathe-Unterricht zurückdenken: Wie oft ist Ihnen die Frage: „Warum ist das so?“ beantwortet worden? Die durchschnittliche Antwort - nach meiner persönlichen Erfahrung - ist: Niemals.

Wenn Schüler nach dem Warum fragen, fragen sie meist nicht nach dem formalen Beweis eines Lehrsatzes. Sie möchten mit der Antwort auf diese Frage die neuen mathematischen Objekte und Denkweisen zu ihrer eigenen Sache machen; sie möchten die Mathematik mit ihrem Denken, Fühlen und Handeln verbinden können. Und weil Menschen es normalerweise nicht mögen, für sie sinnlose Handlungen auszuführen, die andere Menschen ihnen vorschreiben, möchten Schüler von der Mathematik überzeugt werden; sie möchten vor sich selbst rechtfertigen können, Mathematik zu betreiben.

Fragen Schüler nach dem Warum, möchten sie meist auch nicht wissen, wie man eine Aufgabe rechnet. Die Fragen zielen meiner Erfahrung nach auf viel komplexere Zusammenhänge ab. Hier ist eine Liste von Fragen, die mir so oder so ähnlich von Schülern gestellt wurden. Manche dieser Fragen wurden mir nicht in dieser Formulierung gestellt und manche Formulierungen habe ich etwas zugespitzt, das ändert aber nichts an den Themen und Inhalten, nach denen gefragt wurde.

- Warum rechnen wir mit Buchstaben?
- Was bedeutet es, wenn eine Termumformung richtig ist und warum ist sie richtig?
- Warum können wir Gleichungen mit Äquivalenzumformungen lösen?
- Gibt es reinen Zufall?
- Was ist Wahrscheinlichkeit?
- Passiert wahrscheinliches häufiger als unwahrscheinliches?
- Wenn der Münzwurf ein Zufallsversuch ist und die Münze machen kann, was sie „will“, warum zeigt sie dann meist ungefähr zu 50 % „Kopf“ und ungefähr zu 50 % „Zahl“ an?
- Wenn wir in einer Stichprobe 100 Leute befragen und 60 % angeben, gerne Schokolade zu essen, was wissen wir dann über alle anderen Leute, die wir nicht gefragt haben? (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit)

- Ist etwas wahr, wenn es bewiesen ist?
- Sind die Beweismethoden bewiesen?
- Ist die Mathematik wahr?
- Ist die Welt mathematisch?
- Wenn Gott nett zu den Menschen gewesen wäre, hätte er dann nicht eine Welt ohne Mathematik gebaut?
- Warum kann man ein lineares Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen?
- Wenn wir die Nachkommastellen der Quadratwurzel von 2 nicht aufschreiben können, woher wissen wir dann, dass es diese Zahl gibt?
- Sind negative Zahlen eigentlich „richtige“ Zahlen?
- Warum gibt es genauso viele
  gerade Zahlen $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...\}$
  wie natürliche Zahlen $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$?
- Warum kann man die Kreiszahl π nicht genau bestimmen?
- Gibt es wirklich unendlich viele Zahlen?
- Wenn es unendlich viele Zahlen gibt, wie kann man dann wissen, dass etwas für alle Zahlen gilt? Man kann es ja nicht ausprobieren.
- Wenn etwas logisch ist, kann das dann unmöglich falsch sein?
- Kann Gott machen, dass $2+2=5$ ist?
- Wie rechnen Außerirdische?

Wenn man so will, stecken hinter diesen Fragen die ganz einfachen Kinderfragen: Warum ist das so? Warum machen wir das? Was soll das? Meiner Erfahrung nach gibt es kaum einen Schüler, der diese Fragen nicht beantwortet haben möchte.

Interessanterweise kennen Lehrer im Schuldienst, mit denen ich spreche, solche Fragen von Schülern oftmals gar nicht. Daraus schließe ich, dass Schüler in öffentlichen Schulen entweder keine oder andere Fragen stellen, als in meiner Mathematik-Schule.

Mathematik zu verstehen kann auch bedeuten, bestimmte Verfahren schnell und fehlerfrei ausführen zu können. Z. B. könnte man in der Lage sein, quadratische Gleichungen zu lösen - und zwar *alle* quadratischen Gleichungen. Das kann zu einem sehr befriedigenden Gefühl führen, was aber unsere heutigen Schüler immer weniger erleben dürfen. Es soll Mathematik ja nicht mehr gepaukt und es sollen keine Päckchen mehr gerechnet werden. Das führt aber auch dazu, dass Schüler niemals das Gefühl haben, ein Thema wirklich zu beherrschen.

Ich war einer der ersten in Deutschland, die einen Live-Stream zur Abiturvorbereitung angeboten haben. Eine lokale Zeitung berichtete darüber im Vorfeld. Da die Zuschauer live Fragen stellen konnten, wollte der Reporter wissen, ob ich nicht Angst davor hätte, Fragen nicht beantworten zu können. Ich sagte ihm, es sei für mich als Mathematiker ein Leichtes, alle denkbaren Fragen zur Schulmathematik zu beantworten. Daraufhin fragte er immer wieder, ob ich nicht doch Angst vor sehr intelligenten Schülern hätte, weil er einfach nicht verstehen konnte, dass man sein Fachgebiet beherrschen kann. Etwas wirklich zu beherrschen, ist eine Grunderfahrung, die man im Fach Mathematik machen kann. Man sollte eine solche Möglichkeit Schülern nicht vorenthalten. Das ist eine Erfahrung, die das Leben prägen kann, z. B., weil man dann keine Angst mehr vor Fragen oder „intelligenten" Menschen haben muss. Übrigens wird die ganze Diskussion um das in der Schule zu lernende Faktenwissen - welches man angeblich nicht brauche, weil man ja alles bei Wikipedia nachlesen könne - fast nur von Leuten geführt, die gar nicht wissen, was es bedeutet, ein Fachgebiet zu beherrschen.

15.2 Erklärungen

Um deutlich zu machen, wie unterschiedlich Erklärungen für unterschiedliche Menschen sein sollten, schauen wir uns eine grobe Einteilung der Problemlöse-Typen an:

1. Konkret-praktische Problemlöser: Diese Personen betrachten Probleme aus einer praktischen Perspektive und finden oft konkrete Lösungen für spezifische Probleme.

2. Konkret-theoretische Problemlöser: Diese Personen betrachten Probleme ebenfalls aus einer praktischen Perspektive, suchen aber auch nach einer theoretischen Grundlage für ihre Lösungen.

3. Abstrakt-praktische Problemlöser: Diese Personen kombinieren theoretische Überlegungen mit praktischen Anwendungen und suchen nach innovativen Lösungen für komplexe Probleme.

4. Abstrakt-theoretische Problemlöser: Diese Personen lösen Probleme auf theoretischer Basis und suchen nach allgemeinen Prinzipien, die auf verschiedene Probleme angewendet werden können.

Das, was Menschen unter Mathematik verstehen, hängt unter anderem vom Problemlöse-Typ ab. Das hat nichts mit dem zu tun, was mit einem Intelligenztest gemessen werden kann. Es gibt noch viele weitere unterschiedliche Einteilungen. Das heißt, schon das, was Menschen unter der Lösung eines Problems verstehen, ist sehr unterschiedlich. Damit also die Lösung einer quadratischen Gleichung einen Sinn ergibt, ist es für manche Menschen hilfreich zu wissen, welches konkrete Problem damit gelöst wird. Andere interessieren sich für die Anwendungen quadratischer Gleichungen auf Alltagssituationen im Allgemeinen oder sie stellen es sich als Funktionsgraphen im Koordinatensystem vor (z. B. als Nullstellen) oder sie möchten wissen, wie die einzelnen Umformungsschritte durchgeführt werden oder sie sehen in der Ergebnismenge das Resultat von Äquivalenzumformungen oder sie brauchen die Herleitung der p-q-Formel, um sich mit quadratischen Gleichungen wohl zu fühlen oder sie sehen die möglichen Schnittpunkte einer Normalparabel mit einer Geraden etc.

Diese verschiedenen Möglichkeiten, Lösungen quadratischer Gleichungen zu verstehen, sind weder besser noch schlechter als andere und sie sind schon gar kein Ausdruck von mehr oder weniger Mathe-Talent. Wird nun eine dieser Versionen aktuell im Unterricht besprochen, haben alle die Schüler, die eine andere Erklärung favorisieren, den Eindruck, es nicht so richtig zu verstehen und vielleicht auch nicht schlau genug für die Mathematik zu sein.

15.3 Begreifbare Mathematik

Die Mathematik bildet mit Symbolen und Formeln teile der Realität ab. Angefangen bei den natürlichen Zahlen bis hin zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lassen sich alle mathematischen Zusammenhänge an anfassbaren Modellen nachvollziehen. Nebenbei bemerkt stecken auch hinter vielen Objekten, Sätzen und Beweisen der Universitätsmathematik recht handfeste Ideen.

Leider wird Schulmathematik kaum an begreifbaren Modellen ausgeführt.

Das Rechnen mit Brüchen kann an Bruchstreifen geübt werden, auch das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen. Die Vorlagen dazu gibt es gratis im Internet. Man müsste sie nur noch ausdrucken und ausschneiden. Damit könnte man viele Menschen beim Verständnis des Rechnens mit Brüchen unterstützen.

Das Lösen von Gleichungen kann mit eine Balkenwaage geübt werden (die auch für negative Zahlen geeignet ist). Es reicht aber auch eine Wippe, die man schnell aus Alltagsgegenständen zusammenbauen kann. Mit zwei Wippen lassen sich sogar die Funktionsweisen der Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme handgreiflich nachvollziehen.

Mit Pizza oder einfach neutralen Kreissektoren können nicht nur die Divisionen durch Brüche, sondern auch antiproportionale Zuordnungen verstanden werden.

Das Galton-Brett kommt im Abschnitt „Unser Gespür für Wahrscheinlichkeiten“ zum Einsatz. Dabei geht es um den fundamentalen Zusammenhang zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. Außerdem lassen sich mit diesem Modell Binomialverteilungen gut nachvollziehen.

Das Verständnis, wie Statistik funktioniert, lässt sich mit Boxen mit roten und blauen Kugeln und mit ein paar Listen von Möglichkeiten aufbauen. Dabei geht es um das Problem, wie wir etwas über eine Grundgesamtheit wissen können, wenn wir aus dieser doch nur eine Stichprobe entnommen haben.

Es gibt noch sehr viele Modelle, an denen Mathematik buchstäblich begreifbar gemacht werden kann. Warum diese in der Schule nur in verschwindend geringem

Maß zum Einsatz kommen, hat im Wesentlichen immer den gleichen Grund: Mit solchen Modellen könnte man Mathematik tatsächlich verstehen - ein Verständnis, nach dem in den zentralen Prüfungen (Abschlussprüfung mittlerer Schulabschluss, Abitur) aber nicht gefragt wird.

Kapitel 16

Der Schlüssel zum Verständnis

16.1 Alles aufschreiben

Der Schlüssel zum Verständnis ist, aufzuschreiben, was man denkt. Auch wenn es sich banal anhört: Man eröffnet sich damit enorme Möglichkeiten!

Haben wir einen Text vor uns, den wir verstehen möchten, könnten wir Begriffe klären, alternative Formulierungen finden, Beispiele durchrechnen, vermeintliche Widersprüche benennen etc. Unser Arbeitsgedächtnis ist aber schnell überlastet, wenn wir alle diese Möglichkeiten im Kopf behalten wollen und gleichzeitig eine dieser Möglichkeiten ausführen möchten. Schreiben wir aber unsere Gedanken auf, können wir einen Schritt konkret ausführen, ohne alle anderen Möglichkeiten im Kopf behalten zu müssen. Wenn wir eine Möglichkeit nicht weiterverfolgen wollen, schreiben wir uns auf, warum das so ist, denn möglicherweise probieren wir noch andere Möglichkeiten aus, die ebenfalls nicht direkt zum Ziel führen und wir möchten die erste Möglichkeit neu bewerten. Dann ist es gut, wenn wir aufgeschrieben haben, warum wir an dieser Stelle nicht weitergedacht haben. Ansonsten müssten wir uns alles erneut überlegen.

Durch das Aufschreiben unserer Fragen und Gedankengänge machen wir erst das Erlernen einer systematischen Verständnisarbeit möglich. Erst so können wir Rückschau halten und aus dem lernen, was wir uns überlegt haben.

Gerade im Fach Mathematik ist die Gefahr groß, ins Grübeln zu geraten. Finden wir dann nicht schnell eine Lösung, wird die Lösungssuche zunehmend ineffektiver und am Ende stehen wir vielleicht mit gar nichts da. Wenn wir aber aufschreiben, was wir denken, haben wir immer und immer wieder ein Erfolgserlebnis, weil wir sehen können, was wir schon geleistet haben.

Zudem vergleichen wir uns so mit uns selbst und nicht mit anderen oder mit äußeren Anforderungen. Beispielsweise haben wir am Anfang unserer Überlegungen eine vage Vermutung, wie etwas zu verstehen sei. Durch weiteres Nachdenken kommen wir dann zu einer präziseren Formulierung und nach der Beschaffung einiger Informationen vielleicht zu einer noch genaueren Version unserer Vermutung. Unsere nächsten Schritte beziehen sich also immer auf das, was *wir* uns überlegt haben und nicht darauf, was *andere* können oder wollen.

Es kann immer mal passieren, dass wir ein Problem nicht klären können. Dann könnte es das Beste sein, die Sache beiseite zu legen und sich das Problem vielleicht am nächsten Tag nochmals vorzunehmen. Haben wir dann nicht aufgeschrieben, was genau wir uns überlegt haben, fangen wir am nächsten Tag wieder fast von vorne an. Auf der anderen Seite kann es sehr befriedigend sein, beim erneuten Durchlesen unserer Aufzeichnungen festzustellen, wie neu und frisch unsere Sichtweise jetzt ist. Wir bemerken dann auf jeden Fall, was wir alles gelernt haben.

Wenn wir jemanden um Rat fragen möchten, ist es sehr hilfreich, unsere Aufzeichnungen parat zu haben. Diesem Menschen müssen wir dann ja erst erklären, was genau wir nicht verstanden haben und was wir schon ausprobiert haben. Gerade wenn wir unseren Lehrer etwas fragen möchten, kann es von Vorteil sein, wenn wir auf dessen Frage: „Was genau hast du nicht verstanden?“ nicht mit „Alles!“ antworten müssen.

16.2 Vorbereitung

Die richtige Wahl der Informationsquelle kann einem viele Stunden sinnloser Arbeit und überflüssigen Frust ersparen!

Habe ich die Quelle meiner Information richtig gewählt? Lerne ich aus einem vertrauenswürdigen Fachbuch oder von einem YouTuber, der keine Ahnung hat? Oder suche ich Erklärungen, wo keine sind, z. B. in Schulbüchern?

Ist meine Informationsquelle vollständig? Möchte ich von einer Website lernen, die eigentlich eine Werbeseite ist und die - z. B. zur Suchmaschinenoptimierung - nur nebenbei in paar Informationen bereitstellt?

Gibt es einen größeren Zusammenhang, in dem die Information eingebettet ist? Ist es ein einzeln stehendes Informationshäppchen oder ist es in einem Kapitel eines Buches oder Teil einer Playlist?

Welche Motivation haben die Autoren? Geld verdienen? Ist das Video gemacht, um hohe Klickzahlen zu generieren? Sind Inhalte und Darstellung politisch motiviert wie z. B. teilweise in Schulbüchern?

Ist die Information didaktisch aufbereitet? Oder ist es ein Lexikon-Eintrag, der lediglich Fakten bereitstellen soll?

Welches Vorwissen muss ich mitbringen, um die vorhandene Information zu verstehen? Richtet sich der Text an Mathematiker? An Grundschüler?

Wie nah ist die Quelle der Information an dem dran, wofür ich das Verständnis primär verwenden möchte? Lerne ich genau das, was in der nächsten Klassenarbeit dran kommt? Hat mein Lehrer mir diese Quelle empfohlen? Sind es Abituraufgaben *meines* Bundeslandes der letzten Jahre?

16.3 Lernvoraussetzungen

Wenn ich einen Satz nicht verstehe: Ist dieser Satz Teil einer Erklärung, die man verstehen soll oder wird einfach nur ein Faktum genannt? Gerade Beweise, die für das Fachpublikum geschrieben sind, sind oft zwar formal richtig, aber auch möglichst kurz gehalten. Die Fragen, warum so und nicht anders bewiesen wird, was die Beweisidee ist oder wie man auf einen solchen Beweis kommt, wird dann im Beweis nicht beantwortet.

Welches Vorwissen habe ich? Welches Vorwissen brauche ich, um die Informationen zu verstehen? Wenn ich das Teilen von Brüchen verstehen möchte, könnte es von Vorteil sein, wenn ich nicht nur weiß, was ein Bruch ist, sondern auch sicher mit Brüchen umgehen, z. B. sie multiplizieren kann. Wenn ich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verstehen möchte, ist es wohl sinnvoll, wenn ich schon weiß, was Differentiale und was Integrale sind und diese auch hinreichend geübt habe.

Kenne ich alle Begriffe, die vorkommen? Kenne ich die Definitionen aller Begriffe? Habe ich alle Definitionen verstanden? Lerne ich aus einem Fachbuch, finde ich alle Fachbegriffe, die an einer bestimmten Stelle im Buch vorkommen, auf den vorherigen Seiten. Werden die Begriffe als Fachbegriffe oder umgangssprachlich verwendet? Z. B. haben die Wörter „Funktion“, „Menge“ oder auch „Theorie“ eine fachsprachliche wie auch umgangssprachliche Bedeutung.

Was habe ich bereits verstanden? Kann ich genau die Grenze zwischen dem, was mir bekannt und dem, was mir unbekannt ist, beschreiben?

Was ist das, was ich verstehen möchte? Ist das eine Definition? Ein Lehrsatz? Die Lösung einer Aufgabe? Möchte ich das Warum oder das Wie verstehen?

Wozu ist das, was ich lernen möchte, da? Ist das ein Teil einer Theorie? Kann man das anwenden? Ist das eine Folgerung? Ist das ein Beweis?

16.4 Der Verständnisprozess

- Was genau möchte ich verstehen?

- Was bedeutet es für mich, es zu verstehen? Dass ich Anwendungsaufgaben dazu lösen kann? Dass ich die Begründung nachvollziehen kann?

- Fehlt mir Information? Wo kann ich die Information beschaffen? Was genau müsste ich meinen Lehrer fragen, um die gewünschte Antwort zu bekommen? Kann ich meine Frage präziser stellen? Kann ich eine Ja-Nein-Frage daraus machen?

- Wenn alles keinen Sinn ergibt: Gibt es einen Teil, der Sinn ergibt? Wie müsste die Angelegenheit gestaltet sein, damit sie einen Sinn ergibt? Was fehlt mir? Der Zweck? Der Beweis? Der Zusammenhang? Die anschaulich-intuitive Begründung?

- Wenn ich einen (Lehr-)Satz verstehen möchte: Welche Frage möchte ich beantwortet haben? Suche ich ein Beispiel für die Anwendung eines Satzes? Suche ich die Bedeutung des Satzes? Suche ich den Bezug von Begriffen zueinander?
- Gibt es eine andere Formulierung des Satzes? Kann *ich* den Satz anders formulieren? Wenn ich den Satz anders formuliert habe: Kann ich noch eine zweite, dritte, ... Möglichkeit ausprobieren? Oder gibt es zu viele Möglichkeiten? Kann ich Teile des Satzes weglassen, damit die Bedeutung/ die zentrale Aussage deutlicher wird?
- Gibt es einen Spezialfall des Satzes?
- Was könnte mit dem Satz gemeint sein?
- Kann ich ein Beispiel durchrechnen? Kann ich das Beispiel überprüfen?
- Was kann/ könnte dieser Satz bedeuten? Kann ich eine Möglichkeit „durchspielen“? Wenn ich von einer bestimmten möglichen Bedeutung ausgehe: Ergibt dann alles weitere einen Sinn? Ergeben sich Widersprüche? Passt dann der Satz zu den Voraussetzungen?
- Kann ich die Aussage des Satzes intuitiv verstehen? Kann ich den Satz anschaulich verstehen?
- Warum ist der Satz so, wie er ist? Warum gilt der Satz?
- Was ist der Zweck des Satzes? Welchen Vorteil hat dieser Satz?
- Was genau habe ich nicht verstanden? Was ist genau der Punkt, an dem ich nicht weiter komme? Was genau heißt „weiterkommen“?
- Ist der Satz widersprüchlich? Sind die Konsequenzen unsinnig?
- Wenn der Satz so gemeint wäre, wie ich ihn verstehe: Was funktioniert dann nicht? Warum kann das nicht sein? Oder kann es doch sein? Was folgt daraus? Warum ist das, was da steht, völliger Quatsch? Warum kann das, was da steht, nicht sein?
- Was sind die Konsequenzen aus dem, was da steht? Sind die Konsequenzen unsinnig? Oder widersprüchlich?
- Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Satz? Sind die Folgerungen sinnvoll? Widersprechen die Folgerungen bekannten Fakten?
- Wenn ich die Schritte einer Rechnung oder die Schritte eines Beweises verstehen möchte:
- Habe ich den Anfang verstanden?
- Was genau habe ich verstanden?

- Kann ich den Anfang umgangssprachlich formulieren?
- Bis zu welcher Zeile ist mir alles klar? Was verstehe ich, was ist unzweifelhaft?
- Was verstehe ich nicht am Schritt zur nächsten Zeile?
- Wenn ich wissen möchte, ob eine Aussage *immer* gilt: Kann ich zeigen, dass die Aussage manchmal gilt? Habe ich wenigstens ein einziges Beispiel? Kann ich ein Beispiel/ einen Zusammenhang finden, in dem die Aussage nicht gilt?

16.5 Rückschau

Nachdem der Text verstanden wurde, muss unbedingt die Reflexion erfolgen! Hier ist der ganz entscheidende Punkt! Durch die Reflexion wird das meiste gelernt.

- Was genau weiß ich jetzt, was ich vorher nicht wusste?
- Welche der Fragen hat mir weitergeholfen, welche nicht? Warum bzw. warum nicht?
- Habe ich etwas übersehen?
- Warum kann ich es jetzt verstehen und vorher nicht? Was war das Problem?
- Würde ich beim nächsten Mal etwas anders machen? Würde ich andere Fragen stellen?

Kapitel 17

Aufgaben lösen

John Hattie[1] spricht von vier Phasen des Problemlösens: „predicting, clarifying, solving, and summarizing.“ Zu deutsch also vorhersagen, klären, lösen und zusammenfassen. Zunächst werden die Angaben in der Aufgabenstellung mit dem eigenen mathematischen Wissen verglichen. Dann versucht man vorherzusagen, was in der Aufgabe passiert und welche mathematischen Inhalte nötig sind, um sie zu lösen. Anschließend wird genau geklärt, ob alle Wörter, die in der Aufgabenstellung vorkommen, bekannt sind, welche Informationen die Aufgabe bereitstellt und welche Informationen für die Lösung noch zu beschaffen sind. Danach wird die Aufgabe gelöst. In der letzten Phase wird nicht nur die bisherige Arbeit zusammengefasst, sondern sie dient vor allem der Selbstreflexion. Dabei fragt man sich, wie effektiv die eigene Lösungsstrategie war und ob es vielleicht noch eine bessere gibt. Während der gesamten Bearbeitung der Aufgabe wird aufgeschrieben, was man denkt.

Interessanterweise habe ich noch keinen einzigen Schüler getroffen, der eine solche Lösungsstrategie kennt, geschweige denn anwenden kann. Wenn es in der Schule doch so sehr um das Lösen von Aufgaben geht, warum weiß dann kein Schüler, nach welcher Methode er vorgehen sollte?

Mit der folgenden Frageliste lässt sich eine Strategie zum Lösen von Aufgaben aufbauen. Es gibt viele Autoren, die ähnliche Listen veröffentlicht haben. Namentlich genannt sei György Pólya, der mit seinem Buch „How to solve it“[2] Pionierarbeit geleistet hat.

17.1 1) Die Aufgabe verstehen

Was ist bekannt? Was ist gesucht?

Sind die Angaben in der Aufgabenstellung hinreichend, um die Aufgabe zu lösen? Oder sind die Angaben nicht ausreichend? Oder sind sie widersprüchlich? Gibt

[1] John Hattie, Douglas Fisher, Nancy Frey, Visible Learning for Mathematics, Corwin, Thousand Oaks, California, 2017

[2] Pólya, György, How to solve it, Princeton, Princeton University Press, 1945, deutsche Übersetzung: Pólya, György, Schule des Denkens, Tübingen, Narr Francke Attempto Verlag, Sonderausgabe der 4. Auflage, 2010

es Informationen in der Aufgabenstellung, die zur Lösung der Aufgabe nicht gebraucht werden?

Kann ich eine Skizze anfertigen? Kann ich alle Teile der Skizze benennen?

17.2 2) Einen Plan erstellen

Es ist an dieser Stelle sehr wichtig, die Lösung der Aufgabe tatsächlich nur zu planen und nicht schon die Aufgabe zu lösen! Die Planung der Lösung macht es möglich, dass ich mir über meine Lösungsmethode klar werde und eben nicht einfach eingeübte Schemata abspule.

Habe ich eine solche Aufgabe schon einmal gesehen? Welche ähnlichen Aufgaben kann ich lösen? Was ist in dieser Aufgabe anders? Habe ich mehr oder weniger Informationen? Brauche ich eine andere Formel? Welche Formeln zu diesem Thema kenne ich? Kann ich diese Formeln verwenden? Wenn nein: Warum nicht?

Zu welchem Thema gehört die Aufgabe? Stelle ich z. B. fest, dass die vorliegende Textaufgabe zum Thema „quadratische Gleichungen“ gehört, könnte ich im Text gezielt nach Zusammenhängen suchen, die sich mit einer quadratischen Gleichung beschreiben lassen. Welche Aufgaben zu diesem Thema habe ich schon gelöst? Kenne ich alle Formeln und Sätze zu diesem Thema, die für die Aufgabe hilfreich sein könnten?

Kann ich eine einfachere Aufgabe lösen? Kann ich die Aufgabe mit einfacheren Zahlen lösen? Wird die Aufgabe einfacher, wenn ich etwas weglasse oder etwas hinzufüge? Kann ich den Aufgabentext einfacher formulieren?

Welche Teile der Aufgabe sind unproblematisch? Welche sind problematisch? Könnte ich die ersten Schritte der Lösung durchführen? Oder ist der Anfang problematisch?

Habe ich alle Angaben aus der Aufgabenstellung verwendet? Habe ich alle Teile der Aufgabenstellung verstanden und verwendet?

Wenn es Schwierigkeiten gibt: Woran liegt das genau? Was ist genau der Punkt, der Schwierigkeiten bereitet? Ist das eine Standardaufgabe oder brauche ich tatsächlich eine neue Idee? Ist die Mathematik, die ich bisher kann, zur Lösung der Aufgabe ausreichend? Brauche ich mehr Informationen?

Die Aufgabe von der Lösung her denken: Was bräuchte ich, um den letzten Teil des Plans ausführen zu können? Was ist der letzte/ vorletzte Lösungsschritt? Z. B. könnte der vorletzte Lösungsschritt das Aufstellen einer Gleichung mit der gesuchten Unbekannten sein, weil danach der letzte Lösungsschritt, nämlich die Bestimmung der Lösungsmenge dieser Gleichung, keine Mühe mehr bereitet.

17.3 3) Durchführung des Plans

Kann ich jeden Schritt der Durchführung kontrollieren? Kann ich eine Überschlagsrechnung durchführen? Wie müsste die richtige Lösung aussehen? Welche Größenordnung müsste das Ergebnis haben? Könnte ich irgendwo Flüchtigkeitsfehler gemacht haben? Habe ich alle Lösungsschritte deutlich genug aufgeschrieben?

17.4 4) Rückblick

Ergibt das Ergebnis einen Sinn? Kann ich intuitiv verstehen, dass mein Ergebnis richtig sein muss?

Was habe ich gelernt? Gab es etwas Neues, mit dem ich eine Schwierigkeit überwunden habe? Warum bin ich nicht sofort auf den Lösungsplan gekommen? Woran musste ich arbeiten? Welche Informationen musste ich beschaffen? Wie genau habe ich es geschafft, auf die Lösung zu kommen? Was war der entscheidende Punkt?

Kann ich das Gelernte für weitere Aufgaben gebrauchen? Für welche Klasse von Aufgaben kann ich das Gelernte verwenden? Gibt es eine Verallgemeinerung der Lösung? Kann ich die Lösung in einfachen Worten zusammenfassen? Wie wichtig war diese Aufgabe für die Entwicklung meines individuellen Verständnisses von Mathematik?

Durch diese Frageliste lernt man eine mathematisch-wissenschaftliche Denkweise. Selbst wenn man nur aufschreibt, was man nicht verstanden hat, hat man also etwas gelernt.

Wenn man nicht weiterkommt: Das Problem beschreiben. Unbedingt aufschreiben, was man denkt. Oftmals klärt sich das Problem schon dadurch, dass man aufschreibt, was das Problem ist. Das Aufschreiben ist aus mehreren Gründen wichtig. Einmal, wie oben erwähnt kann sich ein Problem schon durch das Aufschreiben klären. Ein zweiter Grund ist: Man kommt oft nicht weiter, weil man etwas - eine Information, eine Eigenschaft, etc. - nicht berücksichtigt. Es kann dann helfen, das Problem beiseite zu legen. Schaut man dann nach eine Weile wieder darauf, kann einem sofort auffallen, was man nicht berücksichtigt hat. Das geht aber nur, wenn man seine Gedankengänge aufgeschrieben hat. Wenn man sich das Problem wieder von vorne erarbeiten muss, kann sich leicht derselbe Fehler einschleichen.

Ein weiterer Grund: Im Laufe der Suche nach einer Lösung kommt man immer wieder an Punkte, von denen aus man mehrere Möglichkeiten hat, weiterzuarbeiten. Wenn man sich nicht genau aufschreibt, an welchem Punkt man ist, welche Möglichkeiten man sieht und welche der Möglichkeiten man jetzt ausprobieren möchte, verliert man schnell den Überblick. Irgendwann ist der Arbeitsspeicher im Kopf voll und man legt die Aufgabe genervt weg.

Und noch ein Grund: Schreibt man auf, was man denkt, was man ausprobiert etc. schafft man immer etwas; man produziert etwas. Die Situation, einfach vor einem leeren Blatt oder Bildschirm zu sitzen und sich gedanklich mit dem Problem zu plagen, ohne etwas zustande zu bringen, kann dann nicht mehr passieren. In der Wissenschaft kann man teilweise über Jahre hinweg ein Problem nicht lösen. Aber man probiert natürlich Lösungsmöglichkeiten aus und dokumentiert die Ergebnisse. Zu wissen, wie es nicht funktioniert oder Lösungsmöglichkeiten auszuschließen, kann ein wichtiger wissenschaftlicher Fortschritt sein.

Um diese ganzen Fragen einmal zusammenzufassen: Gedankengänge aufschreiben, etwas ausprobieren, rekapitulieren, was man gelernt hat. Das sind die wichtigsten Komponenten, mit denen man durch die Bearbeitung von Aufgaben sein individuelles Verständnis aufbauen kann.

Kapitel 18

Mathematik individuell gestalten

Wie schon im Vorwort erwähnt, besteht die deutsche Sprache nicht nur aus Wörtern und Grammatik, sondern auch aus dem, was wir alle aus dieser Sprache machen, indem wir sie verstehen oder auf deutsch schreiben oder sprechen. Wir alle gestalten diese Sprache.

Ebenso verhält es sich mit der Mathematik: Wir alle gestalten sie mit, unabhängig davon, ob wir mathe-begeistert sind oder solchen Unsinn verbreiten wie „Mathe braucht man nicht“. Leider kommt die individuelle Gestaltung von Mathematik im Schulunterricht so gut wie gar nicht vor.

Verständnis ist immer ein sehr individueller Vorgang. Das ist bekannt und unstrittig. Jeder Schüler muss für sich das eigene Verständnis gestalten. Lehrer sollten diesen Prozess persönlich begleiten und fachlich unterstützen.

Die tägliche Verständnis-entwickelnde Arbeit aus Sicht des Schülers ist das notieren der eigenen Gedankengänge beim Verstehensprozess mathematischer Zusammenhänge oder beim Lösen von Problemen und Aufgaben. Dazu kann man sich Fragen aus den oben angegebenen Fragelisten zum Verständnis bzw. zum Lösen von Aufgaben nebst deren Antworten aufschreiben. Außerdem hält man fest, wie man weiter vorgehen möchte, warum etwas nicht zum Ziel führt etc.

Im Folgenden wird systematisiert und konkretisiert, wie Schüler Mathematik individuell gestalten können.

Schüler gestalten Mathematik selbst, indem sie

- mathematische Gegebenheiten für sich persönlich einordnen,
- individuelle Repräsentationen mathematischer Objekte und Zusammenhänge entwerfen,
- Begründungen mathematischer Zusammenhänge werten und/ oder favorisieren,
- Definitionen, Zusammenhänge, Formeln, Sätze, Erklärungen, Begründungen und Beweise selbst erfinden,

- Mathematik, die ihnen im Alltag begegnet (Zahlenangaben wie z. B. das Bruttoinlandsprodukt oder der CT-Wert (der angibt, wie ansteckend man ist), Statistiken, Studien, auf mathematischen Simulationen basierende Prognosen wie z. B. alle Klimaprognosen, etc.) verstehen und sachgerechte Konsequenzen daraus ziehen,
- mathematische Intuition aufbauen und
- Mathematik nutzen, um die eigene Lebenswirklichkeit zu verändern.

Schauen wir uns einige Punkte etwas genauer und an konkreten Beispielen an. Triggerwarnung: Für manche Menschen mag es sehr ungewöhnlich erscheinen, zu ein und demselben mathematischen Gesetz verschiedene Auffassungen haben zu können. Teilweise schließen sich diese Auffassungen sogar gegenseitig aus, obwohl sie im Prinzip alle richtig sind. Das könnte Unwohlsein und eine kognitive Dissonanz hervorrufen.

18.0.1 Mathematische Gegebenheiten einordnen

Eines der ersten mathematischen Gesetze, die junge Menschen in der Schule kennen lernen, ist das Kommutativgesetz der Addition. Es lautet:

$$a+b=b+a$$

Das persönliche Einordnen ist letztlich die Antwort auf die Frage: Was soll das? Hier sind ein paar mögliche Antworten:

- Das Gesetz besagt nur das, was seit der Grundschule ohnehin bekannt ist, nämlich dass die Reihenfolge beim Addieren keine Rolle spielt.
- Um nicht von der „einen Zahl“ und von der „anderen Zahl“ sprechen zu müssen, wenn eine solche Gesetzmäßigkeit formuliert werden soll, verwendet man Variablen. Damit kann man sich klar und verständlich ausdrücken. Und spätestens wenn mehr als zwei Zahlen an Gesetzmäßigkeiten beteiligt sind, braucht man sowieso andere Formen der Beschreibung als die Umgangssprache bereitstellt.
- Zwar entspricht es unserer Rechenerfahrung, dass die Reihenfolge beim Addieren zweier Zahlen für der Ergebnis keine Rolle spielt, aber in der Formulierung als Gleichung mit Variablen wissen wir nun viel genauer, was uns aus Erfahrung klar war.
- Ob wir nun erst zwei Schritte und dann drei Schritte gehen oder umgekehrt: Wir kommen immer an demselben Punkt an. Das Gesetz beschreibt also einen Teil unserer Alltagserfahrung.
- Was war zuerst da: Die Henne oder das Ei? Ist das Gesetz eine Folge davon, wie Zahlen sind oder sind Zahlen so gebaut worden, dass man mit ihnen auf diese Weise rechnen kann?

- Wie jedes mathematische Gesetz ist auch dieses eine Aussage über die mögliche Zukunft: Wenn wir in Zukunft 767 211 und 51 331 addieren, wird das gleiche Ergebnis herauskommen wie bei der Addition von 51 331 und 767 211. Insofern können wir mit diesem Gesetz in die Zukunft sehen.

- Das Gesetz gilt nicht nur für natürliche Zahlen, sondern auch für alle positiven reellen Zahlen.[1] Stellt man sich diese Zahlen als Papierstreifen vor, besagt das Gesetz nicht mehr als dass beim Hintereinanderlegen von Papierstreifen die Gesamtlänge unabhängig von der Reihenfolge der Streifen ist.

- Man kann die Variablen nicht nur durch Zahlen, sondern auch durch ganze Terme ersetzen. Dadurch erhält man (tatsächlich) unendlich viele weitere nützliche Rechengesetze. Das zeigt, wie genial das Konzept der Formulierung von Rechengesetzen durch Variablen und Gleichungen ist.

- Das Kommutativgesetz der Addition ist eigentlich gar kein Gesetz, denn es ist als ein Axiom der reellen Zahlen Teil des axiomatischen Aufbaus (unter anderem) der Analysis.

Wir wir sehen, lässt sich sogar so ein einfaches Gesetz wie das Kommutativgesetz der Addition aus vielen verschiedenen Perspektiven betrachten und einordnen. Von diesen Perspektiven ist keine richtiger oder falscher als die andere. Kein Mensch kommt umhin, das Kommutativgesetz der Addition für sich persönlich einzuordnen, sei es nun bewusst oder unbewusst. Der Mathematikunterricht sollte meiner Meinung nach dazu genutzt werden, solche verschiedenen Perspektiven aufzuzeigen, damit Schüler diesen Entscheidungsprozess bewusst durchführen können.

18.0.2 Mathematische Objekte darstellen: Prozente

Jeder Mensch stellt sich unter dem Begriff „Prozente“ etwas vor. Dargestellt sind hier einige dieser möglichen Repräsentationen. Alle Darstellungen haben ihre Vor- und Nachteile. Jeder Mensch kann entscheiden, welche der Möglichkeiten für ihn am besten passt.

Teilt man einen Streifen in 100 Teile, hat man eine Darstellung von Prozenten, weil Prozente Hundertstel sind.

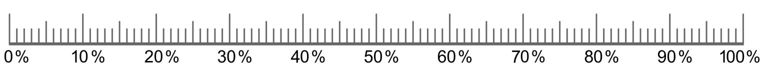


Abb. 18.1 Prozentstreifen

Brüche stellt man sich oft als Kreissektoren oder Stücke einer runden Pizza vor. Und so kann man sich auch Hundertstel vorstellen.

[1]Es gilt auch für negative Zahlen, was aber im Moment nicht betrachtet werden soll.

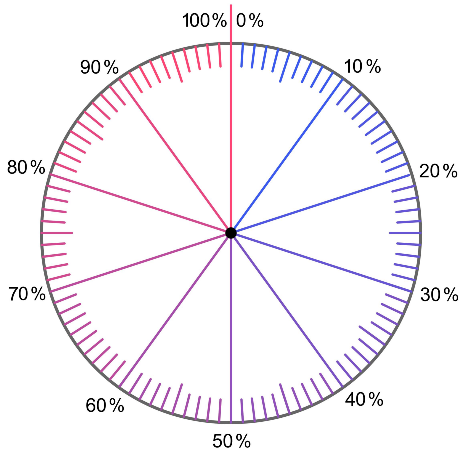


Abb. 18.2 Prozentrad

Markiert man z. B. jedes dritte oder jedes vierte Individuum einer Menge, kann das eine passende Darstellung bestimmter Prozentzahlen sein. Dadurch, dass sich die Objekte hier in einer Reihe befinden, wird auch eine zeitliche Dimension und damit eine Möglichkeit nahe gelegt, Prozente zu hören.

Abb. 18.3 Jede dritte Person, entspricht $33,\bar{3}$ %

Abb. 18.4 Jede vierte Person, entspricht 25 %

Gerade für „kleinere" Prozentzahlen kann diese Form der Darstellung sehr intuitiv sein.

Abb. 18.5 10 %

Abb. 18.6 6,25 %

Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten, Prozente darzustellen. Schüler haben normalerweise keine Schwierigkeiten damit, eigene und individuell passende Darstellungen zu finden.

Nebenbei bemerkt ist der Vergleich von verschiedenen und individuell unterschiedlich passenden Darstellung von Prozenten ein guter Grund dafür, Mathematik im Klassenverband zu unterrichten. Wenn jeder Schüler berichten kann, was für ihn persönlich die beste Darstellungsweise ist, kann das nicht falsch sein. Niemand muss Angst haben, vor der Klasse bloßgestellt zu werden. Darüber hinaus lernt jeder Schüler die Sichtweisen anderer kennen und somit die eigene Sichtweise relativieren. Es ist sehr wichtig für junge Menschen zu erkennen, dass nicht nur die eigene Sichtweise die allein selig machende ist.

18.0.3 Sich für Begründungen entscheiden

Es gibt für jeden mathematischen Zusammenhang und für jede Formel und für jeden Satz eine ganze Reihe von Begründungen. Mathematik individuell zu gestalten bedeutet auch, verschiedene Begründungen zu verstehen und zu bewerten.

Die unterschiedlichen Begründungen kommen auch durch die unterschiedlichen Sichtweisen dessen, was überhaupt zu begründen ist, zustande: Folgt ein mathematischer Satz aus anderen Sätzen oder wird ein ganz neuer Zusammenhang beschrieben? Gibt es eine anschauliche Begründung, eine intuitive, eine formale? Ist das Satz auf genügend viele Beispiele und Objekte anwendbar? Welche Voraussagen macht der Satz? Sind die Ergebnisse der Voraussagen überprüfbar? Welchen Vorteil bringt dieser Satz? Ist der Satz sinnvoll? Warum kommt dieser Satz in der Schulmathematik vor? Ist der Satz wichtig? Warum wird der Satz so formuliert und nicht anders? Oder gibt es eine andere Formulierung? Eine allgemeinere? Eine exaktere? Eine umgangsprachlichere? Gibt es eine simple mathematische Idee hinter diesem Satz? Ist der Satz ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes oder einer Theorie? Und überhaupt: Ist das überhaupt ein Satz oder ist das eine Definition?

Solche verschiedenen Begründungsmöglichkeiten lassen sich auch an den oben erwähnten verschiedenen Sichtweisen des Kommutativgesetzes der Addition durchexerzieren. Jede der erwähnten Sichtweisen erfordert eine spezifische Begründung. Beim letzten Punkt (das Kommutativgesetz der Addition als Teil eines Axiomsystems) müsste man z. B. begründen, inwieweit man die Vertauschbarkeit von Summanden für reelle Zahlen einfach so festlegen kann. Müsste nicht umgekehrt die Vertauschbarkeit der Summanden aus den Eigenschaften der reellen Zahlen folgen?

18.0.4 Zahlen in Formeln einsetzen, z. B.: Distributivgesetz

Aus Sicht viele Schüler und Lehrer gibt es kaum etwas langweiligeres auf der Welt als Zahlen in Formeln einzusetzen. Dennoch entsteht durch jedes Einsetzen von Zahlen eine neue Gleichung, die die meisten Schüler noch nie in ihrem Leben gesehen haben. Schüler müssen eine solche neue Gleichung für sich einordnen und werten. Auch das ist wiederum ein individueller Prozess, der zur Gestaltung der Mathematik dazugehört.

Schauen wir uns ein paar Möglichkeiten am sehr einfachen Beispiel des Distributivgesetzes an.

Das Distributivgesetz lautet:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Man kann in das Distributivgesetz verschiedene Zahlen einsetzen. Fangen wir doch mal mit ganz einfachen Zahlen an:

$$1 \cdot (2 + 3) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3$$

Und schon gehen die Meinungen auseinander: Die einen freuen sich darüber, dass alles geklappt hat, die anderen meinen, die Zahl 1 sei an dieser Stelle „unsinnig", weil sich ja durch die Multiplikation mit 1 nichts ändert. Wir könnten auch versuchen, noch „unsinnigere" Zahlen einzusetzen wie z. B.:

$$1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \quad \text{oder} \quad 0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

Auch diese Rechnungen empfinden Menschen sehr unterschiedlich: Manche sehen hier sehr einfache Rechnungen, die durch das Distributivgesetz aufgebläht werden, andere sehen darin eine Bestätigung, dass es eben keine „unsinnigen" Zahlen gibt, weil das Distributivgesetz für alle Zahlen gilt. Noch mehr zu denken gibt es, wenn negative Zahlen eingesetzt werden

$$-3 \cdot (-2 + 4) = -3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4$$

oder man für die Variablen a, b und c ganze Terme einsetzt:

$$(n - m) \cdot (n^2 - (m - n)) = (n - m) \cdot n^2 - (n - m)(m - n)$$

Hier ist a durch $(n - m)$, b durch n^2 und c durch $(m - n)$ ersetzt worden.

Setzen wir in das Distributivgesetz negative Zahlen ein, ergeben sich mehrere Fragen: Da wir in der Rechnung $-3 \cdot (-2)$ offenbar eine zusätzliche Klammer brauchen: Brauchen wir sonst noch etwas, was in der Ursprungsversion des Distributivgesetzes nicht steht? Außerdem müssen wir für diese Rechnung wissen, das Minus mal Minus gleich Plus ist. Ist das so festgelegt, damit das Distributivgesetz gilt oder haben Zahlen sowieso diese Eigenschaft und gilt deshalb das Distributivgesetz? Gibt es anschauliche Modelle, mit denen man sich das Distributivgesetz mit negativen Zahlen vorstellen kann? Sind diese Modelle genauso sinnvoll wie die Modelle, die nur für positive Zahlen gelten? Gibt es Anwendungen, die die Verwendung negativer Zahlen notwendig machen?

Setzen wir Terme in das Distributivgesetz ein, ergeben sich Fragen von „Wo ist das Plus-Zeichen geblieben?" bis hin zu „Ist die Mächtigkeit der Menge der durch das Einsetzen von Termen in das Distributivgesetz entstehenden Formeln noch abzählbar oder schon überabzählbar?" (womit wir dann eindeutig den Bereich der Schulmathematik verlassen haben).

Wie wir sehen, gibt es selbst bei einem solch trivialen Vorgang wie dem einfachen Einsetzen von Zahlen oder Termen in ein sehr einfaches Gesetz einen riesigen Gestaltungsspielraum für jeden einzelnen Menschen. Dieser Spielraum ist sogar so groß, dass er niemals erschöpfend im Schulunterricht behandelt werden kann. Trotzdem ist es wichtig, Schüler darüber zu informieren, denn dann können sie entscheiden, wie sie damit umgehen wollen. Und selbst wenn sich ein Schüler dazu entscheiden sollte, alle Verständnisfragen und alle Gestaltungsspielräume zu ignorieren, so ist es dann immerhin dessen bewusste Entscheidung, die aber dann auf einer ganz anderen Ebene stattfindet als dem einfachen nachmachen dessen, was der Lehrer vorgemacht hat.

Schauen wir uns gleich noch eine weitere sehr einfache Formel an, in die wir Zahlen einsetzen können.

18.0.5 Zahlen in Formeln einsetzen, z. B.: Prozentformel

Haben Schüler gelernt, was Prozente sind und haben sie schon eine Weile damit gerechnet, wird ihnen meist diese Formel präsentiert:

$$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert} \to p = \frac{W}{G}$$

Wir können uns fragen: Welche Zahlen kann man für W und G einsetzen? Gibt es Zahlen, die besonders einfach sind? Gibt es welche, die schwieriger sind? Warum? Man könnte z. B. anfangen mit

$$\frac{W}{G} \mathrel{\widehat{=}} \frac{25}{50} = 0,50 = 50\%$$

Das war unproblematisch? Warum? Gibt es problematische Zahlen? Kann z. B. der Prozentwert größer sein als der Grundwert? Ist das, was dann dabei herauskommt, immer noch ein Anteil? Kann ein Prozentwert gegenüber dem Grundwert um mehr als 100 % abnehmen? Wie kommt eine 1000 %-ige Inflation zustande?

Die individuelle Gestaltung von Mathematik ist keine Phantasievorstellung unausgelasteter Mathematiker, sondern sie findet täglich statt, weil Schüler den Lehrstoff für sich persönlich verarbeiten müssen. Wir Lehrer haben die Möglichkeit, diese Prozesse menschlich und fachlich zu initiieren, zu befördern und zu begleiten - oder eben unsere Schüler sich selbst zu überlassen. Aber das kann ja sicher nicht die Aufgabe von Schule sein.

18.0.6 Neue Formeln erstellen

Können Schüler tatsächlich neue Formeln und mathematische Sätze erfinden? Ja klar, jedesmal, wenn sie in einer gültigen Formel die Variablen durch Terme ersetzen, entstehen neue Formeln. Möglicherweise sind diese Formeln für die Fachwelt nicht besonders bedeutsam, aber das ist nicht der Punkt. Wenn Schüler Zahlen und

Terme in Formeln einsetzen, wenn sie sich Anwendungen, Begründungen und Veranschaulichungen zu den Formeln überlegen, können sie Formeln für sich entdecken, wobei immer wieder neue und individuelle mathematische Zusammenhänge entstehen. Sie bekommen so ein gutes Gefühl für die Formel und stellen fest, was sie daran interessiert und was nicht. Wenn sie dann ihre Erarbeitung mit denen anderer Schüler vergleichen, werden sie feststellen, wie unterschiedlich vordergründig schnöde Formeln von anderen Schülern wahrgenommen werden.

Sobald man nicht nur zufällig Zahlen in eine Formel einsetzt, sondern bestimmte Interessen und Fragestellungen verfolgt, kommt man sehr schnell zu mathematischen Aussagen, die - soweit bekannt - noch niemand vorher formuliert hat. Schauen wir uns dazu ein paar Möglichkeiten an, was man mit dem Distributivgesetz machen kann.

- Wenn man in das Distributivgesetz für a, b und c nur Quadratzahlen einsetzt, können dann wieder Quadratzahlen herauskommen? Wie sieht das mit Kubikzahlen aus?
- Wenn alle eingesetzten Zahlen gerade sind, ist dann das Ergebnis auch gerade? Oder müssen gar nicht alle Zahlen gerade sein, damit das Ergebnis gerade ist?
- Gibt es vielleicht Eigenschaften, die die Zahl, die man für a einsetzt, dem Ergebnis aufprägt?
- Wenn man zwei der Variablen „festhält“ und für die andere verschiedene Zahlen einsetzt, kann man eine Seite des Distributivgesetzes als Funktionsterm verstehen. Kann man dem Graphen dann ansehen, dass der Funktionsterm ein Teil des Distributivgesetzes ist?
- Wie kann man überhaupt Graphen von Funktionen deren Funktionsterm ansehen?
- Auch zwei- und dreidimensionale Funktionen lassen sich aus dem Distributivgesetz erstellen. Haben die Graphen dann irgendwelche interessanten Eigenschaften? Wenn ja: Warum? Wenn nein: Warum nicht?
- Wenn das Ergebnis der Klammer kleiner ist als die Zahl, die man für a einsetzt, was bedeutet das dann für das Ergebnis? Bedeutet das überhaupt etwas?
- Wenn die Zahlen für a immer kleiner werden und die Zahlen für $(b+c)$ immer größer werden, was bedeutet das dann für das Ergebnis? Kommt dann irgendwann 0 heraus?
- Was passiert, wenn man eine oder mehrere Variablen des Distributivgesetzes durch eine Seite des Distributivgesetzes ersetzt - man quasi das Distributivgesetz auf sich selbst anwendet? Ergibt sich irgendeine Systematik?
- Oder man setzt für a und c Zahlen ein und für b setzt man den Term ein, der durch das Einsetzen von Zahlen für a und c entstanden ist. Dann kann man zwar

immer noch nichts ausrechnen, aber vielleicht geht das, wenn man diesen Vorgang beliebig oft wiederholt. Möglicherweise ist das b dann so verschachtelt, dass es auf das Ergebnis einen nur noch sehr geringen Einfluss hat.

- Wie müsste man rechnen, wenn Minus mal Minus nicht gleich Plus ist? Könnte man eine Mathematik erfinden, in der das sinnvoll ist?
- Was würde passieren, wenn man Minus-mal-Minus verbieten würde? Hätten wir dann immer noch eine funktionierende Mathematik?
- Wenn doch im axiomatischen Aufbau der Mathematik das Distributivgesetz ein Axiom ist, könnte man es weglassen und alle anderen Axiome beibehalten. Ergibt sich dann noch eine sinnvolle Mathematik?
- Gibt es Objekte, mit denen man rechnen kann, für die aber das Distributivgesetz nicht gilt? Gilt dann eine Alternative?
- Man könnte für alle Variablen oder auch nur einen Teil der Variablen etwas anderes einsetzen als Zahlen, z. B. Funktionen, Winkel, Uhrzeiten, Quader, Wahrscheinlichkeiten, Algebren etc. Wie kann man mit solchen Objekten rechnen?

18.0.7 Mathematik in Prüfungen gestalten: Aufsätze

Man kann im Fach Mathematik genauso wie im Fach Deutsch in Prüfungen Aufsätze schreiben lassen: über das Distributivgesetz, über quadratische Funktionen, über Ableitungen etc. Dabei gibt es so viele Aspekte zu berücksichtigen, dass wohl keine zwei Aufsätze genau gleich sein werden. Das sind Aufgaben, deren Lösungen weder richtig noch falsch sein können und damit keine Mathe-Angst erzeugen.

Wenn das Verständnis von Mathematik eine höchst individuelle Angelegenheit ist, dann können wir dieses Verständnis auch in einer Klassenarbeit abfragen. Schüler können in einer Klassenarbeit schreiben, wie sie einen mathematischen Lehrsatz verstehen, wie sie ihn sich vorstellen, welche Begründung für sie die stimmigste ist, was sie damit erlebt haben, worauf sie ihn angewendet haben, was funktioniert hat und was nicht, was sie überrascht hat, was sie ausprobiert haben, warum dieser Satz für sie sinnvoll ist (oder vielleicht auch nicht), welche abstrakte Idee sie hinter dem Satz sehen, in welchen größeren Zusammenhang der Satz für sie eingebettet ist etc.

Die Gefahr, dass Schüler sich im Vorhinein einen Aufsatz von anderen schreiben lassen, diesen auswendig lernen und sich so für die Klassenarbeit einen unlauteren Vorteil verschaffen, ist extrem gering. Denn erstens wollen solche Schüler, die einen Betrug in Betracht ziehen, um gute Noten zu erreichen, sich nicht die Arbeit machen, einen ganzen Aufsatz auswendig zu lernen. Zweitens werden sicher - wie bei Aufsätzen in anderen Fächern auch - Individualität und Originalität gewertet werden. Wenn in der Klassenarbeit dann verwegene mathematische Ideen nur so sprudeln, der Lehrer von diesem Schüler aber in den drei Wochen vor der Arbeit nichts gehört oder gesehen hat, wird der Lehrer wissen, was zu tun ist. Und schließlich drittens lässt sich die Gefahr durch ein oder zwei Zusatzfragen gänzlich ausschalten. Soll z.

B. über quadratische Gleichungen geschrieben werden, reicht es, eine zu diskutierende Anwendungsaufgabe vorzugeben, um einen vorher auswendig gelernten Text unbrauchbar zu machen.

Werden wir etwas konkreter und betrachten das Thema „lineare Gleichungssysteme“. Wissen Schüler, dass sie darüber einen Aufsatz schreiben werden, können sie von der ersten Unterrichtsstunde an Material sammeln, indem sie ihren individuellen Weg durch die Gleichungssysteme dokumentieren. So haben sie bis zur Klassenarbeit auf jeden Fall genügend Inhalte zusammengestellt, über die sie schreiben können. Der sprichwörtliche „Black Out“ *kann* dann nicht mehr auftreten.

18.0.8 Aufsatz über lineare Gleichungssysteme

Ein solcher Aufsatz sollte sowohl die grundlegenden Lehrinhalte zum Thema „Lineare Gleichungssysteme“ als auch eine Beschreibung des individuellen Verständnisses des Schülers enthalten. Es geht also um weit mehr, als nur das richtige Ergebnis hinzuschreiben.

Als Zusatzfragen/ Aufgaben bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Schreibe Gleichungssysteme auf, die Besonderheiten haben.
- Man könnte ein nach dem Gleichsetzungsverfahren gelöstes Gleichungssystem in der Klassenarbeit vorgeben und dazu besonders ähnliche oder auch unähnliche Gleichungssysteme samt Lösungen verlangen.
- Beschreibe mindestens ein Lösungsverfahren in Worten.
- Welche sind für dich die wichtigsten Unterschiede zwischen den einzelnen Lösungsverfahren?
- Welche Vorteile hat ein graphisches Lösungsverfahren gegenüber einem rechnerischen Lösungsverfahren?
- Gibt es Gleichungssysteme, die einfacher zu lösen sind als andere? Wenn ja: Warum? Wenn nein: Warum nicht?
- Es sind drei Möglichkeiten gegeben:

  1. $x = 3$
  2. $4x - 2 = y$
  3. $x = 1; y = 5$

  Forme mindestens eine der Möglichkeiten so um, dass ein typisches lineares Gleichungssystem entsteht, wie du es aus dem Unterricht gewohnt bist.

Hier noch kurz ein paar Beispielthemen für Aufsätze:

- Nenne Anwendungen des Dreisatzes, die mit Geld zu tun haben.
- Lineare Funktionen, die die x-Achse zwischen -1 und 1 schneiden.

- Verschiebung einer Parabel im Koordinatensystem nach eigenen Ansatzpunkten.
- Nenne Funktionen 3. Grades, deren Graphen keine Punkte im IV. Quadranten haben.
- Eine Münze werde 3-mal, 30-mal und 300-mal geworfen. Welche Ereignisse haben Wahrscheinlichkeiten von genau oder ungefähr einem Drittel?
- Inwiefern hängt die Zahl $k \in \mathbb{N}$ von $n \in \mathbb{N}$ ab, wenn für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gelten soll: $P(X \leq k) \leq 0,75$?

18.0.9 Eigene formale Systeme

Es ist ziemlich einfach, formale Systeme selbst zu erstellen. Ich habe das immer wieder mit meinen Schülern gemacht und sie waren zu Recht stolz auf ihre eigene, neue Mathematik. Man braucht zunächst eine Menge von Objekten, mit denen man Arbeiten möchte. Das kann ein Vorrat von Zeichen sein, oder auch Steine, die man zusammensetzen kann oder Papierstreifen oder Schritte, die man auf einer vorgegebenen Fläche gehen kann etc.

Dann braucht man Regeln, um zusammengesetzte Objekte aufzubauen. So können aus den vorhandenen Zeichen Zeichenreihen gebildet werden, die Steine können auf bestimmte Weisen zusammengesteckt werden oder Papierstreifen können ineinander gefaltet werden oder man kann Schritte in bestimmte Richtungen machen.

Daraus lassen sich dann Lehrsätze ableiten, die man möglicherweise auch beweisen kann. Z. B. kann man (je nachdem, wie die Regeln sind) zeigen, dass bestimmte Zeichenreihen nicht gebildet werden können. Oder die zusammengesetzten Steine formen unter bestimmten Umständen immer gewisse Muster. Oder die Anzahlen der Faltungen und die Längen der Papierstreifen bilden bestimme Zahlenverhältnisse. Oder man könnte sich überlegen, ob man nach bestimmten Schrittkombinationen wieder am Ausgangspunkt ankommen kann.

18.1 Gestalterische Aufgaben

Wenn das Verständnis von Mathematik im Schulunterricht eine Rolle spielen soll, muss Verständnis in Klassenarbeiten, Klausuren und sonstigen Prüfungen auch abgefragt werden.

In der einfachsten Form kann man Schülern mehrere Erklärungsweisen zeigen und sie fragen, welche sie am besten finden und warum. Diese Erklärungen können größere Zusammenhänge umfassen wie z. B. warum Minus mal Minus gleich Plus ist oder warum die Kehrwertregel gilt. Es kann aber auch einfach ein Begriff sein, der auf unterschiedliche Arten eingeführt bzw. definiert wird.

Den Begriff der „offenen Aufgabe“ gibt es schon längere Zeit in der Mathematikdidaktik. Dabei gibt es verschiedene Grade der Offenheit: Von der Entscheidung für einen von genau zwei möglichen Lösungswegen, die zu einer dem Lehrer im Vorhinein bekannten Lösung führen bis hin zu der Anweisung - pointiert formuliert - „Mach' mal was.“, ist alles möglich.

Hier ist aber von gestalterischen Aufgaben die Rede, weil solche Aufgaben nicht nur lösungsoffen sind, sondern auch einen Menschen benötigen, der gestaltend tätig wird. Dabei rückt die Persönlichkeit eines Menschen und dessen individueller Zugang zur Mathematik stärker in den Blick. Genauso wie jeder Mensch bei solch trivialen Tätigkeiten wie dem Aufschreiben von Buchstaben eine unverwechselbare Charakteristik entwickelt (was wir Handschrift nennen), entwickelt auch jeder Mensch einen gewissen Stil, Mathematik zu betreiben, der sich bis hin zu sehr einfachen Beschäftigungen wie dem Finden von Beispielen linearer Gleichungssysteme oder dem Einsetzen von Termen in Formeln spezifisch auswirkt.

Im Fach Deutsch kann ein Aufsatz mit dem Thema „Mein schönstes Ferienerlebnis“ zwar eine frei erfundene Begebenheit beschreiben, aber gewünscht ist das nicht, da Schüler auch lernen sollen, ihre persönlichen Erlebnisse und ihre Emotionen in schriftlicher Form auszudrücken.

Ebenso werden gestalterische Aufgaben gestellt, auch um dem Schüler zu ermöglichen, seine eigene Sichtweise der Mathematik, sein individuelles Verständnis und seine eigenen Erfahrungen darzustellen. Weder ein seelenloses Herunterbeten von Lehrinhalten noch das mechanische Lösen von Standardaufgaben führen daher zu einer vollen Punktzahl.

Um sich mathematisch-gestalterisch zu betätigen, braucht man keine eigene Theorie zu erfinden, sondern man kann ganz klein mit der Beschreibung mathematischer Zusammenhänge, Lösungsverfahren oder Begründungen anfangen. Zu jedem individuellen Verständnis gehört auch eine individuelle Art, die eigenen Erkenntnisse zu formulieren.

Statt gegebene Terme so umformen zu müssen, dass die richtige Lösung herauskommt, könnte die Aufgabe lauten, aus gegebenen Termen mit Hilfe von Termumformungen neue zu erzeugen. Das dürfen irgendwelche Terme sein. Es ist aber insbesondere auch nach Termen gefragt, die besondere Eigenschaften haben, für die sich der Schüler interessiert.

Statt die richtige Lösungsmenge zu einer gegebenen Gleichung zu finden, könnten Schüler aus gegebenen Lösungsmengen oder gegebenen Gleichungen neue Gleichungen erzeugen. Z. B. könnte man danach fragen, wie eine Folge von Gleichungen gestaltet werden kann, damit die Gleichungen die Lösungsmengen 5, 6, 7, ... haben.

18.1.1 Weitere Beispiele

Bei den folgenden Aufgaben geht es nicht darum, eine bestimmte Frage zu beantworten, sondern sich auch Fragen selbst zu überlegen, die man vielleicht spannend findet. Die Aufgaben können mit oder ohne Unterstützung einer Lehrkraft bearbeitet werden. Wahlweise können auch Informationen aus weiteren Quellen beschafft werden. Überlegt sich ein Schüler, wonach genau zu suchen ist, um Informationen zu einer Fragestellung zu erhalten, kann das ein sehr fruchtbarer Abstraktionsprozess sein.

Mit diesen Aufgabenbeispielen soll auch gezeigt werden, mit wie wenig Aufwand Fragen gestellt werden können, zu denen es tatsächlich keine vorgefertigten Antworten gibt und Schüler real die Möglichkeit haben, etwas zu entdecken - auch etwas, was der Lehrer bisher noch nicht weiß.

18.1.2 Zahlen addieren und subtrahieren

Welche Ergebnisse sind möglich, wenn die Zahlen 2 und 7 beliebig oft addiert und subtrahiert werden können? Gibt es natürliche Zahlen, die daraus nicht gebildet werden können? Wie sieht das mit andern Zahlen aus, z. B. mit 44 und 58? Geht das auch mit drei Zahlen? Gibt es Zahlen, die sich weniger eignen als andere? Wenn die Zahlen nicht addiert und subtrahiert, sondern multipliziert und dividiert werden: Welche Ergebnisse sind dann möglich? Lassen sich auf diese Weise irrationale Zahlen erzeugen?

Diese Art von Problemen hat mit Erzeugendensystemen und Basen zu tun - ein Thema, welches in der Mathematik immer wieder vorkommt (Basen von Vektorräumen oder Mengen, die Algebren erzeugen, ...)

18.1.3 Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Zwei natürliche Zahlen haben ein kleinstes gemeinsames Vielfaches. Gilt das auch für zwei rationale Zahlen? Gilt das auch für zwei reelle Zahlen? Können zwei irrationale Zahlen überhaupt ein kleinstes gemeinsames Vielfaches haben? Wie ändert sich die Sachlage, wenn das gemeinsame Vielfache nicht so genau passen muss, sondern nur so ungefähr? Wie kann man „ungefähr“ definieren?

18.1.4 Spielwürfel

Man hat eine unbegrenzte Menge handelsüblicher Spielwürfel. Man legt einen Würfel auf eine Ebene und darf nun andere Würfel nur so an den bestehenden Würfel ansetzen, dass sich zwei Würfelseiten mit den gleichen Augenzahlen berühren. Für alle weiteren Würfel gilt das gleiche. Welche Figuren und Formen können so entstehen?

Das ist ein typischer Fall eines formalen Systems: Man hat eine Menge von Dingen und eine oder mehrere Regeln, wie man daraus etwas machen kann. Und darüber macht man dann Lehrsätze und beweist sie.

18.1.5 Neue Mathematik mit neuen Zahlen

Ein Schüler der Mittelstufe schlug bei der Einführung quadratischer Gleichungen vor, als Lösungen immer nur Lösungspaare zuzulassen. Dann hätte z. B. die Gleichung $x^2 = -4$ das Lösungspaar $(-2|2)$, weil ja $-2 \cdot 2 = -4$ ist. Wie weit kommt man mit diesem Ansatz? Hat eine solche Gleichung dann ein einziges Lösungspaar? Sollte man die Zahlen der Lösungspaare auf eine bestimmte Zahlenmenge - z. B. die ganzen Zahlen - einschränken? Wie geht das dann mit $x^3 = -27$ oder mit $x^4 = -16$? Üblicherweise erweitert man den Zahlenraum über die reellen Zahlen hinaus auf die komplexen Zahlen, um Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen - was leider in der deutschen Schulmathematik keine Rolle spielt. Könnte dieser Ansatz die komplexen Zahlen ersetzen?

18.1.6 Gerade Zahlen

Angenommen, wir haben nur die geraden ganzen Zahlen zur Verfügung - also die Zahlen $\{0; 2; -2; 4; -4; 6; -6; \ldots\}$ - kann man dann in dieser Menge alle Additionen und Subtraktionen ausführen? Kann man alle Multiplikationen ausführen? Alle Divisionen? Braucht man, um z. B. die Addition unbeschränkt ausführen zu können, immer unendlich viele Zahlen?

18.1.7 Addition im Kreis

Wenn wir Zahlen auf einem Kreis anordnen und die Addition entlang des Kreises stattfindet, ist z. B. $9 + 4 = 1$. Können wir so die Addition unbeschränkt ausführen? Wie sieht es mit den anderen Grundrechenarten aus? Können wir begrenzt neue Zahlen einfügen, vielleicht nur Zahlen auf den Hälften der Zwischenräume? Gibt es Anwendungen für solche endlichen Rechensysteme?

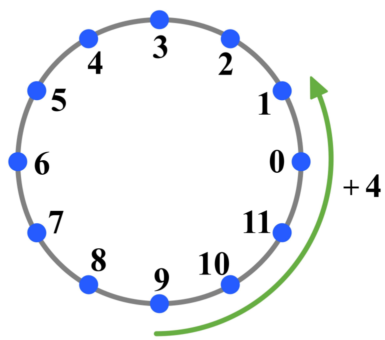


Abb. 18.7 Endliche Addition

Anmerkung: Solche Aufgaben führen zu einer Denkweise, die hinter der richtigen Algebra steckt, also dem Teil der Mathematik, der sich mit algebraischen Strukturen und nicht mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt: Man nimmt sich eine Menge von irgendwelchen Elementen, definiert, wie mit den Elementen zu rechnen ist und sieht sich dann an, welche Eigenschaften das ganze hat.

18.1.8 Lineare Gleichungssysteme aus einer lin. Gleichung aufbauen

Aufgabe: Aus einer linearen Gleichung, die als einzige Variable das x enthält, lässt sich ein lineares Gleichungssystem konstruieren, indem beide Gleichungsseiten getrennt und gleich y gesetzt werden. Führe diesen Vorgang mit einer geeigneten Gleichung aus und erkläre, was dir auffällt.

1) Wenn die erste Gleichung nur eine einzige Lösung hat, dann hat das Gleichungssystem auch nur eine einzige Lösung. Dann kann man von dort aus weiter konstruieren. Interessant kann man hier finden, dass die eindeutige Lösbarkeit einer linearen Gleichung mit einer Variablen sich auf das ganze Gleichungssystem überträgt.

Wir nehmen einfach irgendeine lineare Gleichung mit der Variablen x.

$$3x-5=7x+8$$

Wir setzen beide Seiten gleich y und erhalten ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen. Das lustige daran ist: Dieses Gleichungssystem enthält nicht mehr Informationen als die erste Gleichung. Das Gleichsetzen der beiden Seiten mit y bedeutet nichts anderes, als dass beide Seiten gleich sein sollen - aber das wussten wir auch schon vorher.

$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 3x-5 \\ y & = & 7x+8 \end{array}\right| \begin{array}{l} |-4x \\ |+2y \end{array}$$

Nun können wir Äquivalenzumformungen durchführen und quasi die Spuren verwischen.

$$\left|\begin{array}{rcl} -4x+y & = & -x-5 \\ 3y & = & 7x+2y+8 \end{array}\right| \begin{array}{l} |+2y \\ |-x-3 \end{array}$$

Nach weiteren Äquivalenzumformungen sieht das Gleichungssystem wie zufällig dahingewürfelt aus. In diesem Gleichungssystem stecken immer noch nicht mehr Informationen als in der Gleichung vom Anfang.

$$\left|\begin{array}{rcl} -4x+3y & = & -x+2y-5 \\ -x+3y-3 & = & 6x+2y+5 \end{array}\right|$$

2) Nehmen wir wieder die Gleichung und führen eine Äquivalenzumformung durch:

$$\begin{array}{ll} 3x-5=7x+8 & |+x-1 \\ 4x-6=8x+7 & \end{array}$$

Die beiden Seiten der ersten Gleichung können wir als zwei Funktionsterme auffassen. Daraus erhalten wir die beiden Funktionsgleichungen

$$\begin{array}{l} y=3x-5 \\ y=7x+8 \end{array}$$

Die Graphen dieser Funktionen schneiden sich an einer bestimmten Stelle x, der Lösung der Gleichung $3x-5=7x+8$. Auch die beiden Seiten der zweiten Gleichung können wir als Funktionsterme auffassen. Wir erhalten dann:

$$y = 4x - 6$$
$$y = 8x + 7$$

Die Graphen dieser Funktionen schneiden sich an der gleichen Stelle, obwohl es andere Funktionen sind.

Somit definiert also eine lineare Gleichung mit einer Variablen zusammen mit den zu ihr äquivalenten Gleichungen eine Schar von Funktionspaaren, mit der Eigenschaft, dass sich zwei Funktionsgraphen der Funktionen eines Paares an immer der gleichen Stelle schneiden. Die y-Werte können dabei variieren.

18.1.9 Offene Aufgaben zu einfachen Ableitungen

Die folgenden Beispiele offener Aufgaben behandeln nur das inhaltlich sehr eingeschränkte Thema „Ableitungen ganzrationaler Funktionen“. Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte werden nicht berücksichtigt. So soll deutlich gemacht werden, dass offene Aufgaben auch für die Leistungsbewertung im Rahmen von Tests oder Klausuren, die einen engen inhaltlichen Rahmen haben, problemlos möglich sind.

Drei Aufgaben sind mit Lösungsmöglichkeiten dargestellt. Da es viele Lösungsmöglichkeiten gibt, umfasst dieser Abschnitt einige Seiten. Um diese eher unüblichen Aufgaben aber verstehen zu können, ist diese Ausführlichkeit meiner Meinung nach notwendig.

18.1.10 Aufgabe 1

Für manche Funktionen gilt: Je größer der Funktionswert, desto größer die Steigung. Bearbeite nun eine oder mehrere Aufgaben:

a) Formuliere die obige Aussage in mathematischer Sprache.

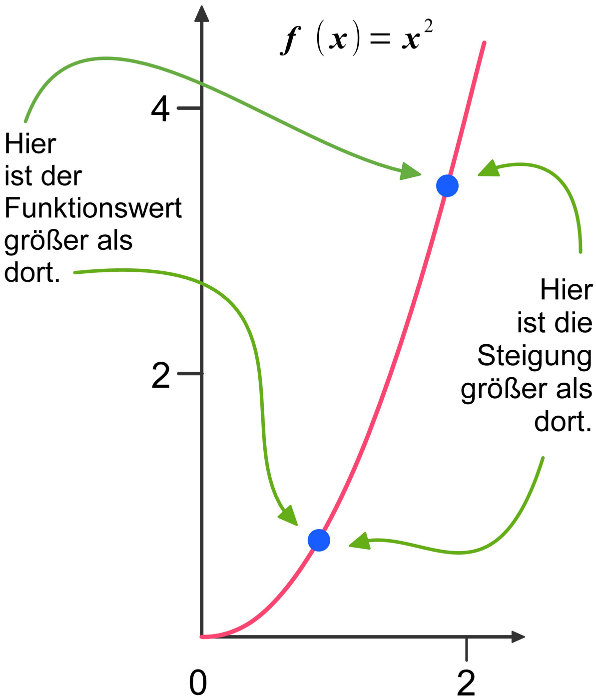
b) Nenne ganzrationale Funktionen, für die das überall oder auch nur abschnittsweise gilt. Erkläre, woher du weißt, dass das gilt.

c) Fertige Skizzen an.

d) Leite die Funktionen gegebenenfalls ab. Beschreibe/erkläre, wie du ableitest, mit welchen Formeln, was Ableitungen sind etc.

Anmerkung: *In dieser Aufgabe geht es darum, zu zeigen, dass du ganzrationale Funktionen ableiten kannst.*

Mögliche Antworten, die bepunktet werden können:



- Definition der Ableitung und der Ableitungsfunktion, z. B.:
  Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einem bestimmten Punkt ist die Steigung des Graphen in diesem Punkt.
  Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ordnet jedem x des Definitionsbereichs von $f(x)$ die Steigung des Graphen von $f(x)$ zu.

- „Ich leite eine Funktion ab, indem ich die Hochzahl vor das x schreibe und zusätzlich von der Hochzahl 1 abziehe."

  Anmerkung: *Diese Aussage hat zweifellos etwas mit dem Ableiten ganzrationaler Funktionen zu tun und kann deshalb bepunktet werden - obwohl es keine „Hochzahlen" gibt und nur rudimentäre mathematische Kenntnisse gezeigt werden.*

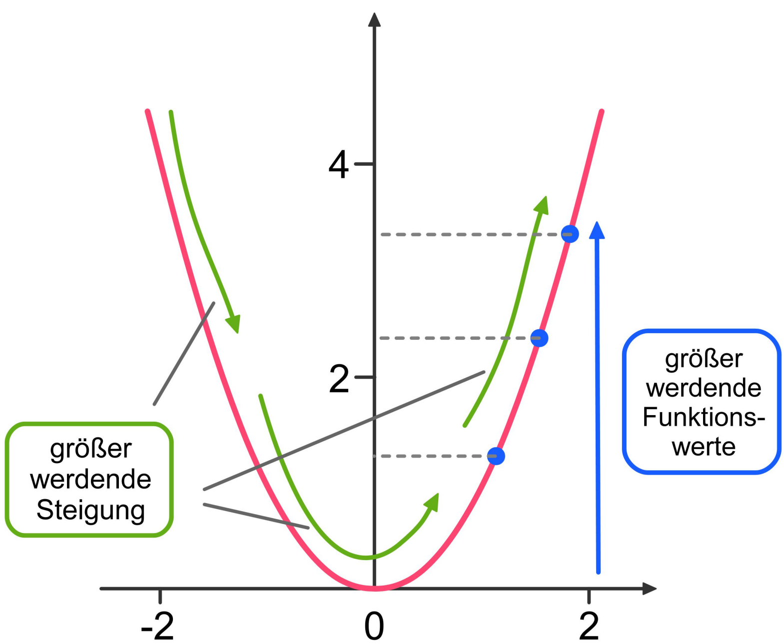
- „Zum Ableiten ganzrationaler Funktionen verwendet man Formeln."

- „Die Summanden der Funktion (des Funktionsterms) werden einzeln abgeleitet."

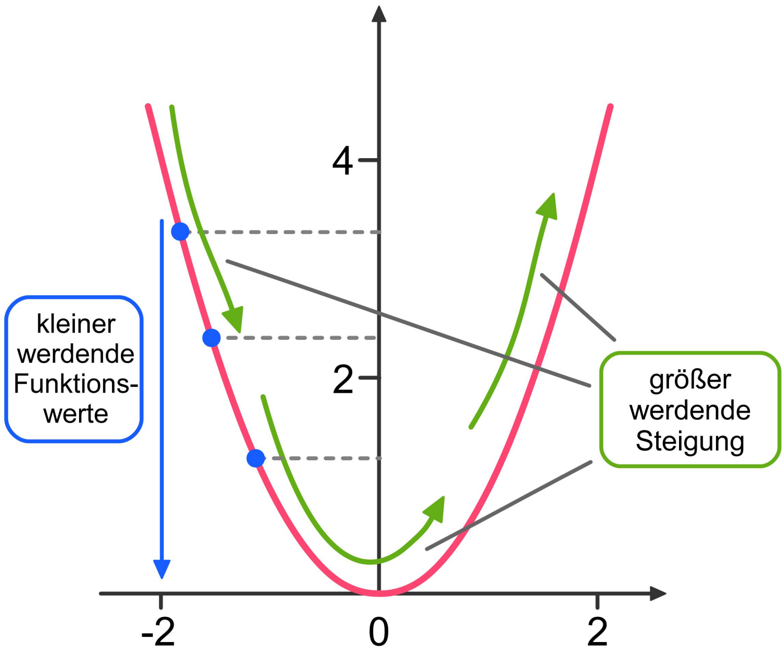
- „Zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion braucht man die Potenzregel.“
- „Zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion braucht man die Summenregel, die Faktorregel und die Potenzregel.“
- „Wegen der Summenregel können die Summanden des Funktionsterms einzeln abgeleitet werden.“
- „Die Faktorregel besagt, dass die Vorzahl vor der Potenz von x einfach stehen bleibt.“

- Die Potenzregel lautet: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Die Summenregel lautet: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Die Faktorregel lautet: $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- Die in der Aufgabenstellung genannte Abhängigkeit von Funktionswert und Steigung läßt sich mit dieser Folgerung beschreiben:
$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

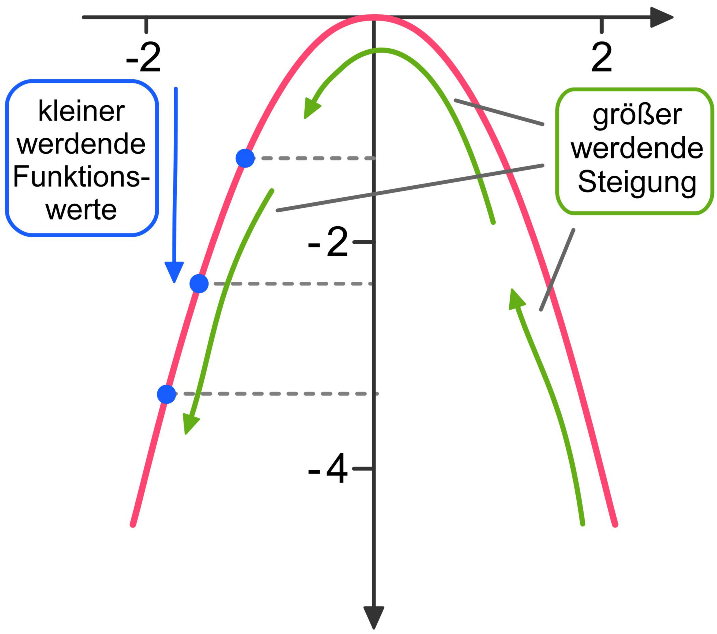
- Folgende Skizze erläutert den Sachverhalt:



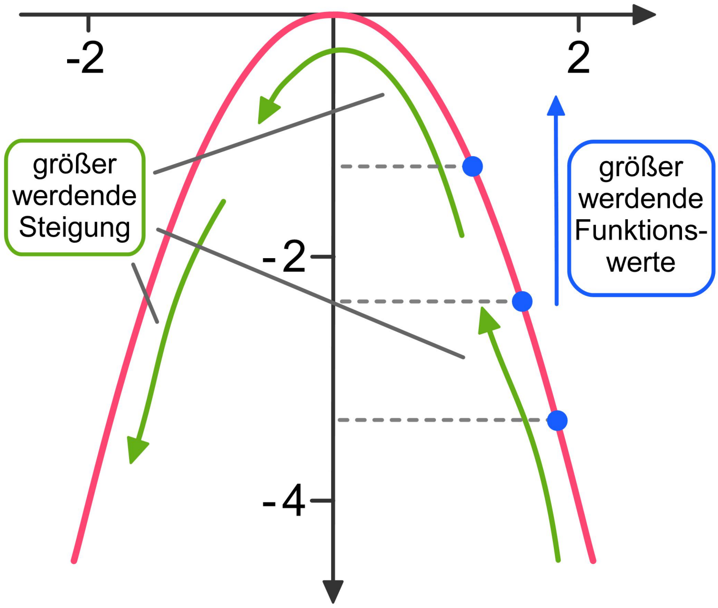
★ Das ist ein Gegenbeispiel:



★ Das ist ein Gegenbeispiel:



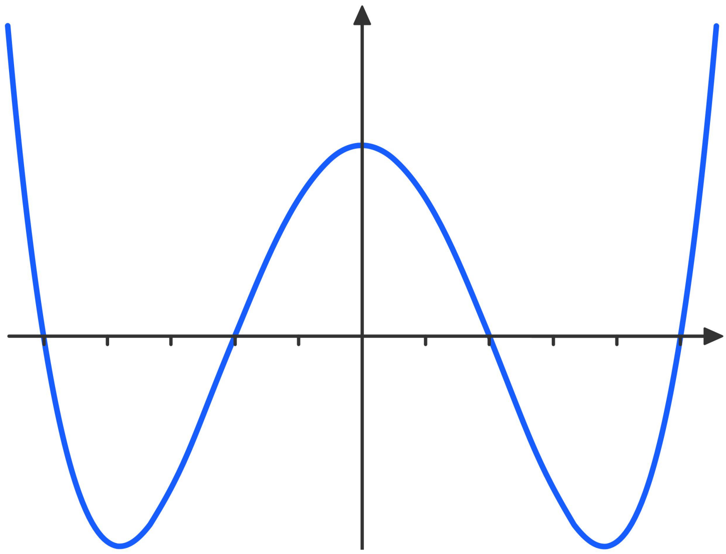
★ Hier gibt es zu größer werdenden Funktionswerten auch größer werdende Steigungen.



★ Die Eigenschaft $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$

kann nicht überall für eine ganzrationale Funktion geraden Grades gelten. Das wird nun beispielhaft am typischen Verlauf einer Funktion 4. Grades gezeigt.

Ist der Leitkoeffizient positiv, sieht der typische Verlauf so aus:



Geht x gegen -∞, so gehen die Funktionswerte gegen +∞. Daher ist die Ableitung links des kleinsten Tiefpunkts negativ. Damit die oben genannte Eigenschaft gilt, müsste die Ableitung streng monoton fallend sein. Da die Ableitung aber eine Funktion dritten Grades ist und in diesem Fall für x gegen -∞ die Funktionswerte gegen -∞ gehen, ist die Ableitung in diesem Bereich streng monoton steigend.

- Die Eigenschaft gilt für $x \in \mathbb{R}_0^+$ für Funktionen der Form

  $$f(x) = a_n \cdot x^n \text{ mit } 2 \leqslant n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n \neq 0$$

- Es gibt keine ganzrationale Funktion, für die diese Eigenschaft überall gilt, denn: Die Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion gehen gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ falls $x \to -\infty$ geht.

  Ist der höchste Exponent n gerade, gehen die Funktionswerte gegen $+\infty$, falls $x \to -\infty$ geht und falls $a_n > 0$ ist.

  Der höchste Exponent der Ableitung, nämlich ***n*-1**, ist dann ungerade. Damit gehen die Werte der Ableitung gegen $-\infty$, falls $x \to -\infty$ geht. Zu von rechts nach links größer werdenden Funktionswerten gehören dann also immer kleiner werdende Werte der Ableitung, also immer kleinere Steigungen.
  Alle anderen Fälle betrachtet man analog.

- Die gewünschte Eigenschaft gilt für ganzrationale Funktionen auf den Intervallen der x-Achse, wo entweder die Ableitung positiv und streng monoton steigend oder negativ und streng monoton fallend ist.

- Die Eigenschaft gilt überall für Funktionen der Form

  $$f(x) = a \cdot b^{c \cdot x - d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } b > 1 \text{ und } c > 0$$

Es sind noch viele weitere Lösungen denkbar.

Aufgabe 2

Gibt es Funktionen, deren Ableitungen du einfacher findest als andere? Oder gibt es für dich keine Unterschiede? Zeige in diesem Zusammenhang Funktionen und deren Ableitungen. Beschreibe bzw. begründe, wie du beim Ableiten vorgehst. Nenne Formeln, Definitionen, Sätze etc.

Du kannst auch folgende Funktionen verwenden:

$$f_1(x) = x^0$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_3(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{4}{8}x^2$$

$$f_4(x) = 1$$

Mögliche Lösungen:

Ein Funktionsterm eigener Wahl und ohne besondere Eigenschaften ist aufgeschrieben. Der richtige Funktionsterm der Ableitung ist vorhanden.

Anmerkung: *Da Funktionsterm und Ableitung auswendig gelernt worden sein könnten, ist die Fähigkeit, ganzrationale Funktionen ableiten zu können, nicht unbedingt gezeigt worden. Bepunkten kann man das aber trotzdem, weil es mehr als gar nichts ist.*

Der Funktionsterm der Ableitung von f_2 ist vorhanden.

$$f_2'(x) = 2x$$

Der Funktionsterm der Ableitung von f_4 ist vorhanden.

$$f_4'(x) = 0$$

Der Funktionsterm der Ableitung von f_1 ist vorhanden.

$$f_1'(x) = 0$$

Der Funktionsterm der Ableitung von f_3 ist vorhanden.

$$f_3'(x) = \frac{6}{5}x^2 - x$$

- Es werden mehrere Funktionen und deren Ableitungen eigener Wahl gezeigt und begründet, warum diese Funktionen ausgewählt wurden.

  Anmerkung: *Auch so ein Text kann vorbereitet und auswendig gelernt sein. Solange das aber ein selbstverfasster Text ist, ist damit durchaus eine Leistung nachgewiesen worden. Wird ein solcher Text als Referat vorgetragen, wird das ja auch bepunktet.*
  Der Schüler soll immer auch die Möglichkeit haben, sich mit dem Lehrstoff kritisch oder wertend auseinanderzusetzen und z.B. darauf hinzuweisen, dass zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion nach dem Schema „Hochzahl minus 1 und dann -1 rechnen" meistens kein mathematisches Verständnis nötig ist.

- Definition der Ableitung und der Ableitungsfunktion wird genannt.

- „Ich finde längere Funktionen schwieriger abzuleiten als kurze."

  Anmerkung: *Da es weder lange noch kurze Funktionen gibt, ist diese Aussage problematisch. Gemeint sind vermutlich die Funktionsterme. Außerdem wird nur ein persönlicher Eindruck wiedergegeben. Ob man dafür noch Punkte vergeben kann, ist fraglich.*

- „Ich finde längere Funktion mit längeren Funktionstermen schwieriger abzuleiten als Funktionen mit kurzen Funktionstermen."

  Anmerkung: *Der Fachbegriff* „Funktionsterm" *wird korrekt verwendet. Ansonsten bleibt aber die Verbindung von langen und kurzen Funktionstermen auf der einen Seite und dem Schwierigkeitsgrad des Ableitens auf der anderen Seite ohne weitere Begründung möglicherweise zu vage, um diese Aussage bepunkten zu können.*

☆ „Ich leite eine Funktion ab, indem ich die Hochzahl vor das ***x*** ***s***chreibe und zusätzlich von der Hochzahl 1 abziehe.“

Anmerkung: *Diese Aussage hat zweifellos etwas mit dem Ableiten ganzrationaler Funktionen zu tun und kann deshalb bepunktet werden - obwohl es keine „Hochzahlen“ gibt und nur rudimentäre mathematische Kenntnisse gezeigt wurden.*

☆ „Zum Ableiten ganzrationaler Funktionen verwendet man Formeln.“

Anmerkung: *Es ist heutzutage keine Selbstverständlichkeit mehr, dass Schüler wissen, dass für die Ableitungen von Funktionen Formeln zu verwenden sind.*

★ „Die Summanden der Funktion (des Funktionsterms) werden einzeln abgeleitet.“

★ „Zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion braucht man die Potenzregel.“

★ „Zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion braucht man die Summenregel, die Faktorregel und die Potenzregel.“

★ „Wegen der Summenregel können die Summanden des Funktionsterms einzeln abgeleitet werden.“

★ „Die Faktorregel besagt, dass die Vorzahl vor der Potenz von ***x*** einfach stehen bleibt.“

★ Die Potenzregel lautet: $\left(x^{n}\right)' = n \cdot x^{n-1}$

★ Die Summenregel lautet: $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

★ Die Faktorregel lautet: $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$

★ „Ganzrationale Funktionen sind Funktionen, deren Funktionsterm ein Polynom sein kann.“

★ „Ein Polynom ist ein Term der Form: ...“

$$p\,(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

★ „Ein Polynom ist ein Term der Form: ...

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

mit $0 \leqslant n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ und $a_n \neq 0$.“

Anmerkung: *Je abstrakter, allgemeiner, genauer, vollständiger formuliert wird, desto mehr Punkte können vergeben werden. Das gilt ebenso für die Verwendung von Fachbegriffen.*

★ „Hat der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion nur einen Summanden, braucht man die Summenregel nicht. Deshalb ist eine solche Funktion einfacher abzuleiten als Funktionen, deren Funktionsterme mehrere Summanden haben.“

★ „Es gibt keine einfach oder nicht einfach abzuleitenden ganzrationalen Funktionen, weil das Ableiten immer nach demselben Schema funktioniert. Zwar braucht man manchmal die Summenregel nicht, qualitativ ändert das aber nichts.“

★ „Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion lautet: ...“

$$P'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

★ „Es sind diejenigen Funktionen weniger einfach abzuleiten, deren Koeffizienten (echte) Brüche sind, weil man dann zusätzlich nach der Anwendung der Potenzregel Bruchrechenregeln anwenden muss.“

★ „Sind Koeffizienten der ganzrationalen Funktion (des Funktionsterms) gemischte Zahlen, kann man sich schnell nach der Anwendung der Potenzregel verrechnen, wenn man nämlich den Exponenten mit dem Koeffizienten multipliziert und nicht darauf achtet, dass das Nebeneinander von ganzer Zahl und gemeinem Bruch additiv gemeint ist.“

Anmerkung: *Solche individuellen Aussagen sind durchaus erwünscht. Sie belegen die Fähigkeit des Schülers, den eigenen Umgang mit Ableitungen zu bewerten.*

★ „Sind die Koeffizienten des Funnktionsterms Wurzeln, muss man zusätzlich vielleicht noch Wurzelgesetze anwenden. Ist z.B. der Exponent gleich 4 und der Koeffizient die Wurzel aus 8, gilt: ...“

$$4 \cdot \sqrt{8} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2}$$

★ „Allerdings braucht man das Wurzelgesetz

$$\sqrt{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$$

nie anzuwenden, weil die Exponenten in Funktionstermen ganzrationaler Funktionen natürliche Zahlen sind.“

★ „Eine Potenzfunktion der Form $\boldsymbol{x^n}$ wird mit der Potenzregel abgeleitet.

Das ist der Spezialfall, wenn in der allgemeinen Potenzfunktion $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x^n}$ der Koeffizient a = 1 ist. Die Ableitung ist dann $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}}$

Ist a ungleich 1, braucht man für die Ableitung noch die Faktorregel. Die Ableitung von $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x^n}$ ist $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}}$.

★ Der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion besteht entweder aus einer Potenzfunktion oder aus einer Summe von Potenzfunktionen. Im letzteren Fall braucht man für die Ableitung noch die Summenregel, die sicherstellt, dass die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen der Summanden ist.

Anmerkung: *Es sind hier lediglich die Terme und nicht deren Bezeichnungen wie $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ verwendet worden. Ob das ein Mangel ist, hängt von der im Unterricht verwendeten Übung ab.*

Anmerkung: *So eine Erklärung kann man zwar auch vor der Klausur auswendig lernen und sie dann ohne jedes Verständnis hinschreiben. Aber da ja auch Lehrer wissen, wo das Internet ist, bringt eine entsprechende Eingabe einiger Textabschnitte in eine Suchmaschine schnell Klarheit.*

Aufgabe 3

Setzt man in den Ausdruck

$$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

geeignete Zahlen für a_0 bis a_3 ein, entsteht der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion. Setzt man z. B.

$$a_3 = 0;\ a_2 = 0;\ a_1 = 2;\ a_0 = 3$$

entsteht die lineare Funktion

$$g(x) = 2 \cdot x + 3$$

Aufgabenstellung: Erläutere, wie sich die Wahl der Zahlen, die man für a_0 bis a_3 einsetzt, auf die Ableitung auswirkt.

Du kannst nach eigenen Ansatzpunkten vorgehen oder auch die folgenden Punkte berücksichtigen:

- Ändert sich die Abeitung, wenn man in $g(x) = 2 \cdot x + 3$ die 3 durch die 4 ersetzt? Wie ändert sich die Ableitung, wenn man die 2 durch die Zahl -2 ersetzt?

- Wenn a_3 = -0,5 ist, entsteht eine ganzrationale Funktion dritten Grades.
Wohin geht dann die Ableitung für x → +∞ oder für x → -∞ ?

- Eine lineare Funktion sei überall monoton steigend oder überall monoton fallend. Welche Zahlen könnte man für a_0 bis a_3 einsetzen, damit eine Ableitung etnsteht, die überall monoton steigend oder fallend ist?

Mögliche Lösungen:

Eine ganzrationale Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom sein kann.

- Ein Polynom in x ist ein Term der Form:

  $$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

  mit $0 \leqslant n \in \mathbb{N}$,
  $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ und $a_n \neq 0$.

  Anmerkung: *Auch ungenauere und weniger allgemeine Formulierungen können bepunktet werden.*

  Anmerkung: *Die Literatur hierzu ist nicht einheitlich. Manche Autoren lassen auch* $a_n = 0$ *zu. Meistens wird der Grad dann mit* 0 *angegeben. Aber auch das ist nicht einheitlich. Wikipedia z. B. nennt hier den Grad* $-\infty$.
- Zum Ableiten einer ganzrationalen Funktion braucht man die Summenregel, die Faktorregel und die Potenzregel.
- Wegen der Summenregel können die Summanden des Funktionsterms einzeln abgeleitet werden.
- Die Faktorregel besagt, dass die Vorzahl vor der Potenz von x einfach stehen bleibt.
- Die Potenzregel lautet: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Die Summenregel lautet: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Die Faktorregel lautet: $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- Die Ableitung einer ganzrationalen Funktion lautet: ...

  $$P'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$
- Die Ableitung von $f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

  ist $f'(x) = 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1$
- Setzt man $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ erhält man die Funktion $f(x) = 0$.

- ★ Die Frage, ob diese Funktion überhaupt eine ganzrationale Funktion ist, wird in der Literatur unterschiedlich beantwortet.
- ★ Der Graph dieser Funktion fällt mit der x-Achse zusammen.

  Die Ableitung von $f(x) = 0$ ist überall gleich 0.

  Wegen $f(x) = 0 = 0 \cdot x^0$ kann man diese Funktion mit der Faktorregel und der Potenzregel ableiten.

  Es ist $f'(x) = 0 \cdot 0 \cdot x^{0-1}$.
- ★ Der Wert von a_0 beeinflusst die Ableitung überhaupt nicht, weil a_0 in Ableitung nicht vorkommt.
- ★ Setzt man $a_3 = a_2 = a_1 = 0$ und $a_0 \neq 0$, erhält man die Funktion $f(x) = a_0$. Der Funktionsgraph ist eine Parallele zu x-Achse in Höhe von a_0.
- ★ Wegen $f(x) = a_0 = a_0 \cdot x^0$ kann man diese Funktion mit der Faktorregel und der Potenzregel ableiten.
- ★ Es ist $f'(x) = a_0 \cdot 0 \cdot x^{0-1} = 0$.
- ★ Ist z. B. $f(x) = -2$, dann ist $f'(x) = 0$.
- ★ Setzt man $a_3 = a_2 = 0$ und a_0; $a_1 \neq 0$, erhält man die Funktion $f(x) = a_1 x + a_0$. Die Ableitung ist dann $f'(x) = a_1$.

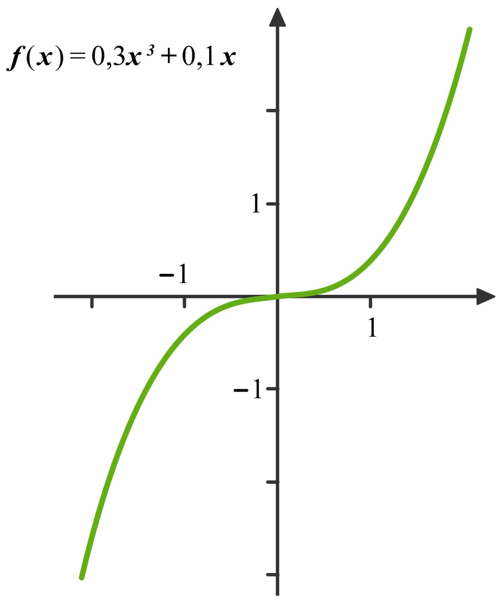
  Insofern ist die Frage, ob a_1 die Ableitung beeinflusst, vielleicht falsch gestellt: a_1 *ist* die Ableitung.
- ★ Die Wahl der Zahlen, die man für a_0 bis a_3 einsetzt, beeinflusst den Grad der Ableitung.
- ★ Setzt man $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, hat die Ableitung den Grad 0. (Die Literatur hierzu ist aber nicht ganz einheitlich.)

- ★ Setzt man $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 = 0$ und $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$, hat die Ableitung ebenfalls den Grad 0 (Auch hier ist die Literatur nicht einheitlich.).
- ★ Setzt man $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 = 0$ und $\boldsymbol{a}_1 \neq 0$, hat die Ableitung den Grad 0.
- ★ Setzt man $\boldsymbol{a}_3 = 0$ und $\boldsymbol{a}_2 \neq 0$, hat die Ableitung den Grad 1.
- ★ Setzt man $\boldsymbol{a}_3 \neq 0$, hat die Ableitung den Grad 2.
- ★ Ist $\boldsymbol{a}_3 \neq 0$, ist die Ableitung eine Funktion 2. Grades und der Funktionsgraph ist eine Parabel.
- ★ Ist $\boldsymbol{a}_3 > 0$, ist die Parabel nach oben geöffnet.
- ★ Für $x \rightarrow +\infty$ geht $\boldsymbol{f'(x)} \rightarrow +\infty$.
- ★ Für $x \rightarrow -\infty$ geht $\boldsymbol{f'(x)} \rightarrow +\infty$.
- ★ Ist $\boldsymbol{a}_3 < 0$, ist die Parabel nach unten geöffnet.
- ★ Für $x \rightarrow +\infty$ geht $\boldsymbol{f'(x)} \rightarrow -\infty$.
- ★ Für $x \rightarrow -\infty$ geht $\boldsymbol{f'(x)} \rightarrow -\infty$.
- ★ Ist $|\boldsymbol{a}_3| > 1$, ist die Parabel schmaler als die Normalparabel.
- ★ Ist $|\boldsymbol{a}_3| < 1$, ist die Parabel breiter als die Normalparabel.
- ★ Setzt man $\boldsymbol{a}_3 = 0$ und $\boldsymbol{a}_2 \neq 0$, erhält man eine quadratische Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_0$. Die Ableitung ist dann $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_1$ und damit eine lineare Funktion, die überall monoton steigend oder monoton fallend ist.

Anmerkung: *Es sei darauf hingewiesen, dass hier weder von „streng monton steigend“ nocht von „streng monoton fallend“ die Rede ist.*

★ Setzt man $a_3 \neq 0$, erhält man eine Funktion dritten Grades $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Die Ableitung ist dann $f(x) = 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1$ und damit eine quadratische Funktion, die nicht überall monoton steigend und auch nicht überall monoton fallend sein kann.

★ Die „nächste“ Möglichkeit, eine überall monoton steigende oder überall monoton fallende Ableitung zu erhalten, ist eine Funktion 4. Grades, deren Ableitung keine quadratische Komponente enthält, also die Form
$f'(x) = 4 a_4 x^3 + 2 a_1 x + a_0$ und für die zusätzlich entweder
$a_4 > 0$ und $a_2 \geq 0$ oder
$a_4 < 0$ und $a_2 \leq 0$ gilt.
Die Ableitung ist dann sogar überall entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend. Z. B.:



18.1.11 Weitere Aufgaben zu Ableitungen ganzrationaler Funktionen

1. Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion sollen mit den Nullstellen der Ableitung dieser Funktion in Anzahl und Lage übereinstimmen. Geht das? Wenn nein: Warum nicht? Wenn ja: Wie geht das? Erschließe und untersuche diesen Zusammenhang. Nenne Beispiele, fertige Zeichnungen an, etc.

2. Leite diese oder eine ähnliche Funktion ab und schreibe etwas über deren Eigenschaften. Zeichne auch den Graphen.

$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x+1) = x^3 + x^2 - x + 1$
Verändere den gegebenen Funktionsterm so, dass eine Funktion entsteht, die eine Eigenschaft hat, die die gegebene Funktion nicht hat.
Definiere eine Folge von Funktionen, die mit der gegebenen Funktion beginnt.

3. Eine ganzrationale Funktion sei symmetrisch zu y-Achse. Kann die zweite Ableitung dann auch symmetrisch zur y-Achse sein? Erschließe und untersuche diesen Zusammenhang.

4. Der Graph einer ganzrationalen Funktion und der Graph der Ableitung dieser Funktion sollen keinen Schnittpunkt haben. Geht das? Erschließe und untersuche diesen Zusammenhang. Fertige Skizzen an, zeige Beispiele, begründe, wie du vorgehst.

5. Verschiebt man eine ganzrationale Funktion parallel zur y-Achse, bleibt die Ableitung gleich. Verschiebt man eine ganzrationale Funktion parallel zur x-Achse, ist das nicht unbedingt so. Erschließe und untersuche diesen Zusammenhang. Ergänzung: Sei a>0. Dann ist f(x-a) gegenüber der Funktion f(x) um a Einheiten nach rechts verschoben.

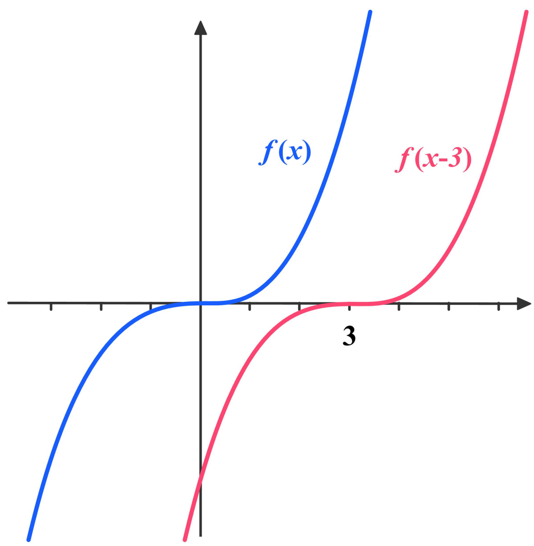


Abb. 18.8 $f(x)$ und $f(x-3)$

18.1.12 Weitere gestalterische Aufgaben

- Die Summe der Längen der drei Höhen eines Dreiecks sei gleich 3 (Längeneinheiten). Welche Rückschlüsse ergeben sich daraus für die Seitenlängen?

- Es soll mit einem (fairen) Spielwürfel einmal oder mehrmals geworfen werden. Definiere ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit knapp über 0,5 ist.

- Erkläre, warum für die Multiplikation von Brüchen die Regel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ zum richtigen Ergebnis führt. Je nachdem, ob und wenn welche Begründungen dieser Regel vorher im Unterricht besprochen wurden, kann der Sinn dieser Aufgabe auch darin bestehen zu begründen, warum man eine bestimmte Begründung persönlich überzeugender findet als eine andere.

- Gegeben ist eine Folge linearer Funktionen:
  - $h_1(x) = 0,9x - 1$
  - $h_2(x) = 0,99x - 1$
  - $h_3(x) = 0,999x - 1$
  - $h_4(x) = 0,9999x - 1$

  Gibt es Aussagen, die für alle Funktionen dieser Folge zutreffen, wie z. B.
  - Die Steigungen aller Funktionen sind größer/ kleiner als ...
  - Die Differenzen der Steigungen bleiben gleich/ werden größer/ ...
  - Die kleinste Steigung, die größer als alle Steigungen der Folge ist, ist gleich ...

- Eine Stufe soll mit einer Rampe versehen werden, deren Steigung nicht größer als 10 % sein soll. Die Rampe soll dabei nicht weiter als 1,5 m von der Stufe entfernt auf dem Boden aufsetzten. Die Stufe ist 17 cm hoch. Nenne ähnliche Aufgaben, die dir bei der Lösung dieser Aufgabe helfen können. Siehe Abb. 18.9.

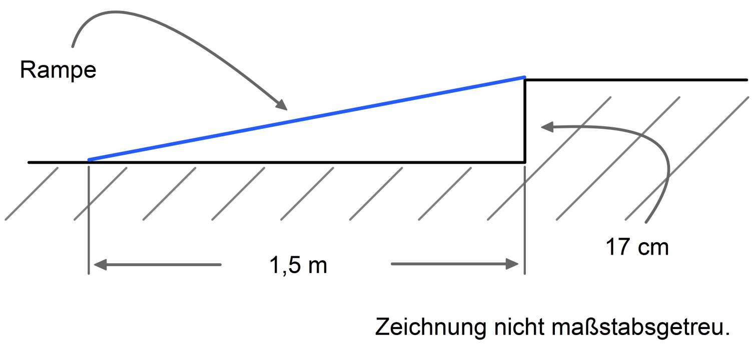


Abb. 18.9 Rampe

18.1.13 Kürzester Weg auf einer Kugel

Wenn wir Menschen auf unserer (mal angenommen) kugelförmigen Erde keine Hindernisse zu überwinden hätten, um von ***A*** nach ***B*** zu kommen, wo gingen wir dann entlang, wenn wir uns für die kürzeste Strecke entschieden? Oder anders gefragt: Was ist die kürzeste Flugroute von Düsseldorf nach Singapur?

Rein intuitiv ist uns das bestimmt klar, aber können wir das auch erklären oder sogar beweisen?

Ich habe mich das im Zuge der Entwicklung offener Aufgaben tatsächlich mal gefragt und mir einiges dazu überlegt, was ich hier gerne zeigen möchte. Es geht darum, einen typischen gedanklichen Weg nachzuzeichnen, den man beschreiten kann, wenn man eine Alltäglichkeit mathematisch hinterfragt. Normalerweise findet man einiges, worüber man sich wundern kann. Als Faustregel hat sich für meine Arbeit bewahrheitet: Je einfacher die Frage, desto größer die Überraschungen! Den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe sehe ich im oberen Bereich der Schulmathematik.

Zunächst geht es darum, das Thema zu erschließen, was bedeutet, sich zu überlegen, welche Fragen man genau hat. Ich habe mich also gefragt: Was möchte ich eigentlich genau wissen? Hier sind die Fragen, die das Thema eingrenzen:

Diese Erschließungsarbeit ist etwas, was in der Schule eigentlich nie vorkommt, weil von Schülern nicht verlangt wird, Themen oder Probleme ergebnisoffen zu erkunden und der Lehrer das meist eindeutige Ergebnis einer gestellten Aufgabe bereits kennt.

- Im dreidimensionalen Raum gibt es zwischen zwei unterschiedlichen Punkten immer genau eine Strecke, die die kürzeste Verbindung beider Punkte ist. Beschränken wir nun den Raum auf die Oberfläche einer Kugel. Welche mathematischen Zusammenhänge gelten nun für zwei Punkte der Kugeloberfläche und deren Verbindungslinien auf dieser Fläche?

- Welche Fachbegriffe können in diesem Zusammenhang hilfreich sein?

- Gibt es zwischen zwei Punkten eine Linie, die auf der Kugeloberfläche verläuft und die die kürzeste Verbindung der Punkte ist?

- Wenn ja: Gilt das für beliebige Punktepaare? Gibt es besondere Punkte? Gibt es Ausnahmen?

- Wenn nein: Warum nicht? Hängt das von der Konstruktionsweise der Punkte ab? Oder von deren Lage auf der Kugeloberfläche?

- Wenn die unterschiedlichen Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ auf der Kreislinie $\boldsymbol{k}$ des Großkreises $\boldsymbol{K}$ liegen, welche Länge hat dann der Kreisbogen $\boldsymbol{b}$ von $\boldsymbol{k}$, der zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ liegt? Was kann „zwischen“ bedeuten? Wovon hängt die Länge des Kreisbogens $\boldsymbol{b}$ ab?

- Führe die Rechnung an einem konkreten Beispiel durch.

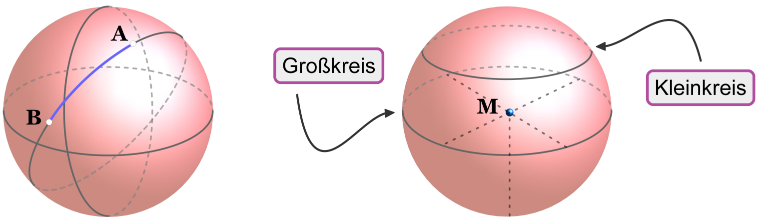


Abb. 18.10 Kugel, Kreise, Bezeichnungen

Anmerkung: Das Zusammenstellen der benötigten Definitionen ist ein wichtiger Bestandteil der Erschließung eines Themas und ist außerdem mit einem unmittelbaren Erfolgserlebnis verbunden, weil man dann plötzlich über Sachverhalte genau sprechen kann, die man vorher nur vage umschreiben konnte. Darüber hinaus erleichtern Fachbegriffe das klare Denken und sind somit Teil der Lösung des Problems. Auch das können Schüler sofort als Erfolg erleben - ein Erfolg, der ihnen im Schulunterricht meist nicht gegönnt wird, weil in diesem normalerweise weder die Fachsprache gefordert wird noch Definitionen zu Ausgangspunkten der Herleitungen von Lehrsätzen verwendet werden (wie am Beispiel der Terme hier schon ausgeführt wurde).

Definitionen

Eine **Kugelfläche** ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt im Raum einen bestimmten Abstand haben.

Die Kugelfläche zusammen mit dem Inneren der Kugel heißt **Vollkugel** oder **Kugelkörper**.

Die Kugelfläche soll im Weiteren kurz als **Kugel** bezeichnet werden.

Ein **Großkreis** ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt. Ein **Kleinkreis** ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt vom Kugelmittelpunkt verschieden ist.

Ein Kreis soll im Weiteren als **Kreislinie** verstanden werden. Ist die Kreislinie zusammen mit allen sich im Kreis befindenden Punkten gemeint, soll dies als **Kreisscheibe** bezeichnet werden.

Mögliche Teillösungen

Aus Plausibilitätsgründen können wir ohne Beweis davon ausgehen, dass die kürzeste Verbindung zweier unterschiedlicher Punkte ein Kreisbogen auf der Kugelfläche ist. Also keine „Zick-Zack-Linie“ oder eine Linie mit Links- und Rechtskurven.

Anmerkung: Fragte man Schüler danach, ob das tatsächlich plausibel ist oder ob man daran noch etwas arbeiten muss, gäbe es bestimmt zwei Gruppen: Die einen, die mit „Na, das sieht man doch sofort!“ um die Ecke kommen und die anderen, denen das nicht sofort einleuchtet und die noch

Handlungsbedarf sehen. Meiner Erfahrung nach sind die Schüler, denen es sofort klar ist, diejenigen, die an die Mathematik etwas oberflächlich herangehen - oder anders gesagt: diejenigen, die weniger nachdenken als die anderen.

Was mathematisch dahinter steckt: Würden wir nicht nur Kreise, sondern auch andere Wege zulassen, müssten wir zunächst definieren, was ein Weg auf einer Kugel ist, dann müssten wir ein Verfahren bereitstellen, mit dem wir die Länge eines Weges messen können und außerdem müssten wir dann beweisen, dass alle Kreise auf der Kugel eine gewisse kürzeste Länge haben - was immer das sein mag.

Wir können mit der Schulmathematik Längen von Graphen differenzierbarer Funktionen bestimmen. Um das für unsere Wege verwenden zu können, müssten wir die Differential- und Integralrechnung auf Kugelflächen übertragen - was selbstverständlich weit über die Schulmathematik hinaus geht.

Es geht aber noch abstrakter: Wie könnten wir vorgehen, wenn wir nicht nur Wege zulassen wollen, die Graphen differenzierbarer Funktionen sind, sondern einfach *alle* Wege? Dazu müssten wir klären, was denn dann ein Weg überhaupt sein soll. Gibt es Wege, zu denen keine Funktionen gehören? Wie könnten wir dann die Längen solcher Wege bestimmen?

An dieser Stelle ist nun der Lehrer gefragt, der darauf hinweisen kann, dass solche Fragen in der Universitätsmathematik beantwortet werden (oder klar gemacht wird, warum sie nicht beantwortbar sind). An diesen Fragen kann man erkennen, warum die Universitätsmathematik so abstrakt ist und damit nur noch wenig mit der Schulmathematik zu tun hat. Außerdem kann man sehen, wie schnell man mit einer sehr simplen Frage zu sehr abstrakter Mathematik kommt.

Sind die Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ die Endpunkte eines Kugeldurchmessers, ist jede zwischen den Punkten verlaufende Hälfte eines Großkreises eine der kürzesten Verbindungen dieser Punkte. Es gibt unendlich viele dieser Großkreise.

Für alle anderen unterschiedlichen Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt:

Sind verschiedene Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nicht Endpunkte eines Kugeldurchmessers, so gilt:

1. Es gibt nur einen Großkreis $\boldsymbol{k_1}$, der durch die beiden Punkte verläuft.
2. Der kürzere der beiden Kreisbögen $\widehat{\boldsymbol{AB}}$ und $\widehat{\boldsymbol{BA}}$ ist die kürzeste Verbindung der Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$.

Begründung zu 1

Die Eindeutigkeit des Großkreises $\boldsymbol{k_1}$ ergibt sich durch die unterschiedlichen drei Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{M}$, die den Mittelpunkt $\boldsymbol{M}$ von $\boldsymbol{k_1}$, den Radius $\boldsymbol{AM}$ von $\boldsymbol{k_1}$ und die Ebene, in der $\boldsymbol{k_1}$ liegen muss, festlegen. ■

Begründung zu 2

Liegen die Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ auf einem Großkreis $\boldsymbol{k_1}$ und auf einem Kleinkreis $\boldsymbol{k_2}$, so liegen die beiden Kreise nicht in einer Ebene. Um aber deren Längen besser vergleichen zu können, bilden wir beide in die Zeichenebene ab. Dabei wird der Kleinkreis quasi aus der Kugel so herausgeklappt, dass die Kreisscheibe von $\boldsymbol{k_2}$ in der gleichen Ebene liegt, in der die Kreisscheibe von $\boldsymbol{k_1}$ liegt.

In Abb. 18.11 sind jeweils zwei der Radien der Kreise und der Kugelmittelpunkt ebenfalls eingezeichnet.

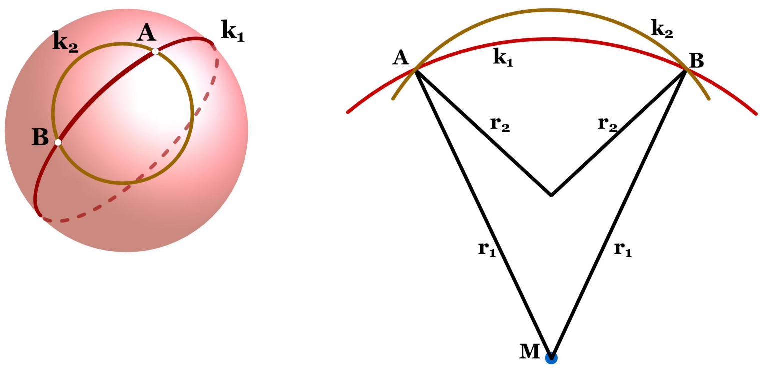


Abb. 18.11 $\mathbf{k_1}$ und $\mathbf{k_2}$

In Abb. 18.12 teilt der Punkt $\boldsymbol{E}$ den Kreisbogen $\widehat{AB}$ des Kreises $\boldsymbol{k_2}$ in zwei gleiche Teile. Ebenso teilt der Punkt $\boldsymbol{D}$ den Kreisbogen $\widehat{AB}$ des Kreises $\boldsymbol{k_1}$ in zwei gleiche Teile. Durch die eingezeichneten Strecken $\boldsymbol{AD}$ und $\boldsymbol{AE}$ entstehen die Dreiecke $\triangle \boldsymbol{ACD}$ und $\triangle \boldsymbol{ACE}$.

Da die Strecke $\boldsymbol{AC}$ eine Dreiecksseite beider Dreiecke ist und $\boldsymbol{CE}$ die Verlängerung von $\boldsymbol{CD}$ ist, ist $\boldsymbol{AE}$ größer als $\boldsymbol{AD}$.

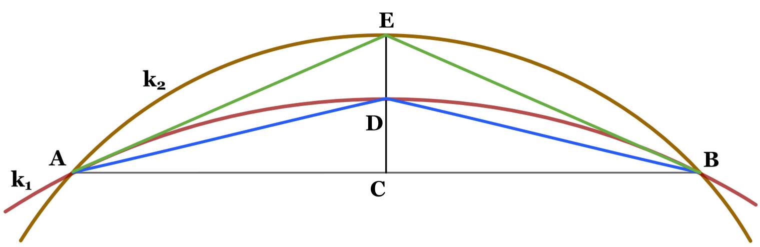


Abb. 18.12 $\mathbf{k_1}$ und $\mathbf{k_2}$ geteilt

In Abb. 18.13 teilt der Punkt $\boldsymbol{F}$ den Kreisbogen $\widehat{AE}$ des Kreises $\boldsymbol{k_2}$ in zwei gleiche Teile. Ebenso teilt der Punkt $\boldsymbol{G}$ den Kreisbogen $\widehat{AD}$ des Kreises $\boldsymbol{k_1}$ in zwei gleiche Teile.

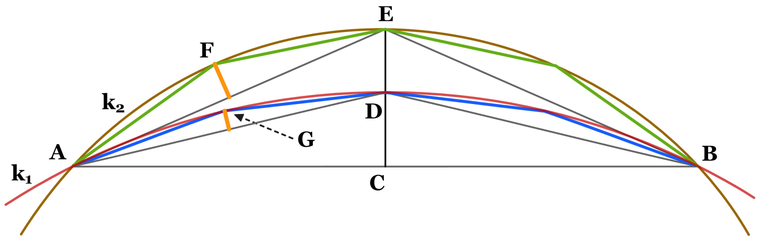


Abb. 18.13 $\mathbf{k_1}$ und $\mathbf{k_2}$ nochmal geteilt

Das gleichschenklige Dreieck $\triangle AEF$ hat gegenüber dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ADG$ nicht nur die Grundseite AE, sondern wegen der stärkeren Krümmung von k_2 auch die größere Höhe. Damit ist die Strecke AE größer als AG. Gleiches gilt für alle grünen Strecken im Vergleich zu den blauen Strecken.

Wir könnten noch weitere Halbierungen der Kreisbögen vornehmen. Die Länge des Streckenzuges des Kreises k_2 wäre dabei jeweils größer als die Länge des Streckenzuges des Kreises k_1.

Weil wir mit diesem Verfahren Streckenzüge erhalten, die den Kreisbögen - und damit auch deren Längen - beliebig nahe kommen, ist der Kreisbogen $\widehat{AB}$ des Kreises k_2 länger als der Kreisbogen $\widehat{AB}$ des Kreises k_1. ■

Anmerkung: Es gibt eine Diplomarbeit von 2016 von Wolfgang Schäffer[2], in der unter anderem dieses Problem behandelt wird. Allerdings ist der mathematische Aufwand, den er in seinem zehnseitigen Beweis betreibt, um ein Vielfaches höher als die hier gezeigte kleine Abschätzung, die mit der Schulmathematik sicher zu bewältigen ist. Das wirft mehrere Fragen auf: Wusste er nicht, dass das viel einfacher geht? Habe ich mich vertan? Beweist er etwas anderes/ allgemeineres? Trotz längerer Suche konnte ich meinen Beweis nirgends finden, obwohl ich davon ausgehe, nicht der erste zu sein, der darauf gekommen ist; immerhin ist das Problem bekannt seitdem die Menschen mit Schiffen über das offene Meer fahren. Dennoch war es für mich interessant, eine Lösung zu finden, die mir neu und außerdem einfacher ist als die Lösungen, die ich bei anderen Autoren finden konnte. Auch Schüler sind in der Lage, solche Lösungen zu finden, was immer eine sehr aufregende Sache ist.

[2]Mathematische Geographie, Diplomarbeit, Wolfgang Schäffer, 2016, https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/download/pdf/ 1390210?originalFilename=true

Kapitel 19

Die Kehrwertregel

Immer wieder mache ich mir einen Spaß daraus, Leute zu fragen, ob sie die Kehrwertregel kennen, also die Regel, nach der man Brüche teilt:

Man teilt durch einen Bruch,
indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Die meisten Leute, die ich gefragt habe, kannten die Regel. Aber auch nach mehreren Jahrzehnten des Fragens, habe ich bisher keine einzige Person getroffen, die mir auf Anhieb eine anschauliche Begründung für diese Regel liefern konnte.

Die Kehrwertregel ist nicht nur mathematisch wichtig, sondern sie ist für viele Schüler ein Wendepunkt in ihrer persönlichen Mathematik-Karriere: Bisher konnten sich Schüler meist ganz gut vorstellen, was ihre Rechnungen bedeuteten. Das Addieren und Subtrahieren natürlicher Zahlen kann man sich mit Bonbons vorstellen. Teilt man 12 durch 4, kann man entweder 12 Stücke Schokolade in 4 Gruppen zu jeweils 3 einteilen oder man kann 12 Äpfel auf 4 Tüten aufteilen. Ein viertel Stück Pizza plus ein drittel Stück Pizza ist zwar schon viel komplizierter, ist aber ein durchaus alltäglicher Vorgang. Auch $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ geht noch ganz gut: Was ist die Hälfte einer drittel Torte? Aber wie rechnet man $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$? Geht das auch mit Pizza? Und wie kann es sein, dass $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$ ist?

Weil kaum ein Schüler hierzu eine anschauliche Begründung zu sehen bekommt, ist das für viele junge Menschen der Einstieg in den Ausstieg: Da sie nicht verstehen können, warum sie so rechnen sollen, können sie einfach nur nachmachen, was der Lehrer sagt, um gute Noten zu erhalten. Das ist nicht nur unbefriedigend, sondern hat meistens auch zur Folge, dass sich Schüler für zu dumm für die Mathematik halten und das Interesse an diesem Fach verlieren.

Bevor wir uns mehrere Erklärungen der Kehrwertregel verständig ansehen können, sollten wir uns mit drei Grundideen vertraut machen:

1. Wie eine kleine Zahl durch eine große Zahl geteilt wird,
2. wie Brüche im Standardmodell der Bruchstreifen aussehen und
3. wie das Einteilen von Brüchen in kleinere Teile funktioniert.

1) Wie wir in der Grundschule gelernt haben, ist $6:3=2$, weil die 3 zweimal auf die 6 passt. Aber wie können wir umgekehrt teilen? Was ist $3:6$? Das ist (hoffentlich) bei der Einführung der Brüche besprochen worden: Die dahinter stehende Frage ist: Welcher Teil von 6 passt auf 3? Nun, wir können uns die 6 als $1+1+1+1+1+1$ vorstellen. Damit ist 1 ein Sechstel von 6. Drei dieser 1-en passen auf 3. Damit haben wir die Antwort auf die Frage, welcher Teil von 6 auf 3 passt: Drei Sechstel von 6 passen auf 3.

2) Die Bruchstreifen dienen der Veranschaulichung von Brüchen. Man kann mit diesen Streifen ein gutes Gefühl für die Größenverhältnisse von und die elementaren Rechenoperationen mit Brüchen bekommen. Hier sind zunächst Bruchstreifen bis zu Zehnteln abgebildet. Die Farben orientieren sich an den Zahlenstäben von George Cuisenaire.

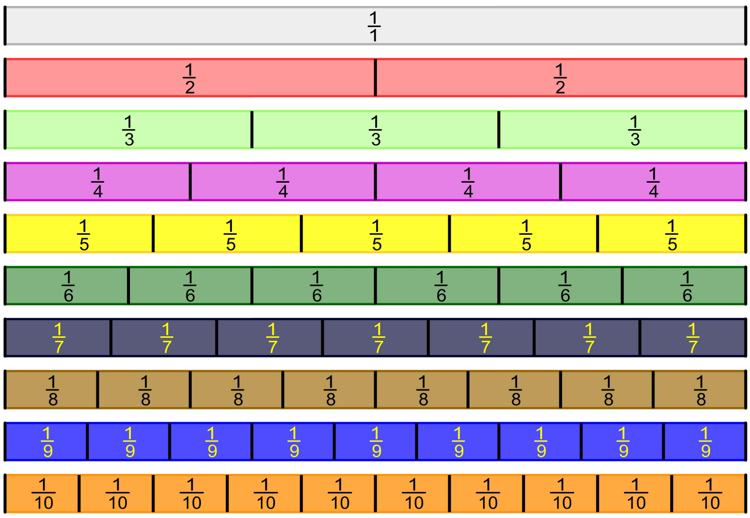


Abb. 19.1 Bruchstreifen bis Zehntel

Wie wir feststellen können, passen manche Bruchstreifen ganz gut zusammen, weil sich die vertikalen Einteilungen des einen Streifens auf dem anderen wiederfinden lassen.

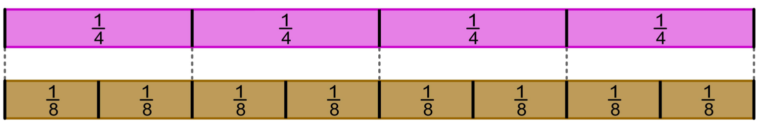


Abb. 19.2 Viertel und Achtel

Manche Bruchstreifen passen nicht so gut zusammen, weil sie keine gemeinsamen inneren Einteilungen haben.

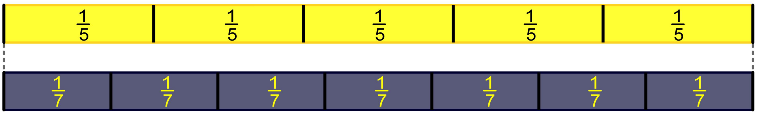


Abb. 19.3 Fünftel und Siebtel

3) Brüche mit verschiedenen Nennern können nicht so einfach addiert oder subtrahiert werden, wie wir das von den ganzen Zahlen gewohnt sind. Man sieht den Bruchstreifen das Ergebnis von $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ nicht so einfach an.

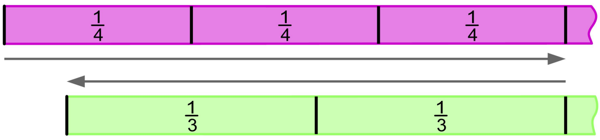


Abb. 19.4 $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = ?$

Aber es gibt ja einen Bruchstreifen, der zu den Vierteln und zu den Dritteln passt. Wir erhalten ihn, wenn wir die Viertel in jeweils 3 Teile und die Drittel in jeweils 4 Teile unterteilen.

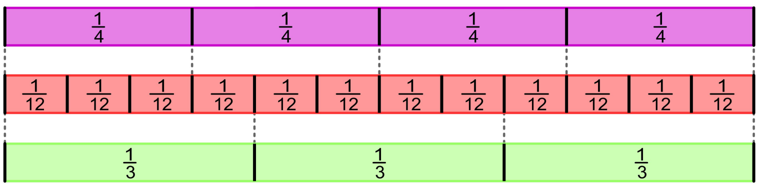


Abb. 19.5 $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Mit den Zwölfteln können wir nun die Subtraktion der Brüche problemlos durchführen. Es gilt:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

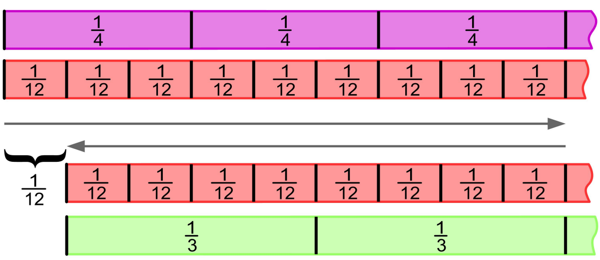


Abb. 19.6 $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

Wenn wir Brüche multiplizieren, teilen wir ebenfalls in kleinere Einheiten ein. Es bedeutet z. B. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$ umgangssprachlich ein Viertel eines Fünftels. Um das Ergebnis zu erhalten, teilen wir die Fünftel in jeweils vier Teile und erhalten Zwanzigstel.

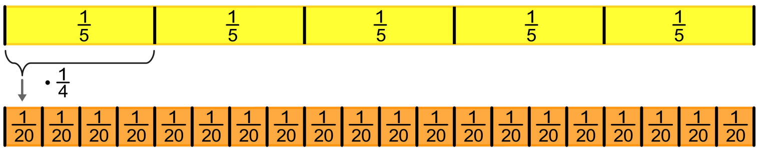


Abb. 19.7 $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

Wenn wir $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ teilen wollen, können wir zunächst die Drittel wie auch die Fünftel in kleinere Teile einteilen. In diesem Fall bieten sich die Fünfzehntel an.

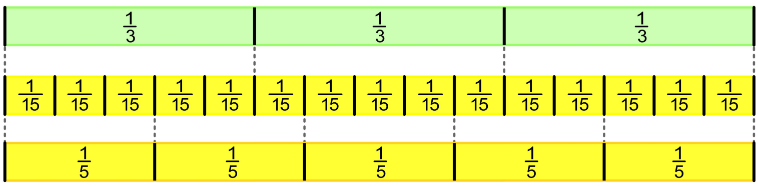


Abb. 19.8 $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind auch Fünfzehntel

Es gilt: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ und $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

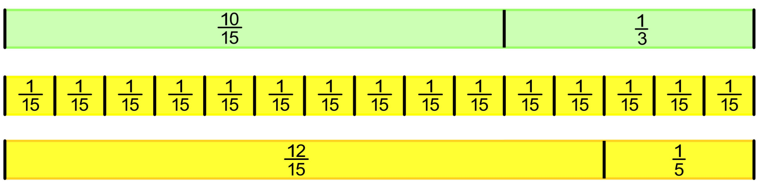


Abb. 19.9 $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ und $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$

Da wir eine „kleine" Zahl durch eine „große" Zahl teilen wollen, fragen wir uns, welcher Teil der großen Zahl auf die kleine passt. Wie wir an den Bruchstreifen erkennen können, ist $\frac{1}{15}$ der zwölfte Teil von $\frac{12}{15}$. Zehn dieser Teile passen auf $\frac{10}{15}$. Also ist das Ergebnis $\frac{10}{12}$. Damit haben wir (wenn wir am Ende noch kürzen):

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \, .$$

Soweit also die kurze Besichtigungstour durch die Bruchstreifen und einige der damit verbundenen Ideen. Der Umgang mit Brüchen muss über einen langen Zeitraum (mehrere Jahre) geübt werden, damit Schüler sicher und flüssig mit den zugrunde liegenden Konzepten umgehen können. Die Bruchstreifen helfen zwar enorm dabei, solide Repräsentanzen von Brüchen im Gehirn aufzubauen, da sie haptisch und optisch zur Verfügung stehen, aber auch der Umgang mit diesem Material muss geübt werden. Eine kurze Erwähnung der Ideen - wie sie hier vorliegt - reicht nicht!

Gerade das Teilen von Brüchen stellt außerdem erhöhte Ansprüche an die sprachlichen Fähigkeiten der Schüler. Sätze wie „Fünf Sechstel von vier Fünfteln passen auf zwei Drittel.“ sind sehr weit von der Umgangssprache entfernt. Meiner Erfahrung nach wird die sprachbildende Komponente des Mathematikunterrichts normalerweise in der Schule sträflich vernachlässigt.

19.1 Begründung 1

Kümmern wir uns nun um die verschiedenen Begründungsmöglichkeiten der Kehrwertregel.

Schauen wir uns das mal an einem Beispiel an. Teilen wir 12 durch 4, können wir uns das mit Kugeln vorstellen.

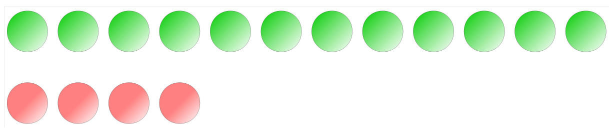


Abb. 19.10 12 und 4 Kugeln

Die Frage, die dahinter steckt, lautet: Wie oft passen 4 Kugeln auf 12 Kugeln? Nun, die Antwort ist 3, weil $4 \cdot 3 = 12$ ist.

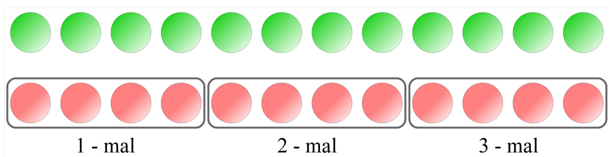


Abb. 19.11 12 und $4 \cdot 3$ Kugeln

Aber wie können wir uns z. B. $\frac{2}{7} : \frac{3}{5}$ vorstellen?

Weil $\frac{3}{5}$ größer als $\frac{2}{7}$ ist, können wir uns als erstes fragen, was denn „klein geteilt durch groß“ sein könnte. Schauen wir uns das mal bei $4 : 12$ an.

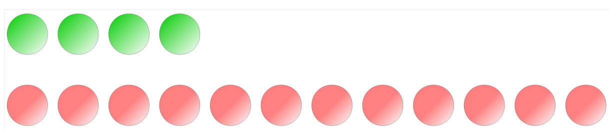


Abb. 19.12 4 und 12 Kugeln

Die Frage: „Wie oft passen 12 Kugeln auf 4 Kugeln?“ ergibt in dieser Situation keinen Sinn.

Wir könnten aber fragen: „Welcher Teil von 12 passt auf 4?“ Dann können wir rechnen: $4 : 12 = \frac{1}{3}$, weil ein Drittel von 12 auf 4 passt.

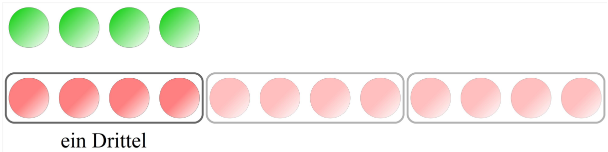


Abb. 19.13 4 und $\frac{1}{3}$ von 12

Hier sollten wir kurz innehalten und uns überlegen, was wir gemacht haben: Wir haben für uns neu definiert, was das Teilen bedeuten könnte. Das ist ein sehr großer Schritt! Eine solche Definition müsste im Schulunterricht ausgiebig geübt und vielfältig vernetzt werden, um hinreichend verstanden werden zu können. Interessanterweise habe ich noch keinen erwachsenen Menschen getroffen, der sich an ein solches Üben und Vernetzen aus seiner Schulzeit erinnern konnte. Vielleicht muss man sich dann nicht wundern, wenn man bisher die Idee hinter „klein geteilt durch groß“ nicht verstanden hat.

Mit diesen Überlegungen können wir verstehen, was mit z. B. $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ gemeint sein könnte: Welcher Teil von $\frac{1}{2}$ passt auf $\frac{1}{3}$?

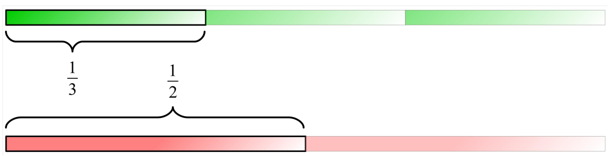


Abb. 19.14 $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$

Um den Teil genau bestimmen zu können, teilen wir die Halben in jeweils drei Einheiten und die Drittel in jeweils zwei Einheiten - also jeweils in so viele Einheiten, wie der Nenner des anderen Bruchs angibt. Alle entstandenen kleinen Einheiten sind dann gleich groß.

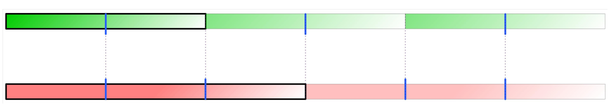


Abb. 19.15 gleich große Einheiten

Eine Einheit ist ein Drittel einer Hälfte, denn wir haben die Hälften in jeweils drei Teile geteilt.

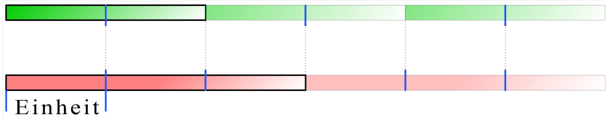


Abb. 19.16 $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$

Zwei dieser Einheiten passen auf ein Drittel.

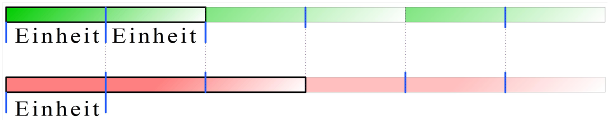


Abb. 19.17 $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ passt 2-mal auf $\frac{1}{3}$

Also passen zwei Drittel einer Hälfte auf ein Drittel. Meistens schreiben wir das so auf:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Liest man diese Erklärung zum ersten Mal, ist das sicher recht anspruchsvoll. Um sich über diesen Sachverhalt klar zu werden, muss man mit Brüchen sicher rechnen können, sich diese Brüche mühelos vorstellen können und das alles auch noch mit der recht differenzierten mathematischen Sprache verbinden können. So etwas geht nicht von heute auf morgen! Nicht umsonst steht im zweiten Brandbrief der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU): „Die Bruchrechnung muss offenbar über einen langen Zeitraum gefestigt werden.“[1]

Nachdem wir $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ erfolgreich ausgerechnet haben, können wir uns noch überlegen, was das mit der Kehrwertregel zu tun hat. Klar, um auf das Ergebnis $\frac{2}{3}$ zu kommen, hätten wir auch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multiplizieren können, denn

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Aber *muss* das so sein? Funktioniert das *immer*? Nun, wenn wir $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ rechnen möchten, können wir *immer* die Drittel halbieren und die Hälften dritteln. Da wir wissen wollen, welcher Teil einer Hälfte auf ein Drittel passt und wir die Hälfte in drei Einheiten geteilt haben, werden wir das Ergebnis *immer* in Dritteln angeben. Das heißt, der Nenner des Ergebnisses ist gleich 3 und das ist der Nenner des ersten Bruchs. Das Drittel haben wir in zwei Einheiten geteilt, weil der Nenner des zweiten Bruchs gleich 2 ist. Also ist die Anzahl der Einheiten gleich 2 und das ist der Zähler des Ergebnisses.

[1] https://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2020/03/Brief-an-die-KMK_2020-03-05pdf.pdf

Das funktioniert auch mit anderen Brüchen, z. B. können wir $\frac{1}{7} : \frac{1}{5}$ rechnen. Dazu können wir *immer* die Siebtel in jeweils 5 Einheiten und die Fünftel in jeweils 7 Einheiten einteilen. Alle entstandenen kleinen Einheiten sind dann gleich groß. Da das Fünftel in 7 Teile geteilt wurde, können wir angeben, wie viele Siebtel des Fünftels auf ein Siebtel passen. Und weil das Siebtel in 5 teile geteilt wurde, wissen wir, dass 5 Siebtel des Fünftels auf ein Siebtel passen. Also:

$$\tfrac{1}{7} : \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{5}{1} = \tfrac{5}{7}$$

Jetzt fehlt noch der anschauliche Nachweis für allgemeine Brüche, also für solche Brüche, die keine besonderen Eigenschaften haben. Wir wollen folgendes ausrechnen:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4}.$$

Wir fragen uns also, welcher Teil von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{2}{5}$ passt.

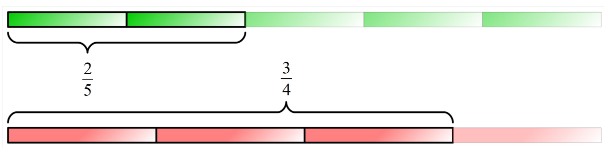


Abb. 19.18 $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$

Wir teilen alle Fünftel in jeweils 4 Einheiten und alle Viertel in jeweils 5 Einheiten. Alle kleinen Einheiten sind dann gleich groß.

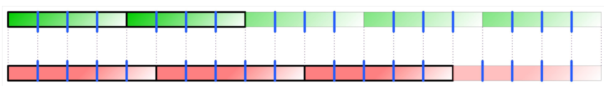


Abb. 19.19 gleich große Einheiten

Eine Einheit ist ein 15-tel von $\frac{3}{4}$, weil wir jedes der **3** Viertel in **5** Einheiten geteilt haben und $5 \cdot 3$ gleich 15 ist. Damit multiplizieren wir also den Nenner des *ersten* Bruchs mit dem Zähler des *zweiten* Bruchs - was eine Hälfte der Kehrwertregel ist.

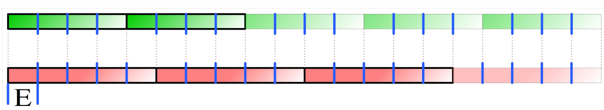


Abb. 19.20 $\frac{1}{15}$ von $\frac{3}{4}$

Acht dieser Einheiten passen auf $\frac{2}{5}$, weil wir **2** der Fünftel in jeweils **4** Einheiten geteilt haben und $2 \cdot 4$ gleich 8 ist. Damit multiplizieren wir also den Zähler des *ersten* Bruchs mit dem Nenner des *zweiten* Bruchs - was die andere Hälfte der Kehrwertregel ist.

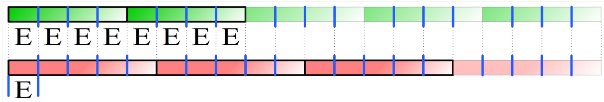


Abb. 19.21 $\frac{1}{15}$ von $\frac{3}{4}$ passt 8-mal auf $\frac{2}{5}$

Diese Überlegungen können wir kurz so aufschreiben:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

Es passen als 8 Fünfzehntel von 3 Vierteln auf 2 Fünftel.

19.2 Begründung 2

Wir können auch anders begründen, z. B.:
Wir haben $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$. Jede Division können wir als Bruch schreiben:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}$$

Wir können nun die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ geschickt erweitern. Wir wollen $\frac{3}{5}$ mit dem Nenner von $\frac{2}{7}$ - also 7 - erweitern und $\frac{2}{7}$ wollen wir mit dem Nenner von $\frac{3}{5}$ - also 5 - erweitern.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}}{\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}}$$

Weil wir jeden Bruch $\frac{a}{b}$ auch in der Form $a \cdot \frac{1}{b}$ schreiben können, formen wir um.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}}{\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{5\cdot 7}}{2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7\cdot 5}}$$

Weil $\frac{1}{5\cdot 7}$ gleich $\frac{1}{7\cdot 5}$ ist, können wir mit dieser Zahl kürzen.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}}{\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \cancel{\frac{1}{5\cdot 7}}}{2 \cdot 5 \cdot \cancel{\frac{1}{7\cdot 5}}} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5}$$

Dass wir hier zwei gleiche Zahlen erhalten, mit denen wir kürzen können, ist übrigens kein Zufall, da wir den ersten Bruch $\frac{3}{5}$ mit dem Nenner des zweiten Bruchs - also 7 - und den zweiten Bruch $\frac{2}{7}$ mit dem Nenner des ersten Bruchs - also 5 - erweitert haben. Das würde mit anderen Zahlen ganz genauso funktionieren. Dann formen wir noch um.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}}{\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \cancel{\frac{1}{5\cdot 7}}}{2 \cdot 5 \cdot \cancel{\frac{1}{7\cdot 5}}} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Bei allen Schritten dieser Begründung haben wir die speziellen Eigenschaften der Zahlen 3, 5, 2 und 7 nicht verwendet. Das heißt, es würde mit allen anderen Zahlen genauso funktionieren (wenn wir dabei beachten, dass wir nicht durch 0 teilen können). Deshalb schreibt man diese Begründung meist mit Variablen auf. Damit macht man deutlich, dass die Gleichungskette immer richtig ist - egal, welche Zahlen man für die Variablen einsetzt (solange man beachtet, dass für die gleichen Variablen immer die gleichen Zahlen eingesetzt werden müssen und dass wir nicht durch 0 teilen können). Also haben wir:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{c \cdot b}{d \cdot b}} = \frac{a \cdot d \cdot \cancel{\frac{1}{b \cdot d}}}{c \cdot b \cdot \cancel{\frac{1}{d \cdot b}}} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$$

19.3 Begründung 3

Ohne konkrete Zahlen zu bemühen soll nun eine weitere Begründung gezeigt werden. Wir erhalten eine ähnliche Gleichungskette wie oben, wenn wir die Division der Brüche als Doppelbruch schreiben und dann Zähler und Nenner mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multiplizieren.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$$

19.4 Begründung 4

In Begründung 1 haben wir den Fall besprochen, wie wir die Kehrwertregel begründen können, falls das Teilen als „Messen“ interpretiert wird: Wie oft passt die 4 in die 12? Das ist der gleiche Vorgang, den wir beim Messen durchführen: Um z. B. die Länge eines Tischs zu bestimmen, fragen wir uns, wie oft eine Messlatte auf die Tischlänge passt.

Es gibt eine - wenn man so will - entgegengesetzte Auffassung darüber, was unter dem Teilen von Zahlen verstanden werden soll, nämlich das Verteilen: 12 Äpfel sollen auf 3 Tüten verteilt werden. Wie viele Äpfel sind in jeder Tüte?

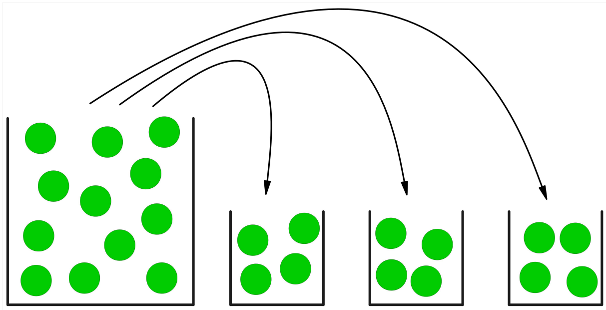


Abb. 19.22 12 Äpfel auf 3 Tüten verteilen

Wenn wir die Äpfel durch Wasser ersetzen, ergibt sich eine sehr unkomplizierte Möglichkeit, das Teilen von Brüchen zu verstehen: Haben wir ein Gefäß mit Wasser und gießen wir das Wasser in ein breiteres Gefäß - womit wir dann das Wasser auf eine größere Grundfläche verteilen - ist der Wasserstand geringer. Gießen wir das Wasser in ein schmaleres Gefäß - womit wir dann das Wasser auf eine kleinere Grundfläche verteilen - erhöht sich der Wasserstand.

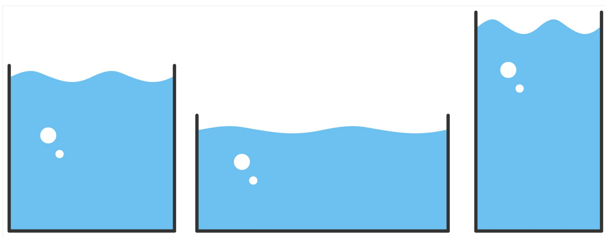


Abb. 19.23 Wasserstand und Gefäßbreite

Statt Wasser wollen wir nun Flächen verteilen. Dazu färben wir drei Viertel der Fläche eines Einheitsquadrats - also eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 - grün ein und verteilen sie auf zwei Ganze.

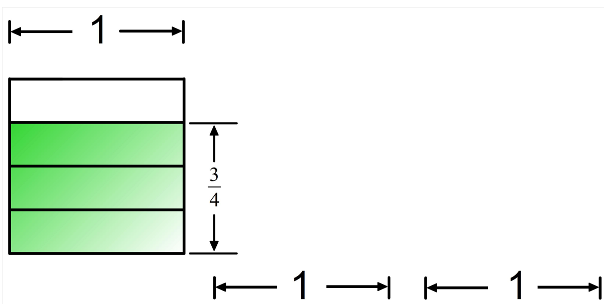


Abb. 19.24 $\frac{3}{4}$ auf 2

Da wir auf *zwei* Ganze verteilen wollen, teilen wir jedes Viertel in *zwei* gleich große Teile. Die Höhe jedes dieser Teile ist dann $\frac{1}{8}$, weil $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$ ist.

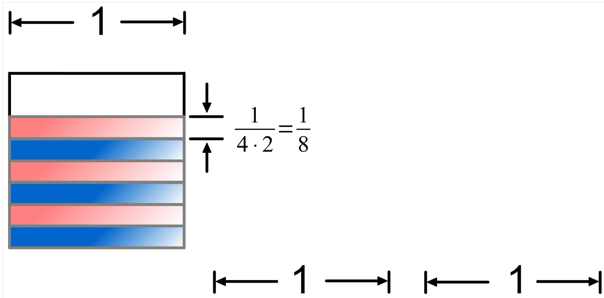


Abb. 19.25 Die Hälfte von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{8}$.

Nun können wir das erste Viertel auf zwei Ganze verteilen.

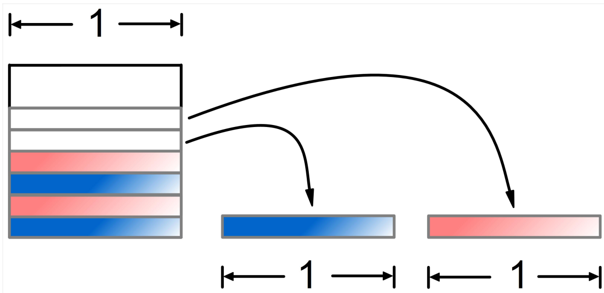


Abb. 19.26 $\frac{1}{4}$ auf 2 Ganze verteilen

Verteilen wir die restlichen Viertel auch noch, entstehen zwei Säulen mit einer Höhe von $3 \cdot \frac{1}{8}$.

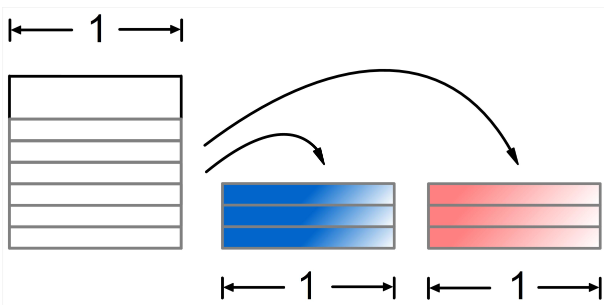


Abb. 19.27 $\frac{3}{4}$ auf 2 Ganze verteilen

Als Rechnung können wir das so aufschreiben.

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

Nun wollen wir mit „richtigen“ Brüchen rechnen und vier Fünftel auf zwei Drittel verteilen, also das Ergebnis von $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ bestimmen.

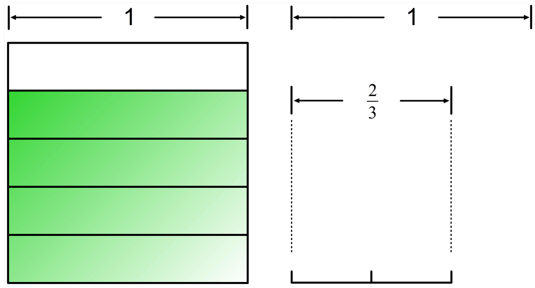


Abb. 19.28 $\frac{4}{5}$ auf $\frac{2}{3}$ verteilen

Dazu teilen wir die Fünftel in jeweils *drei* Teile ein, damit das, was wir verteilen wollen, gut auf die *Drittel* passt. Dadurch entstehen $5 \cdot 3$ kleine Rechtecke.

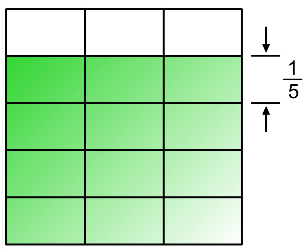


Abb. 19.29 $\frac{4}{5}$ dritteln

Da wir auf *zwei* Drittel verteilen wollen, teilen wir jedes kleine Rechteck in *zwei* gleiche Teile. Jedes dieser Teile hat eine Höhe von $\frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$.

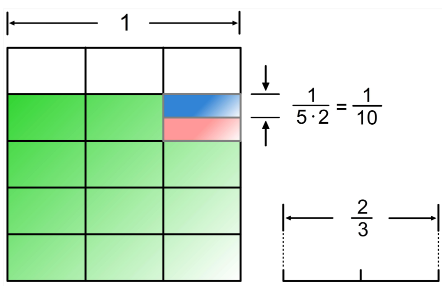


Abb. 19.30 Eine kleine Einheit in zwei Teile teilen

Jetzt können wir verteilen.

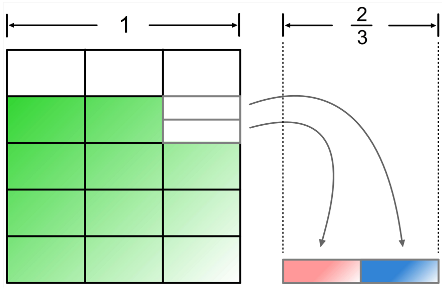


Abb. 19.31 Eine kleine Einheit auf zwei Drittel verteilen

Diesen Vorgang können wir $4 \cdot 3 = 12$ mal ausführen.

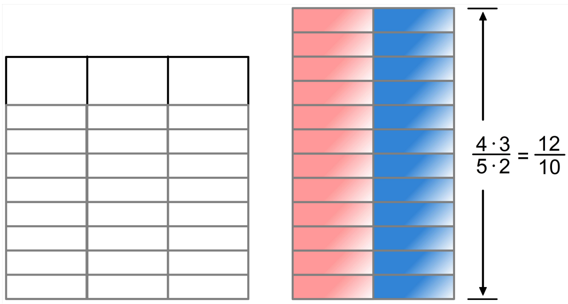


Abb. 19.32 $\frac{4}{5}$ auf $\frac{2}{3}$ verteilen

Diese Säule hat eine Höhe von zwölf Zehnteln. Es sind *Zehntel*, weil wir die gegebenen **Fünftel** jeweils in **zwei** Teile aufgeteilt haben, da wir ja auf **zwei** der Drittel verteilen wollten. Es sind *zwölf* Zehntel, weil wir alle gegebenen **vier** Fünftel in jeweils **drei** kleine Rechtecke geteilt haben, da wir ja auf **Drittel** verteilen wollten.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2}$$

19.5 Sind das Begründungen?

Wir haben nun vier unterschiedliche Begründungen der Kehrwertregel gesehen. Aber sind das überhaupt Begründungen? Das kommt darauf an, was man unter einer Begründung versteht. In Begründung 3 führen wir Termumformungen mit Termen durch, die Variablen enthalten. Ist man schon vom Konzept der Variablen überzeugt und hat sich auch von der Richtigkeit der verwendeten Termumformungen überzeugt, dann mag man diese Zeichenreihe als Begründung empfinden, weil man mit bereits bewiesenen Schritten die gesuchte Gleichheit der beiden äußeren Terme herbeigeführt hat. In Begründung 2 haben wir an einem Beispiel gesehen, wie wir rechnerisch von einem Term zum nächsten kommen können. Das haben wir dann mit Hilfe von Variablen auf alle möglichen Zahlen übertragen. Aber woher wissen wir, dass das für alle Zahlen gilt? Kann man das beweisen? Für Begründung 1 haben wir uns zunächst überlegt, was eine Division durch Brüche überhaupt bedeuten kann - ohne den Anspruch darauf zu erheben, dass diese Auffassung der Division die einzig richtige ist. Aber was ist dann eine solche Begründung wert, wenn sie voraussetzt, dass wir die Division von Brüchen auf eine bestimmte Art verstehen, ohne diese Art wiederum bewiesen zu haben. Und schließlich haben wir in Begründung 4 gesehen, dass die Auffassung der Division aus Begründung 1 nicht die einzige ist. Man könnte gegen die Begründungen 2 und 3 auch ins Feld führen, dass die Division durch Brüche eine Entsprechung in der „realen“ Welt haben muss und man deshalb die Kehrwertregel nur mit realen Objekten begründen kann. Dazu könnten wir wie in Begründung 4 Pizza aufteilen und damit die Kehrwertregel begründen. Da es einer Pizza aber egal ist, ob auf irgendeiner Tafel dieser Welt die Zeichenreihen der Begründungen 2 oder 3 stehen, können diese keine Begründungen sein.

Wir werden diese Fragen in diesem Buch nicht abschließend beantworten können. Die Fragen sind hier erwähnt, weil sie in der Praxis eine große Rolle spielen. Wenn z. B. ein Schüler die Kehrwertregel nicht versteht, liegt es oft nicht daran, dass er die einzelnen Schritte der Rechnung nicht versteht, sondern am mangelnden Verständnis des Teilens von Brüchen durch Brüche überhaupt. Für viele Schüler sind das Symbole, die anscheinend nach bestimmten Regeln aufgeschrieben werden. Aber was das eigentlich soll, wissen sie oft nicht, geschweige denn, dass sie anschaulich begründen könnten, warum die Regel funktioniert.

Kurzum, das Verständnis der Kehrwertregel und der Mathematik an sich ist eine sehr persönliche Sache. Wenn wir die Kehrwertregel verstehen möchten, brauchen wir dazu die Begründung, die für uns passt. Es wäre gut, den eigenen Weg zu finden. Und es ist gut, das mit anderen Menschen zusammen zu tun und zu verstehen, dass es unterschiedliche Sichtweisen und „Wahrheiten“ gibt.

Kapitel 20

Termumformung

Ab der 7. Klasse stehen Termumformungen auf dem Lehrplan. Das sind Verfahren, mit denen man Terme umformt. Solche Verfahren werden in der Regel unterrichtet, indem an Beispielen gezeigt wird, wie Terme umgeformt werden. Schüler sind dann gehalten, diese Umformungen an ähnlichen Termen ebenso durchzuführen. Mit etwas Übung schaffen es dann die meisten durch die nächste Klassenarbeit. Das geht meistens auch ohne jegliches Verständnis. Wenn ich Schüler frage, was denn eine richtige Termumformung von einer falschen Unterscheidet, sagen sie mir meist, richtig sei eine Umformung, wenn sie so ist, wie der Lehrer sie gezeigt hat. Ansonsten sei die Umformung falsch.

Das hat natürlich nichts mit mathematischem Verständnis zu tun. Wir können uns mit wenigen Definitionen überlegen, wie man Termumformungen verstehen könnte.

Definition: Terme sind Kombinationen aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen, die man ausrechnen kann.

Damit wir uns um das Verständnis von Termumformungen kümmern können, soll hier vorausgesetzt werden, dass Terme hinreichend bekannt sind.

Definition Zwei Terme heißen ergebnisgleich, wenn sie immer gleiche Ergebnisse haben, egal, welche Zahlen man für die Variablen einsetzt. Dabei sollen für gleiche Variablen gleiche Zahlen eingesetzt werden.

Führt man in der Mathematik eine Termumformung durch, meint man damit immer, dass ein Term in einen ergebnisgleichen Term umgeformt wird. Eine Termumformung ist also richtig, wenn ein Term in einen ergebnisgleichen Term umgeformt wird und sie ist falsch, wenn ein Term nicht in einen ergebnisgleichen Term umgeformt wird.

Nur, um es sehr klar zu machen: Fast alle Schüler, mit denen ich gesprochen habe, kannten noch nicht einmal das Konzept der Ergebnisgleichheit zweier Terme. Auf diese Weise kann man Terme und Termumformungen schlicht und ergreifend nicht verstehen.

Schauen wir uns ein Beispiel dazu an: Betrachten wir die beiden Terme

$$5-2+a \text{ und } 5-(2-a)$$

Setzen wir $a = 3$, erhalten wir:

$$5 - 2 + 3 \text{ und } 5 - (2 - 3)$$

In beiden Fällen kommt das Ergebnis 6 heraus.

Wenn die Umformung des Terms $5 - 2 + a$ in den Term $5 - (2 - a)$ richtig sein soll, müssen beide Terme für *alle* Zahlen, die man für a einsetzen kann, das gleiche Ergebnis haben.

Hier ist nun der Punkt, an dem *mathematisches* Verständnis anfängt. Zunächst könnte geklärt werden, was die Behauptung der Ergebnisgleichheit beider Terme aussagt. Dafür gibt es viele Möglichkeiten und auch viele Möglichkeiten des Verständnisses.

Wenn man so will, kann man diese Behauptung so verstehen: Immer, wenn wir in Zukunft für beide Variablen a in beide Terme die gleiche Zahl einsetzen und dann die Terme ausrechnen, kommt das gleiche Ergebnis heraus. Normalerweise gehen wir davon aus, nicht zu wissen, was in Zukunft passieren wird. Im Fall der Terme behaupten wir aber, es ganz genau zu wissen. Warum funktioniert das? Oder funktioniert das vielleicht gar nicht?

Schüler antworten darauf oftmals, man wisse das aus Erfahrung. Wenn ich dann darauf hinweise, dass es unendlich viele Zahlen gibt, die in Terme eingesetzt werden können und man somit nicht an allen Zahlen getestet haben kann, ob das stimmt, denken Schüler - meinem Eindruck nach - zum ersten Mal über die Unendlichkeit der Zahlenmengen nach.

Das ist einer der entscheidenden Punkte in der mathematischen Entwicklung eines Schülers: Idealerweise kommt jetzt von einem einfühlsamen Lehrer die Frage an den Schüler: Was würde dich denn überzeugen? Was müsste passieren, damit du davon überzeugt bist, dass die Ergebnisse zweier Terme auch dann gleich sein werden, wenn man in die Terme Zahlen einsetzt, die noch nie jemand vorher eingesetzt hat?

Kleiner Einschub: Zu diesem Zeitpunkt und an dieser Stelle ist der Lehrer der einzige Mensch auf der Welt, der sich für die mathematischen Gedankengänge des Schüler interessiert und diese auch gleichzeitig fachlich beurteilen kann. Allein schon deshalb wird man Lehrer niemals ersetzen können.

Möchte man wissen, ob eine Aussage für *alle* Zahlen richtig ist, könnte man sich fragen, ob man denn überhaupt Zahlen findet, für die die Aussage richtig ist. Also könnte man ein paar Beispiele durchrechnen. Aber was würde passieren, wenn wir Zahlen in zwei vermeintlich ergebnisgleiche Terme einsetzen würden und unterschiedliche Ergebnisse herauskommen würden? Unsere erste Vermutung wäre bestimmt, dass wir uns verrechnet haben - wodurch die nächste Frage aufgeworfen wird: Können wir immer klären, ob richtig gerechnet wurde? Haben alle Rechnungen der Welt immer nur ein einziges Ergebnis?

Diese möglicherweise etwas trivial anmutenden Fragen führen übrigens zu gar nicht mehr trivialen Teilgebieten der Mathematik wie Rekursionstheorie und Komplexitätstheorie. Darauf soll in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen werden. Daran kann man aber sehen, wie vielfältig solch simple Fragen beantwortet werden können.

Kehren wir zurück zu unseren beiden Termen: Es gibt ein Standardmodell, mit dem man sich Rechnungen vorstellen kann, nämlich die Zahlengerade. Setzen wir für a die Zahl 3 ein, erhalten wir mit dem linken Term folgendes Bild:

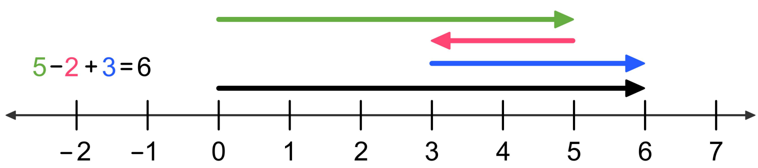


Abb. 20.1 $5-2+3=6$

Um das Ergebnis des rechten Terms zu finden, rechnen wir zunächst die Klammer aus.

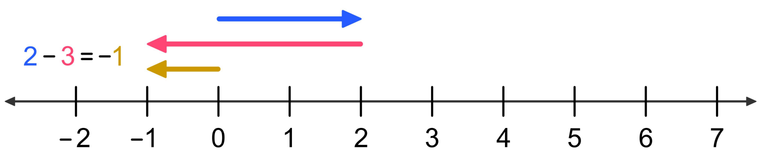


Abb. 20.2 $2-3=-1$

Das Ergebnis der Klammer verwenden wir dann, um das Ergebnis des Terms zu bestimmen. Inwieweit $-(-1)$ tatsächlich gleich $+1$ ist, soll in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden. (Siehe dazu unter „Warum ist Minus mal Minus gleich Plus?“)

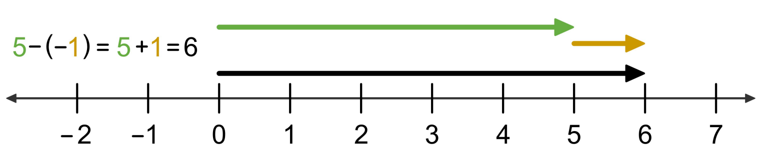


Abb. 20.3 $5-(-1)=5+1=6$

Nun haben wir gesehen, wie bei beiden Termen das gleiche Ergebnis herauskommt, wenn wir für die Variable a die Zahl 3 einsetzen. Um zu sehen, ob das auch mit anderen Zahlen funktioniert, soll der Pfeil, der die Variable a repräsentiert, etwas verlängert werden.

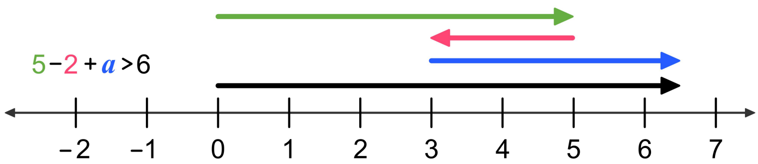


Abb. 20.4 $5-2+a>6$

Wenig überraschend ist das Ergebnis des Terms nun größer als 6, denn wir haben zu $5-2$ eine größere Zahl als 3 addiert.

Auf der anderen Seite funktioniert das auch. Zunächst rechnen wir die Klammer aus und erhalten einen Pfeil b, der länger ist als der Pfeil, der -1 repräsentiert.

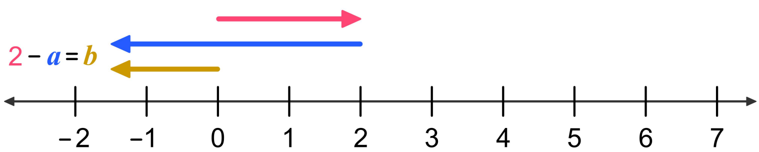


Abb. 20.5 $2-a=b$

Vorher haben wir zu 5 die Zahl 1 addiert. Jetzt addieren wir eine Zahl b, die größer als 1 ist und das Ergebnis ist größer als 6.

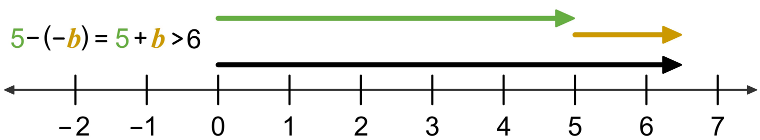


Abb. 20.6 $5-(-b)=5+b>6$

Kurz zusammengefasst können wir festhalten: Wenn wir einen längeren blauen Pfeil verwenden, wird der braune Pfeil auch länger. Ist der braune Pfeil länger, ist auch das Ergebnis größer.

Da wir nicht festgelegt haben, welche Zahl genau wir für a eingesetzt haben und wir trotzdem zu gleichen Ergebnissen gekommen sind, ist das ein Hinweis darauf, dass es ein abstraktes Muster gibt, welches die beiden Terme ergebnisgleich macht. Ein solches Muster zu erkennen ist ein weiterer großer Schritt in der Entwicklung einer mathematischen Denkweise eines Schülers.

Welches Muster könnte das sein? Hier ist ein Vorschlag: Zunächst wollen wir uns nicht mehr um die 5 kümmern, weil sie in beiden Termen an der gleichen Stelle vorkommt und somit mit dem Muster, welches möglicherweise für die Ergebnisgleichheit verantwortlich ist, wohl nichts zu tun hat.

Im linken Term haben wir dann noch $-2+a$, was wir uns so vorstellen können.

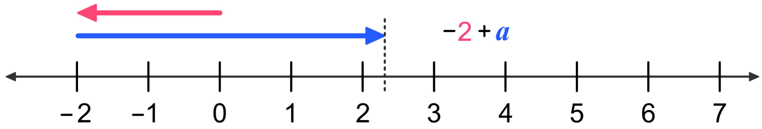


Abb. 20.7 $-2+a$

Im rechten Term kümmern wir uns zunächst um die Klammer.

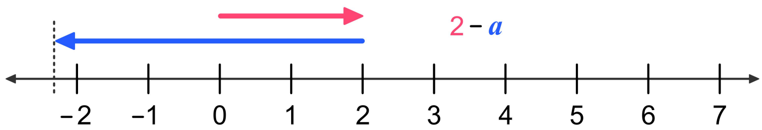


Abb. 20.8 $2-a$

Das Minus-Zeichen vor der Klammer dreht das Zwischenergebnis dann auf die andere Seite.

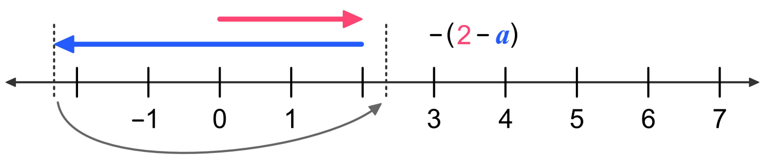


Abb. 20.9 $-(2-a)$

Wenn ich Schüler frage, ob sie dahinter eine Logik erkennen können, sagen sie oft etwas wie: „Naja, wenn ich erst eine bestimmte Strecke nach links gehe und dann eine bestimmte Strecke nach rechts gehe, komme ich am gleichen Punkt an, wie wenn ich erst nach rechts gehe, dann nach links und das Ergebnis am Ende wieder umdrehe."

Das Gute an einer solchen Erklärung ist, dass konkrete Zahlen darin nicht vorkommen. Vermutlich haben also die beiden Terme für ziemlich viele Zahlen das gleiche Ergebnis!

Zum Verständnis der Ergebnisgleichheit dieser Terme kann auch gehören, das gefundene abstrakte Muster zu verallgemeinern. In diesem Fall bietet sich eine Merkregel an: „Ein Minuszeichen vor einer Klammer dreht die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer um."

Stehen die Variablen a,b,c,d,e für positive Zahlen, sehen wir hier die Situation $-a+b-c+d-e$:

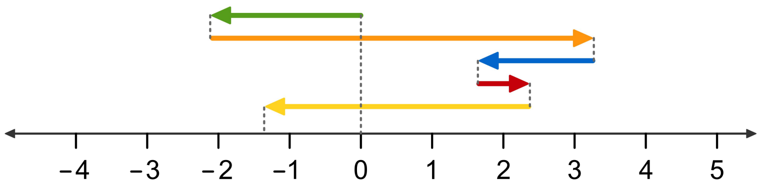


Abb. 20.10 $-a+b-c+d-e$

Im nächsten Bild machen wir erst in der Klammer alles umgekehrt und drehen das Zwischenergebnis dann auf die andere Seite. Das Endergebnis ist dann das gleiche wie oben.

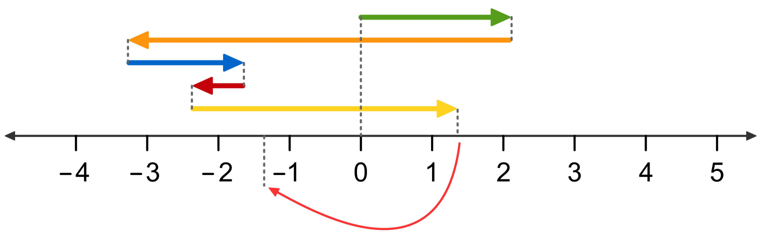


Abb. 20.11 $-(a-b+c-d+e)$

Wir haben nun eine ganze Menge herausgefunden: Wir haben die 5 weggelassen, weil sie in beiden Termen gleichermaßen vorkommt und anschaulich gesehen nichts mit der Ergebnisgleichheit der beiden Terme zu tun hat. Mit etwas zusätzlicher Arbeit könnten wir daraus eine Regel erstellen, wie z. B.: Die gleiche Zahl kann von zwei Termen subtrahiert werden, ohne dass sich etwas daran ändert, ob die Terme ergebnisgleich sind oder nicht.

Außerdem haben wir gesehen, wie wir mit Minuszeichen vor Klammern umgehen können, woraus wir folgende Regel ableiten können: Ist ein Term eine Summe, können wir

1. die Vorzeichen aller Summanden ändern,
2. den gesamten Term einklammern und
3. vor die Klammer ein Minuszeichen schreiben

ohne dass sich am Ergebnis des Terms etwas ändert.

Dabei ist die Begründung so einfach wie das Hin- und Hergehen, was wir aus unserem Alltag kennen. Und damit haben wir noch eine zusätzliche Erkenntnis gewonnen, deren Wert gar nicht hoch genug eingeschätzt werden kann: Hinter einem möglicherweise kompliziert aussehenden „Formelkram“ kann eine ganz einfache Idee stecken. Wenn Schüler das verstanden haben, werden sie beim nächsten Thema wieder nach der einfachen Idee dahinter fragen - die es (fast) immer gibt. Solche Bezüge zu unserer Alltagserfahrung könnte die Mathematik für viele Menschen sehr viel zugänglicher und verstehbar machen. Warum solche intuitiven Erklärungen von vielen

Lehrern (mit denen ich gesprochen habe) absichtlich nicht angeboten werden, erschließt sich mir nicht.

Es gibt noch viele weitere Fragen, deren Antworten zum Verständnis beitragen könnten. Z. B.:

- Warum macht man überhaupt Termumformungen?

  Antwort: Mit Termen gibt man z. B. an, wie etwas gerechnet wird. Möchte man also einem Menschen mitteilen, wie er etwas rechnen soll, gebietet es die Höflichkeit, einen Term erst in eine möglichst einfache Form umzuformen, bevor man ihn weitergibt.

- Wie macht man das eigentlich in der richtigen Mathematik (also in der Universitätsmathematik)?

  Antwort: Der betrachtete Fall ist ein Spezialfall des Distributivgesetzes, welches gar nicht bewiesen, sondern axiomatisch von den reellen Zahlen gefordert wird. Auch daran kann man erkennen, dass die Mathematik nicht deshalb wahr ist, weil die Axiome wahr sind und die Folgerungen daraus wahrheitserhaltend sind, sondern die Axiome so gebaut wurden, dass sie zu dem passen, wovon wir ohnehin schon überzeugt sind.

- Kann man die Richtigkeit dieser Termumformung auch mit der schriftlichen Addition und Subtraktion zeigen?

  Antwort: Ja.

Das Verständnis eines mathematischen Zusammenhangs ist kein konstanter Zustand des Geistes, sondern es entsteht immer wieder neu, ist immer ein bisschen anders und ist nie vollständig, denn letztlich können wir nicht beantworten, warum die Mathematik - im Besonderen wie hier am Beispiel zweier Terme sowie im Allgemeinen - überhaupt funktioniert. Oder anders gesagt: Wenn Gott die Welt gemacht hat, warum hat er sie dann mathematisch gemacht?

Es braucht einen guten Lehrer, der Schülern zeigen kann, wie faszinierend die Unbeantwortbarkeit dieser letzten Fragen sein kann.

Kapitel 21

Äquivalenzumformungen

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit gezeigt, sich Äquivalenzumformungen vorzustellen, die sicher nicht jedem Menschen einleuchten wird. Und gerade deshalb steht sie hier! Unterschiedliche Menschen verstehen Mathematik unterschiedlich. Es ist in vielerlei Hinsicht von Vorteil, sich in das Mathematikverständnis anderer hineinzuversetzen. Das sollte in Lerngruppen idealerweise immer wieder stattfinden. Die eigenen Gedanken anderen zu zeigen, macht selbstsicher und stolz. Außerdem kann der individuelle Blickwinkel auf die Mathematik niemals falsch sein.

In der Schulmathematik wird mit einer Äquivalenzumformung eine Gleichung so verändert, dass die veränderte Gleichung dieselbe Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung hat.

Dabei gibt es vor allem 5 Umformungsmöglichkeiten: Auf beiden Seiten der Gleichung das gleiche

1) addieren oder

2) subtrahieren oder beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl ungleich 0

3) multiplizieren oder

4) dividieren. Als letzte Möglichkeit bleibt noch die

5) Termumformung auf nur einer Seite der Gleichung.

Wie kann man sich nun vorstellen, dass eine Äquivalenzumformung die Lösungsmenge nicht ändert?

Wenn Äquivalenzumformungen erklärt werden, geschieht dies meist mit einer Balkenwaage. Deshalb wollen wir hier einen anderen Weg einschlagen und uns ansehen, wie Gleichungen mit ihren Äquivalenzumformungen an der Zahlengeraden aussehen. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$3x - 4 = x + 2$$

zusammen mit ihrer Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3\}$.

Wenn wir für x die Zahl 3 einsetzen, sieht diese Gleichung auf der Zahlengeraden so aus:

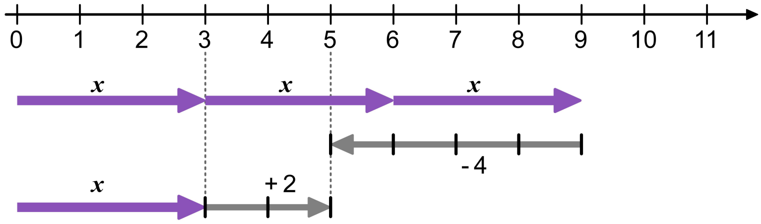


Abb. 21.1 $3x-4=x+2$

Dass die Lösungsmenge der Gleichung $3x-4=x+2$ gleich $\mathbb{L}=\{3\}$ ist, bedeutet nicht nur, dass diese Gleichung für $x=3$ richtig ist, sondern auch, dass sie für alle anderen Zahlen, die wir für x einsetzen könnten, falsch ist. Auch das können wir uns an der Zahlengeraden ansehen. Setzen wir doch mal $x=3,5$.

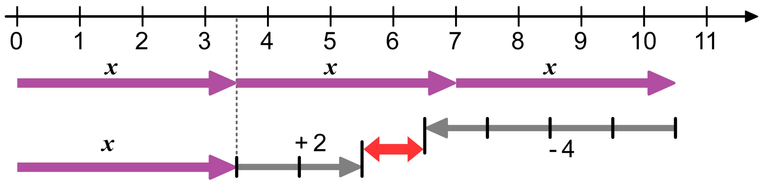


Abb. 21.2 $3x-4>x+2$

Wie wir sehen, ist die Gleichung nun falsch, weil die linke Seite größer ist als die rechte Seite. Auch wenn wir für x noch größere Zahlen einsetzten, änderte sich daran nichts - was wir uns ohne weitere Graphiken überlegen können.

Setzen wir für x eine kleinere Zahl als 3 ein - z. B. 2,5 - ist die Gleichung auch falsch, weil dann die rechte Seite größer ist als die linke Seite. Und auch diese Situation änderte sich durch das Einsetzen noch kleinerer Zahlen nicht.

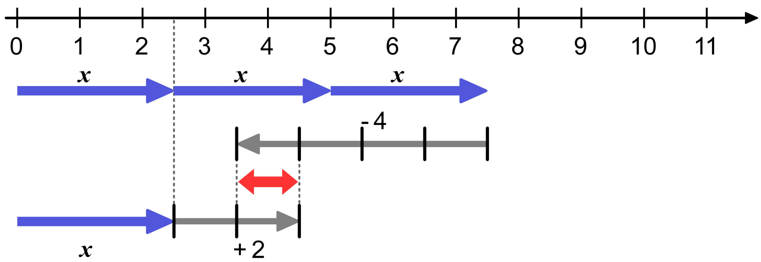


Abb. 21.3 $3x-4<x+2$

Wir haben nun anschaulich begründet, warum die Zahl 3 tatsächlich die einzige Lösung der Gleichung $3x-4=x+2$ ist. Aber gilt das auch, wenn wir Äquivalenzumformungen auf diese Gleichung anwenden, z. B., wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung x addieren oder subtrahieren? Schließlich wissen wir am Anfang des Lösungsprozesses einer Gleichung nicht, wie groß x sein muss.

Probieren wir doch einfach mal etwas aus! Was passiert, wenn wir in der Situation von Abb. 21.3 auf beiden Seiten ein x addieren?

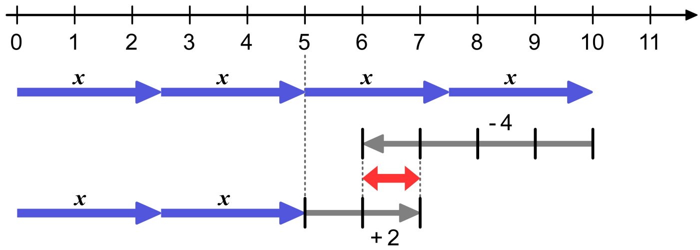


Abb. 21.4 $4x-4<2x+2$

Wie wir sehen, hat sich der „interessante“ Teil der Gleichung auf der Zahlengerade nach rechts verlagert. Nun gut, dann können wir ja auch auf beiden Seiten $2x$ subtrahieren.

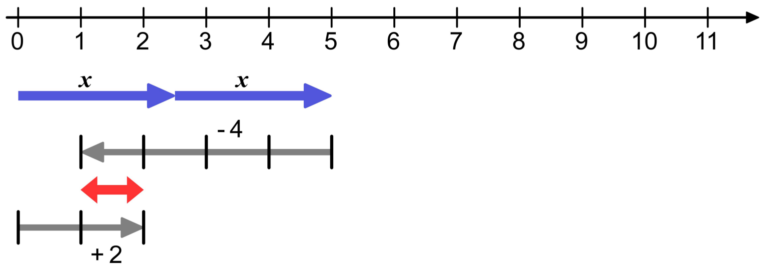


Abb. 21.5 $2x-4<2$

In allen drei Fällen bleibt der Betrag, um den die linke Seite kleiner ist als die rechte Seite, gleich. Wir könnten also noch beliebig viele x addieren oder subtrahieren, ohne dass sich an der unterschiedlichen Größe der beiden Gleichungsseiten etwas ändern würde.

Schauen wir uns nochmals die Situation in Abb. 21.2 an und addieren x auf beiden Seiten. Es ist dann - wie in Abb. 21.2 auch - die linke Seite größer als die rechte Seite und zwar um denselben Betrag.

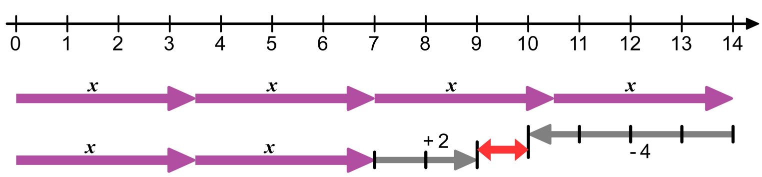


Abb. 21.6 $4x-4>2x+2$

Die Differenz bleibt auch dann gleich, wenn wir auf beiden Seiten $2x$ subtrahieren. Das bedeutet: Auf diese Weise werden wir die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern, denn der „interessante“ Teil der Gleichung wird durch diese Äquivalenzumformungen gar nicht beeinflusst.

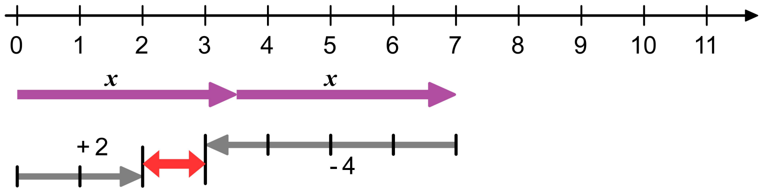


Abb. 21.7 $2x - 4 > 2$

Nun ist es wohl nicht mehr verwunderlich, dass $x = 3$ die richtige Lösung bleibt, wenn wir die Ausgangsgleichung $3x - 4 = x + 2$ umformen, indem wir auf beiden Seiten x subtrahieren.

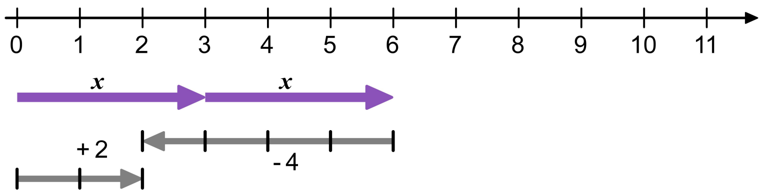


Abb. 21.8 $2x - 4 = 2$

Beflügelt von unseren Erkenntnissen, können wir nun sogar eine neue Äquivalenzumformung einführen, nämlich die Addition von *irgendetwas* auf beiden Seiten einer Gleichung - hier abgekürzt durch *iwas*.

$$\begin{array}{rrcll} & 2x - 4 & = & 2 & \quad \vert + iwas \\ \Leftrightarrow & 2x - 4 + iwas & = & 2 + iwas & \end{array}$$

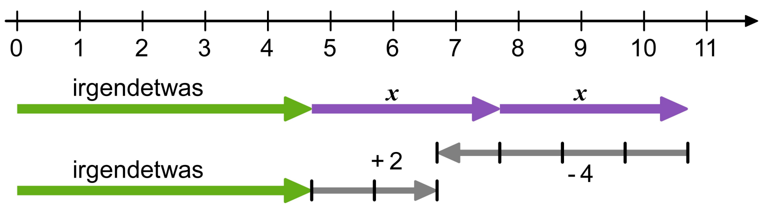


Abb. 21.9 $3x - 4 +$ *irgendetwas* $= x + 2 +$ *irgendetwas*

Kapitel 22

Warum ist Minus mal Minus Plus?

Es gibt viele Möglichkeiten, sich $-(-2)$ vorzustellen. Hier ist eine mit Schokoladenkeksen: 9 Kekse sind vorhanden.

Abb. 22.1 9 Schokoladenkekse (Cookie von Corleto/Unsplash)

5 davon darf ich essen.

Abb. 22.2 9-5 Schokoladenkekse

Nun esse ich aber 2 weniger als ich darf.

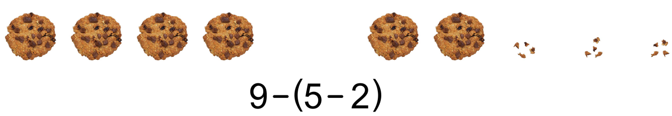


Abb. 22.3 $9-(5-2)$ Schokoladenkekse

Also lege ich 2 Kekse wieder zurück.

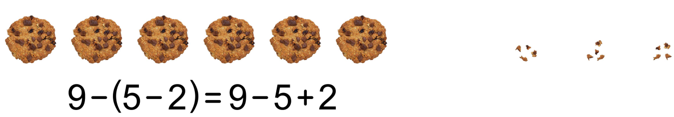


Abb. 22.4 9-5+2 Schokoladenkekse

Haben wir damit tatsächlich $-(-2) = +2$ gezeigt? Wir hätten auch etwas deutlicher schreiben können:

$$9-(5-2) = 9-5-(-2) = 9-5+2$$

Wie wir sehen, ist aus $-(-2)$ die Zahl $+2$ geworden.

Wir können sogar noch deutlicher werden, wenn wir uns auf das Rechnen mit Klammern besinnen. Hier ist das Distributivgesetz:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

Um auf die gleiche Rechnung wie mit den Keksen zu kommen, setzen wir für a die Zahl -1, für b die Zahl 5 und für c die Zahl -2 ein. Also

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$-1\cdot(5+(-2)) = -1\cdot 5 + (-1)\cdot(-2)$$

Abb. 22.5 Distributivgesetz mit negativen Zahlen

Und wie wir am Anwendungsbeispiel gesehen haben, muss nun $(-1)\cdot(-2)$ gleich $+2$ sein.

Nicht alle Menschen finden diese Erklärung hinreichend, was daran liegen könnte, dass sich Mathematik normalerweise nicht nach dem Rechnen mit Schokoladenkeksen richten muss.

Es gibt Standardmodelle, die man zum Verständnis heranziehen kann. Ein solches Modell ist die Zahlengerade.

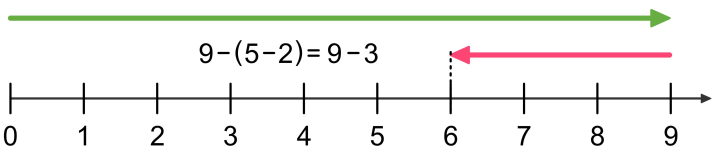


Abb. 22.6 Standardmodell: Zahlengerade 1

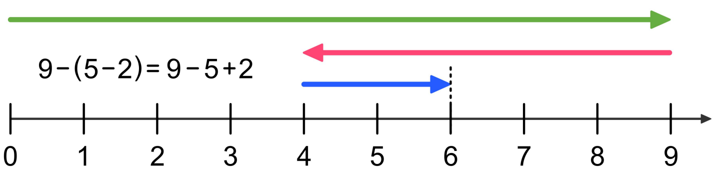


Abb. 22.7 Standardmodell: Zahlengerade 2

Wenn wir uns darauf einigen können, dass Minus mal Minus gleich Plus ist, wenn es in einem Standardmodell funktioniert, dann haben wir das jetzt zumindest an einem Beispiel gezeigt.

Aber auch aus unserem Alltag sind wir nichts anderes gewohnt: Wenn wir nicht fünf Schritte, sondern nur drei Schritte nach links gehen, kommen wir an der gleichen Stelle an, wie wenn wir erst fünf Schritte nach links und dann zwei Schritte nach rechts gehen.

Kapitel 23

Unser Gespür für Wahrscheinlichkeiten

23.1 Blaue und rote Kugeln

Angenommen, wir haben einen Behälter mit einer blauen und einer roten Kugel. Wir ziehen zufällig eine der Kugeln, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder zurück. Diesen Vorgang können wir nun beliebig oft wiederholen.

Würden wir das Experiment sehr oft durchführen, würden wir vermutlich ungefähr so viele blaue wie rote Kugeln ziehen.

Aber warum ist das so? Hätten wir nicht auch genauso gut überwiegend rote Kugeln ziehen können?

Es liegt auf jeden Fall nicht daran, dass sich die relative Häufigkeit der roten Kugeln „einpendeln“ muss oder dass sie sich „stabilisiert“. Es gibt keine dunkle Kraft, die die Ergebnisse von Zufallsversuchen beeinflusst. Und nein, es sind auch nicht die Illuminaten (die normalerweise auch etwas anderes zu tun haben). Das, was wir beobachten, ist ein sehr simples Phänomen der Kombinatorik.

Wir können uns einmal ansehen, welche Möglichkeiten wir haben, wenn wir 4-mal ziehen.

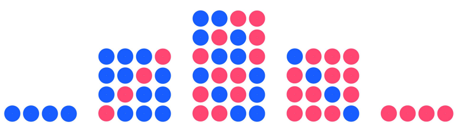


Abb. 23.1 Alle Möglichkeiten beim 4-maligen Ziehen

Die Anzahlen der Möglichkeiten entsprechen dabei genau unserem Empfinden: Wir würden ein Ergebnis mit zwei blauen und zwei roten Kugeln als normal empfinden, weil es von diesen Ergebnissen viele gibt. Das Ergebnis mit vier blauen wie auch das Ergebnis mit vier roten Kugeln würden wir als ungewöhnlich empfinden, weil es diese Ergebnisse jeweils nur einmal gibt.

Schauen wir uns ein solches Kugelbild mal für das 6-fache Ziehen an.

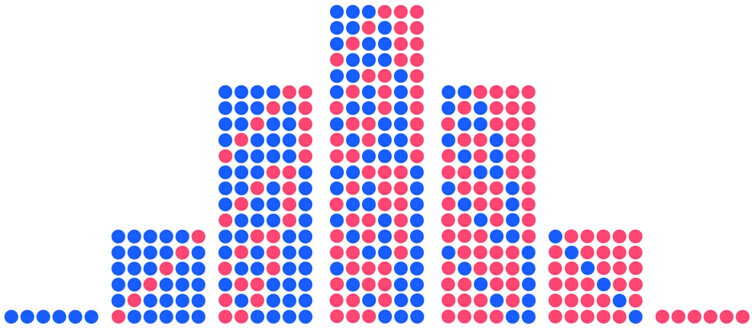


Abb. 23.2 Alle Möglichkeiten beim 6-maligen Ziehen

Die Anzahlen der Möglichkeiten geben auch hier genau das wieder, was wir empfinden:

Würden wir beim sechsmaligen Ziehen drei blaue und drei rote Kugeln ziehen, würden wir das als normal empfinden - einfach deshalb, weil es davon so viele Möglichkeiten gibt. Auch ein Ergebnis mit vier blauen Kugeln oder eines mit vier roten Kugeln würden wir nicht als ungewöhnlich empfinden, weil es von diesen Ergebnissen ebenfalls ziemlich viele gibt. Das Ergebnis mit nur blauen und das Ergebnis mit nur roten Kugeln würden wir aber als ungewöhnlich empfinden, weil es von diesen einfarbigen Ergebnissen so wenige gibt. Führt man dieses Experiment mit Schülern durch, kommen bei diesen einfarbigen Ergebnissen die ersten Zweifel an der Zufälligkeit des Experiments auf.

Schauen wir uns noch die Anzahlen beim 4-fachen, 6-fachen, 8-fachen und 10-fachen Ziehen an.[1]

[1] Es werden hier nur gerade Anzahlen von Zügen betrachtet, weil die Schaubilder dann aus Symmetriegründen besser vergleichbar sind.

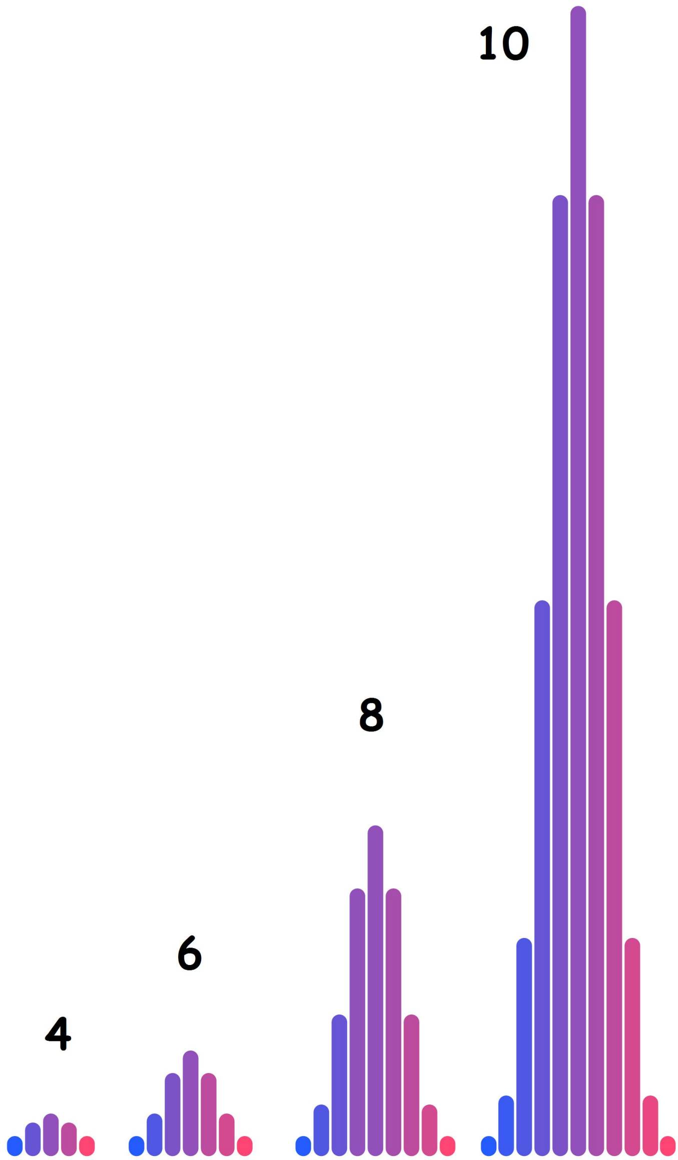


Abb. 23.3 Möglichkeiten beim 4-, 6-, 8- und 10-fachen Ziehen

Würden wir beim 10-fachen Ziehen nur blaue oder nur rote Kugeln ziehen, fänden wir das wohl *sehr* ungewöhnlich. Aber auch neun blaue oder neun rote Kugeln würden uns wohl überraschen - einfach deshalb, weil es davon so wenige Möglichkeiten gibt.

Im Gegenzug würden wir ein Ergebnis mit ungefähr so vielen blauen wie roten Kugeln nicht ungewöhnlich finden - weil es von diesen Ergebnissen so viele gibt.

Damit haben wir die Idee herausgearbeitet, mit der wir verstehen können, warum wir so oft ungefähr genauso viele blaue wie rote Kugeln ziehen: Es gibt von diesen Ergebnissen einfach viel mehr als von den Ergebnissen mit sehr vielen blauen oder mit sehr vielen roten Kugeln.

Und das liegt wiederum an den Variationsmöglichkeiten: Wie wir schon beim 4-fachen und 6-fachen Ziehen gesehen haben, erhalten wir viele Variationen, wenn wir ungefähr genauso viele blaue wie rote Kugeln anordnen können und wir erhalten wenige Variationen, wenn die meisten (oder alle) der gezogenen Kugeln blau sind oder die meisten (oder alle) der gezogenen Kugeln rot sind.

Es ist also wahrscheinlicher, Ergebnisse mit ungefähr genauso vielen blauen wie roten Kugeln zu erhalten als andere Ergebnisse, weil es von den Ergebnissen mit „ausgeglichenem" Farbanteil einfach viel mehr gibt als von den anderen.

Oder - um es zwar vereinfachend aber noch richtig und vor allem markig auszudrücken: Es gibt in der Mitte mehr Ergebnisse als rechts und links.

Wir können noch ein weiteres Phänomen beobachten: Je häufiger wir ziehen, desto größer werden die Unterscheide der Anzahlen der Variationen. Es gibt zwar beim 4-fachen Ziehen mehr Ergebnisse in der Mitte als an den Rändern, aber beim 10-fachen Ziehen gibt es in der Mitte viel viel mehr Ergebnisse als an den Rändern.

Dieser Trend setzt sich fort, wenn wir Säulendiagramme für größere Anzahlen von Zügen erstellen. Wenn wir einen Millimeter pro Ergebnis veranschlagen, ist die mittlere Säule beim 10-fachen Ziehen 25,2 cm lang. Beim 20-fachen Ziehen ist die mittlere Säule ca. 185 m lang, beim 30-fachen Ziehen ist die mittlere Säule über 155 km lang und beim 40-fachen Ziehen reicht die mittlere Säule schon mehr als dreimal um die Erde. Dabei tut sich an den Rändern nicht so viel: Die drei links stehenden Säulen haben beim 40-fachen Ziehen die Längen 1 mm, 4 cm und 78 cm. So ist es beim 40-fachen Ziehen also sehr unwahrscheinlich, 38 oder mehr blaue Kugeln zu ziehen. Das gleiche gilt für 38 oder mehr rote Kugeln.

Um die Frage dieses Abschnitts zu beantworten: Nein, die relative Häufigkeit muss sich nicht einpendeln. Es gibt aber viel mehr Ergebnisse mit ungefähr genauso vielen blauen wie roten Kugeln als es Ergebnisse gibt, bei denen die meisten Kugeln blau oder rot sind. Richtig ist: Je häufiger wir ziehen, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis mit ungefähr genauso vielen blauen wir roten Kugeln.

Mathematisch formuliert muss sich also die relative Häufigkeit eines Ereignisses auch nach sehr vielen Versuchsdurchführungen nicht der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses annähern, sondern es steigt lediglich die Wahrscheinlichkeit der Annäherung mit zunehmender Anzahl der Versuchsdurchführungen. Das nennt man auch Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

23.2 Wege im Galton-Brett

Im vorigen Abschnitt haben wir als Grundversuch das Ziehen einer Kugel aus einem Behälter, in dem sich eine blaue und eine rote Kugel befindet, betrachtet. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für die blaue wie für die rote Kugel gleich 0,5. Wenn wir dann die

Kugel zurücklegen und erneut ziehen, finden wie die gleichen Wahrscheinlichkeiten vor.

So ähnlich ist das auch beim Galton-Brett. Eine Kugel fällt von oben auf den ersten runden Holzstift. Die Kugel kann nun nach rechts oder nach links fallen. Ist der Stift genau mittig angebracht, beträgt die Wahrscheinlichkeit, nach rechts zu fallen, 0,5. Die Wahrscheinlichkeit, nach links zu fallen, ist dann auch gleich 0,5.

Unabhängig, ob die Kugel nach rechts oder links fällt, trifft sie auf einen weiteren mittig angebrachten Holzstift, an dem sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach rechts und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach links fällt usw.

Bleibt die Kugel im mittleren Fach liegen, ist sie vorher genauso oft nach rechts wie nach links gefallen. Das entspricht einem Ergebnis mit genauso vielen blauen wie roten Kugeln aus unserem vorherigen Experiment. Damit die Kugel in einem Fach rechts der Mitte liegen bleibt, muss sie entsprechend öfter nach rechts als nach links gefallen sein. Für das Fach rechts außen muss die Kugel an jedem Holzstift nach rechts abgebogen sein.

Lassen wir viele Kugeln durch die Anordnung der Holzstifte fallen, erhalten wir typischerweise ein Kugelmuster wie auf dem Foto.

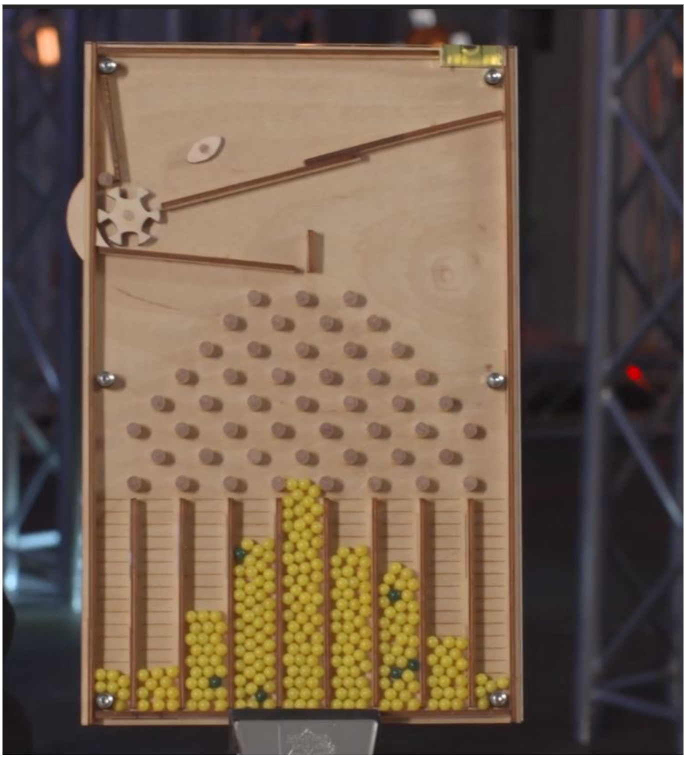


Abb. 23.4 Galton-Brett

Aber warum ist das so? Weil sich die relative Häufigkeit von Rechts-Fällen bei 0,5 einpendeln muss? Sicher nicht, denn, egal auf welcher Stufe des Galton Bretts sich die Kugel befindet, sie weiß sicher nicht, dass sie schon z. B. zu oft nach rechts gefallen ist und versucht nun, öfter nach links zu fallen, um das wieder auszugleichen.

Es liegt daran, dass es mehr Wege gibt, die in die Mitte führen als es Wege gibt, die zu den Fächern am Rand führen. Das entspricht der Tatsache aus unserem vorherigen Versuch, dass es *dann* die meisten Variationen blauer und roter Kugeln gibt, wenn genauso viele blaue wie rote Kugeln beteiligt sind.

Zwar hat jeder Weg durch die Holzstifte die gleiche Wahrscheinlichkeit, da es aber mehr Wege in die Mitte als an den Rand gibt, ist es wahrscheinlicher, dass die Kugel in die Mitte als an den Rand fällt.

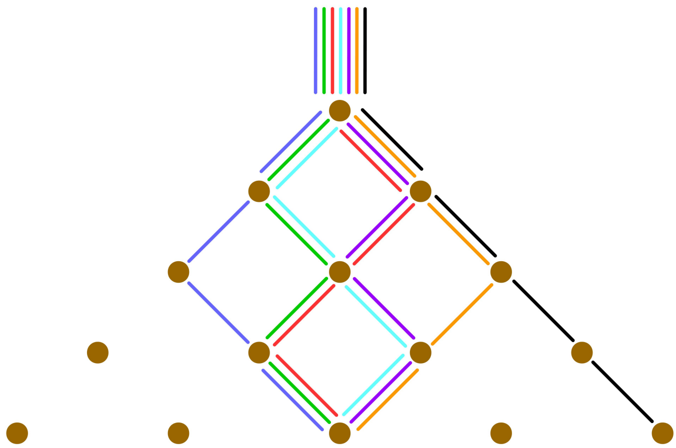


Abb. 23.5 Wege im Galton-Brett

Das, was gemeinhin mit dem „Einpendeln der relativen Häufigkeit“ bezeichnet wird, kommt also nicht deshalb zustande, weil eine Kugel im Galton Brett in die Mitte „will“. Mathematisch gesehen ist das also ein Thema der Kombinatorik und nicht der Konvergenz.

Kapitel 24

Statistik ganz einfach

Warum funktioniert Statistik?

Wenn wir eine Umfrage durchführen und 100 zufällig ausgesuchte Personen fragen, ob sie Schokolade mögen, möchten wir normalerweise nichts über diese 100 Personen wissen, sondern möchten etwas über den Anteil der Menschen in der Bevölkerung wissen, die Schokolade mögen. Aber wie ist das möglich? Zum Beispiel: Wenn 60 der befragten Personen Schokolade mögen, was wissen wir dann über die Leute, die wir nicht gefragt haben?

Auch wenn die Frage zunächst vielleicht etwas paradox erscheint, haben wir Menschen doch ein ganz gutes Gefühl dafür, wie das funktionieren kann. Mathematisch gesehen geht es hier um den Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit. Die Stichprobe besteht in unserem Beispiel aus den 100 befragten Personen und die Grundgesamtheit ist die Bevölkerung, über die wir etwas wissen wollen. Deshalb können wir die Frage auch so stellen: Was wissen wir über die Grundgesamtheit, wenn wir (nur) die Stichprobe kennen?

Die Erklärung wird letztlich auf einen einzigen Satz hinauslaufen: Die meisten Stichproben kommen aus ähnlichen Grundgesamtheiten.

Wir werden in diesem Buch nicht alle mathematischen Einzelheiten besprechen, sondern nur grob die Ideen nachzeichnen.

Schauen wir uns zunächst ein möglichst einfaches Beispiel an: Wir haben vier Boxen mit jeweils 5 Kugeln gegeben. In der ersten Box ist eine Kugel rot und die restlichen vier Kugeln sind blau. In der zweiten Box sind zwei Kugeln rot und die restlichen sind blau usw. (Siehe Abb. 24.1)

Wir wollen nun aus einer der Boxen dreimal (mit Zurücklegen) zufällig eine Kugel ziehen. Angenommen, wir haben in unserer Stichprobe nun eine blaue und zwei rote Kugeln. Aus welcher Box haben wir gezogen? Gefühlsmäßig würden wir wohl sagen: Wahrscheinlich haben wir aus der Box $\mathbf{G_{53}}$ gezogen, weil der Anteil der roten Kugeln in dieser Box dem Anteil der roten Kugeln in der Stichprobe am ähnlichsten ist. Wir könnten natürlich auch aus der Box $\mathbf{G_{51}}$ gezogen haben, aber das wäre unwahrscheinlich.

Rechnerisch kommen wir zu der Wahrscheinlichkeit, aus $\mathbf{G_{53}}$ gezogen zu haben, wenn wir die Anzahl der möglichen Stichproben vom Umfang 3 mit 2 roten Kugeln, die man aus $\mathbf{G_{53}}$ ziehen kann, durch die Anzahl aller möglichen Stichproben vom Umfang 3 mit 2 roten Kugeln aus allen Boxen teilen. Genauer:

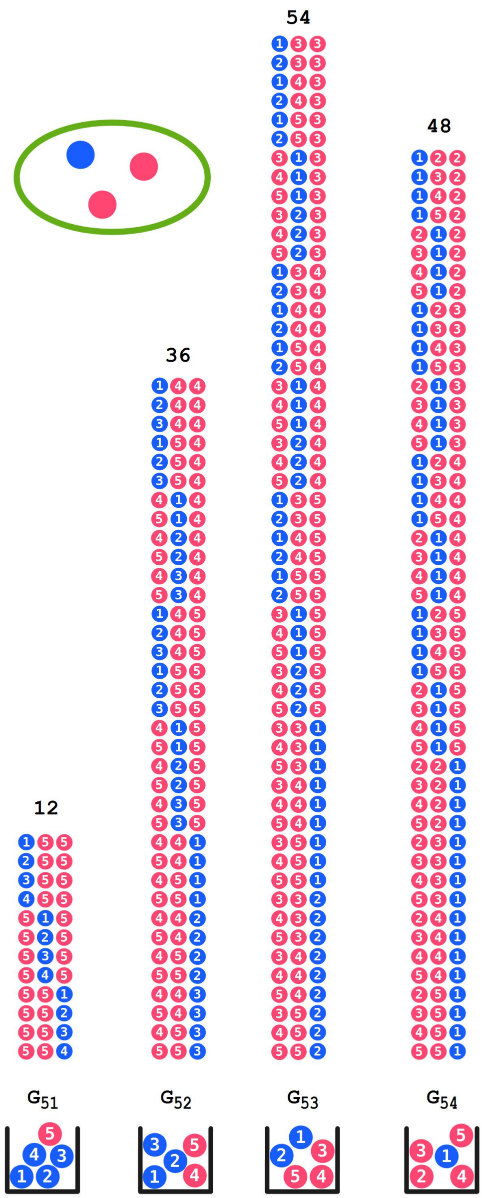


Abb. 24.1 Alle (3;2)-Stichproben aus Boxen mit 5 Kugeln

Wie Abb. 24.1 zeigt, gibt es 54 Stichproben vom Umfang 3 mit 2 roten Kugeln, die aus der Box $\mathbf{G_{53}}$ gezogen werden können. Insgesamt gibt es $12 + 36 + 54 + 48$ Stichproben vom Umfang 3 mit 2 roten Kugeln, die aus den vier Boxen gezogen werden können. Teilen wir nun die Anzahl der möglichen Stichproben aus $\mathbf{G_{53}}$ durch die Anzahl aller möglichen Stichproben aus allen Boxen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, aus $\mathbf{G_{53}}$ gezogen zu haben. Also:

$$\mathbf{P}(\mathbf{G_{53}}) = \frac{54}{12+36+54+48} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Entsprechend erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, aus $\mathbf{G_{51}}$ gezogen zu haben, wenn wir die Anzahl der möglichen Stichproben aus der Box $\mathbf{G_{51}}$ - also 12 - durch die Anzahl aller möglichen Stichproben aus allen Boxen - also 150 - teilen. Damit haben wir:

$$\mathbf{P}(\mathbf{G_{51}}) = \frac{12}{12+36+54+48} = \frac{124}{150} = \frac{2}{25} = 0,08$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, aus $\mathbf{G_{53}}$ gezogen zu haben, 4,5-mal größer als die Wahrscheinlichkeit, aus $\mathbf{G_{51}}$ gezogen zu haben - weil es 4,5-mal mehr Stichproben vom Umfang 3 mit 2 roten Kugeln aus $\mathbf{G_{53}}$ als aus $\mathbf{G_{51}}$ gibt.

Wenn wir - wie in der Mathematik üblich - die Boxen, aus denen wir Kugeln ziehen können, als Grundgesamtheiten bezeichnen, können wir unsere Beobachtungen vereinfacht mit folgendem Satz zusammenfassen: Die meisten möglichen Stichproben, deren Anteil roter Kugeln genauso ist, wie in der gezogenen Stichprobe, kommen aus Grundgesamtheiten, deren Anteil roter Kugeln genauso oder so ähnlich ist, wie in der gezogenen Stichprobe.

Oder noch einfacher:

Die meisten Stichproben kommen
aus ähnlichen Grundgesamtheiten.

Deshalb ist es wahrscheinlicher, dass eine gezogene Stichprobe aus einer Grundgesamtheit kommt, die so ähnlich ist wie die Stichprobe und es ist unwahrscheinlicher, dass eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit gezogen wurde, die ganz anders ist als die Stichprobe.

Übertragen wir diesen fundamentalen Zusammenhang auf unsere eingangs erwähnte Umfrage, haben wir hier die mathematische Begründung für das gesehen, was wir ohnehin empfinden: Bestätigen uns 60 von 100 Personen, dass sie Schokolade mögen, halten wir es für wahrscheinlich, dass wir die 100 Personen aus einer Bevölkerung zufällig ausgewählt haben, in der ungefähr 60 % der Menschen Schokolade mögen. Wir könnten diese 100 Personen, von denen 60 % Schokolade mögen, auch aus einer Bevölkerung gezogen haben, in der viel weniger Leute Schokolade mögen; das wäre aber unwahrscheinlich. Und das wissen wir, weil die meisten 60-%-Stichproben aus 60%-Grundgesamtheiten kommen und weniger Stichproben aus 50%-Grundgesamtheiten, und noch viel weniger Stichproben aus 40%-Grundgesamtheiten kommen. Damit wissen wir zwar immer noch nichts über die einzelnen Menschen, die wir nicht gefragt haben, aber wir können angeben, wie wahrscheinlich die möglichen Anteile der Schokolade-mögenden Personen in der

Bevölkerung sind.

Haben wir die Mittel der Kombinatorik zur Verfügung, können wir uns nicht nur um sehr kleine Stichproben und um Grundgesamtheiten mit sehr wenigen Kugeln kümmern. Ziehen wir z. B. eine Stichprobe vom Umfang 10, in der 60 % der Kugeln rot sind, können wir die Anzahlen der 60%-Stichproben ausrechnen, die wir aus einer 5%-Grundgesamtheit, aus einer 10%-Grundgesamtheit, aus einer 15%-Grundgesamtheit usw. ziehen können. Dazu müssten wir zwar festlegen, wie viele Kugeln in den möglichen Grundgesamtheiten sein sollen. Wir würden aber schnell feststellen, dass die Verhältnisse der Anzahlen untereinander immer gleich bleiben, egal wie viele Kugeln in den Grundgesamtheiten sind. Also unabhängig davon, ob in allen Grundgesamtheiten jeweils 20 Kugeln, 1000 Kugeln oder 500 000 Kugeln enthalten sind, wir würden immer eine Verteilung erhalten, wie sie in Abb. 24.2 dargestellt ist.

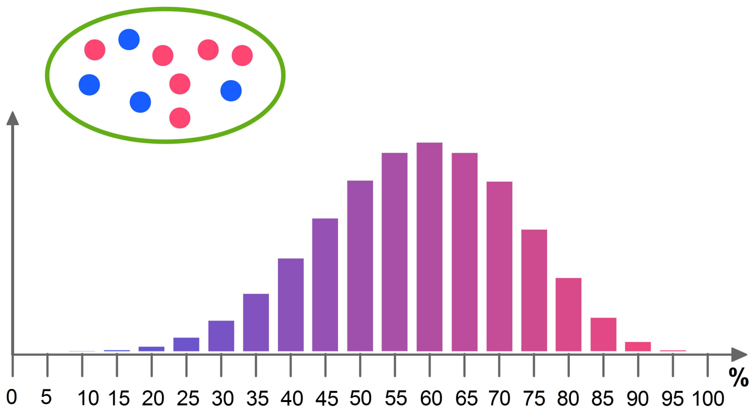


Abb. 24.2 20 Grundgesamtheiten

Die meisten Stichproben, in denen 60% der Kugeln rot sind, kommen aus der Grundgesamtheit, in der 60% der Kugeln rot sind. Etwas weniger Stichproben kommen aus den Grundgesamtheiten, in denen 55% bzw. 65% der Kugeln rot sind. Noch weniger Stichproben kommen aus den Grundgesamtheiten, in denen 50% bzw. 70% der Kugeln rot sind usw.

Das gleiche gilt für die Wahrscheinlichkeiten (wobei wir die einzelnen Rechnungen hier auslassen): Am wahrscheinlichsten ist es, eine 60%-Stichprobe aus einer 60%-Grundgesamtheit zu ziehen. Es ist etwas weniger wahrscheinlich, eine 60%-Stichprobe aus einer 55%-Grundgesamtheit oder aus einer 65%-Grundgesamtheit zu ziehen usw.

Wenn wir beliebig große Stichproben und beliebig viele Grundgesamtheiten zulassen wollen, können wir den obigen Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit auch mit einem Integral der angepassten Likelihood-Funktion $\mathscr{L}(x)$ durchführen.

$$\mathbf{P}_{n;k}([x_u;x_o]) = \int_{x_u}^{x_o} (n+1)\cdot \mathscr{L}_{n;k}(x)dx \quad \text{mit } x_u;x_o \in \; [0;1] \subset \mathbb{R} \;\; \text{und}$$

$$\mathscr{L}_{n;k}(x) = \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$$

Damit können wir z. B. ausrechnen, dass bei 100 befragten Personen und 60 Personen, die Schokolade mögen, die Wahrscheinlichkeit, dass in der Bevölkerung der Anteil der Schokolade-mögenden Personen zwischen 52% und 68% liegt, ungefähr gleich 0,9 ist.

$$\mathbf{P}_{100;60}([0,52;0,68]) = \int_{0,52}^{0,68} 101 \cdot \mathscr{L}_{100;60}(x)dx \approx 0,9$$

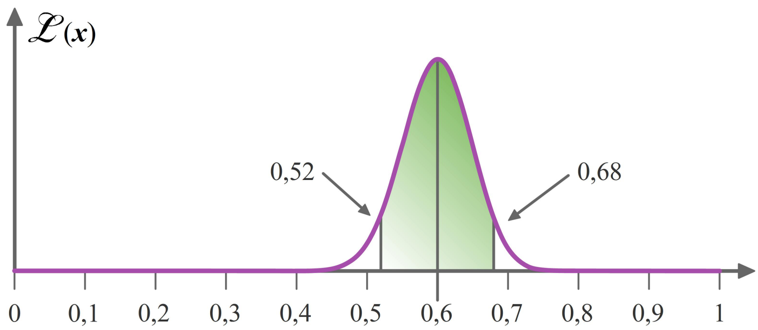


Abb. 24.3 Die angepasste Likelihood.Funktion.

Kapitel 25

Warum ist $2^0 = 1$?

Das mit den Potenzen ist so eine Sache in der Mathematik. Es fängt ganz einfach an: Es ist z. B. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, weil die „Hochzahl“, die eigentlich Exponent heißt, angibt, wie oft die Zahl 2 multipliziert werden soll. Entsprechend ist $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ und $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Wenn wir uns aber fragen, was 2^1 oder 2^0 sein könnte, wird es plötzlich viel komplizierter. Betrachtet man die Tatsache, dass wir beim Ausschreiben der Potenz 2^3 den Faktor 2 dreimal hingeschrieben haben und dass wir beim Ausschreiben der Potenz 2^2 den Faktor 2 zweimal hingeschrieben haben, entbehrte es nicht einer gewissen Logik, wenn 2^1 gleich 2 wäre. Allerdings ist die 2 nun kein Faktor mehr, wenn sie einfach so in der Landschaft herumsteht. Und was machen wir mit 2^0? Nichts hinschreiben?

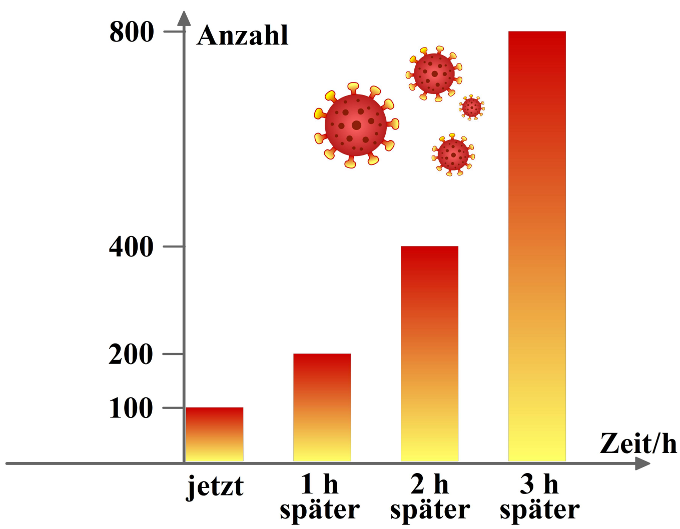


Abb. 25.1 Anzahlen der Viren

Um zu sinnvollen Ergebnissen zu kommen, können wir uns einmal das Wachstum von Viren vorstellen (siehe Abb. 25.1) Angenommen, es gibt irgendwo 100 Viren, die sich so vermehren, dass sie ihre Anzahl jede Stunde verdoppeln. Dann gibt es jetzt 100 Viren, in einer Stunde gibt es 200, in zwei Stunden 400 und in drei Stunden 800 Viren.

Wir berechnen die Anzahl der Viren nach einer Stunde, indem wir die jetzige Anzahl der Viren mit 2 multiplizieren. Die Anzahl nach zwei Stunden erhalten wir, indem wir mit 2^2 multiplizieren und die Anzahl nach drei Stunden, indem wir mit 2^3 multiplizieren (Abb. 25.2).

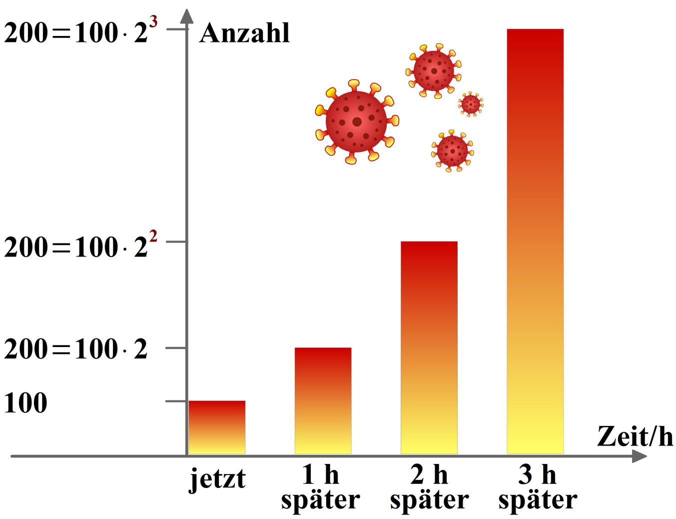


Abb. 25.2 Berechnung der Anzahlen

Wenn die Exponenten bei der Multiplikation mit 2^2 und 2^3 angeben, wie oft wir mit 2 multipliziert haben, ist es sinnvoll, $200 = 100 \cdot 2^1$ zu schreiben, da wir 100 einmal mit 2 multiplizieren, um auf 200 zu kommen.

Wie oft müssen wir denn 100 mit 2 multiplizieren, damit das Ergebnis 100 herauskommt? Richtig: Gar nicht! Also $100 = 100 \cdot 2^0$. Damit sich aber am Ergebnis 100 nichts ändert, wenn wir 100 mit 2^0 multiplizieren, muss gelten:

$$2^0 = 1$$

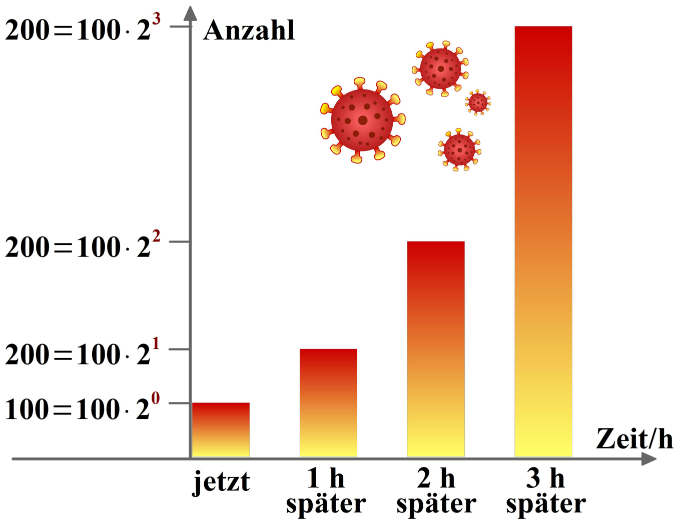


Abb. 25.3 $2^0 = 1$

Man mag sich aber fragen, ob man in der Mathematik denn einfach so etwas definieren kann. Nun, im Prinzip ja. Wie sinnvoll eine jeweilige Definition ist, ist allerdings fraglich. Die folgenden Definitionen werden sich vermutlich nicht durchsetzen.

Definition 1 $2+2=5$

Definition 2 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+c$

Definition 3 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+c}$

Andererseits vollzieht sich mathematischer Fortschritt üblicherweise auch durch neue Definitionen. So könnte Definition 3 als Grundlage einer neuen Bruchrechnung dienen. Ob diese Bruchrechnung dann in irgendeiner Weise besser ist als die bisherige, müssten dann vielleicht deren Befürworter erklären.

Wie steht es nun mit unserer Definition $2^0 = 1$? Ist diese Definition sinnvoll?

Wenn wir mit dieser Definition (zusammen mit noch weiteren Definitionen) die Funktion

$$f(x) = 100\cdot 2^x$$

definieren, erhalten wir den in Abb. 25.4 dargestellten Graphen. Dieser beschreibt zu jedem denkbaren Zeitpunkt das Wachstum der Viren. Jede andere Definition von 2^0 würde den Graphen kaputt machen. Das ist schon ein ziemlich starkes Argument!

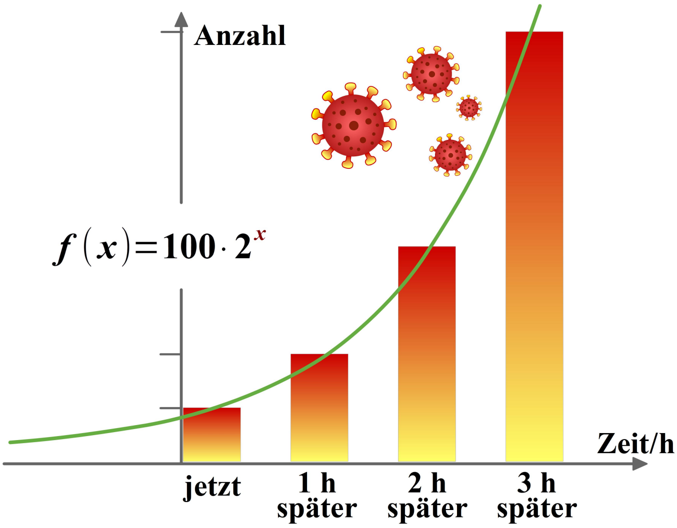


Abb. 25.4 Wachstumsfunktion

Kapitel 26

Uneigentliches Integral

In diesem Abschnitt sehen wir uns an, wie eine unendlich breite Fläche einen endlichen Flächeninhalt haben kann. Obwohl hier kurz ein paar mathematische Ausdrücke gezeigt werden, braucht man aber keine Kenntnisse der Integralrechnung, um die Idee zu verstehen - die ist nämlich so einfach wie das Zerschneiden eines Blatts Papier in viele Streifen.

Unsere Intuition sagt uns: Auch wenn ein Rechteck nur eine „geringe" Höhe hat, so wächst der Flächeninhalt aber doch über alle Grenzen, wenn das Rechteck immer breiter wird.

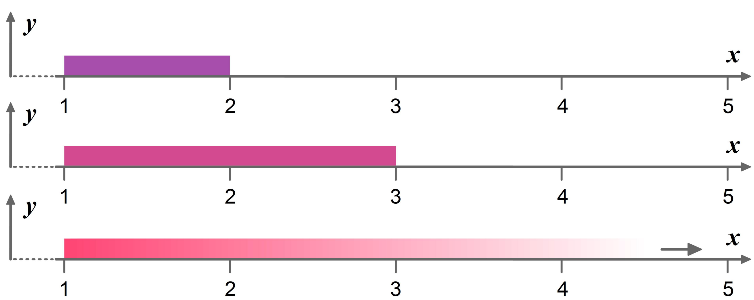


Abb. 26.1 Unendlich wachsender Flächeninhalt

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir unter anderem die Flächen berechnen, die sich zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse in bestimmten Grenzen befinden.

Hier haben wir einen Teil des Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = 0,5^x$.

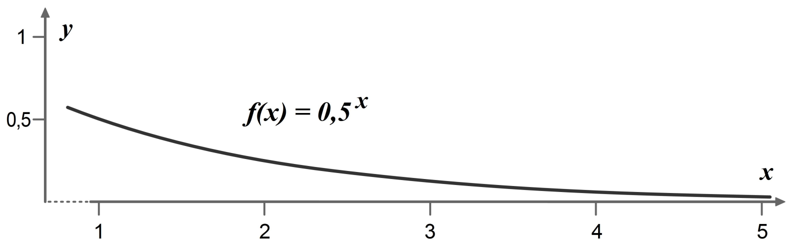


Abb. 26.2 Funktionsgraph von $f(x) = 0,5^x$

Wir können nun angeben, wie groß der Flächeninhalt der blauen Fläche ist.

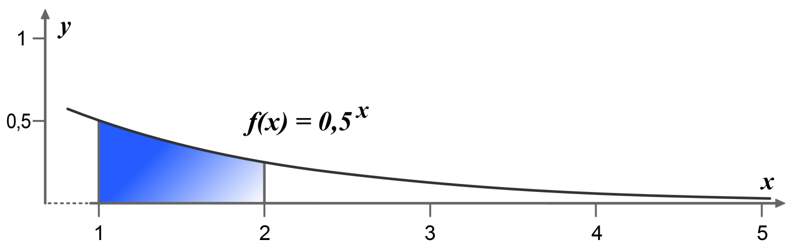


Abb. 26.3 Fläche zwischen Graph und x-Achse in den Grenzen von 1 bis 2

Mathematisch sieht das dann so aus:

$$\int_1^2 0,5^x dx = \left[-\frac{1}{ln(2)} \cdot 0,2^x\right]_1^2 \approx 0,3607$$

Die blaue Fläche hat also einen Flächeninhalt von ungefähr 0,3607 Flächeneinheiten.

Wir können uns nun überlegen, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn wir die rechte Grenze der Fläche immer weiter nach rechts verschieben. Dann entsteht eine Fläche, die durch den grünen Bereich dargestellt ist.

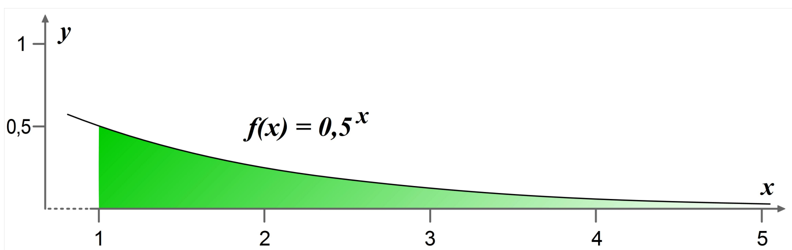


Abb. 26.4 Fläche zwischen x-Achse und Graph von $f(x) = 0,5^x$

Je weiter wir die rechte Grenze nach rechts verschieben, desto breiter wird die

Fläche und desto größer wird der Flächeninhalt. Trotzdem wird der Flächeninhalt nicht unendlich groß!

Es kann schwierig sein, sich das vorzustellen. Vielleicht liegt das an der Denkweise, wie sie in der Redewendung "Der Tropfen, der das Fass zum überlaufen bringt.“ zum Ausdruck kommt: Auch wenn das, was immer wieder zum Inhalt eines Fasses hinzugefügt wird, sehr klein ist - z. B. so klein wie ein Tropfen - so wächst die Wassermenge dennoch über alle Grenzen, wenn man nur genügend oft einen Tropfen hinzufügt.

Im Fall unserer Funktion können wir uns vorstellen, wie wir zur blauen Fläche die Fläche zwischen 2 und 3 hinzufügen, dann die Fläche zwischen 3 und 4, die Fläche zwischen 4 und 5 usw. Dann wird zwar das, was hinzugefügt wird, immer kleiner, trotzdem wird aber die gesamte Fläche immer größer. Wie kann also etwas, dass unendlich oft größer wird, *nicht* unendlich groß werden?

Um das Prinzip zu verstehen, wollen wir die grüne unendlich breite Fläche gedanklich mit einem einzigen Blatt Papier überdecken. Wir nehmen also ein quadratisches Blatt Papier mit der Seitenlänge 1 und legen es über das Intervall von 1 bis 2.

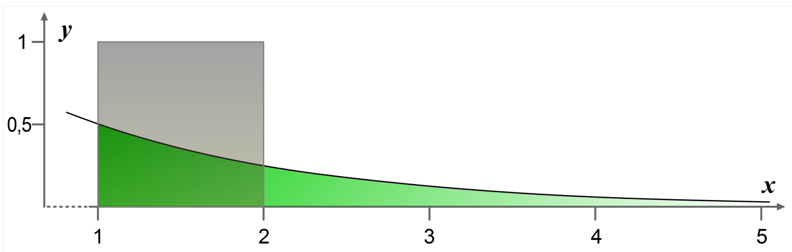


Abb. 26.5 Eine Flächeneinheit

Nun halbieren wir das Blatt ...

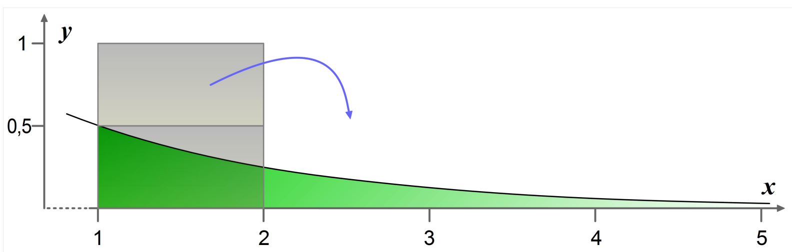


Abb. 26.6 Eine Flächeneinheit in zwei Hälften übereinander

... und legen die obere Hälfte neben die untere Hälfte.

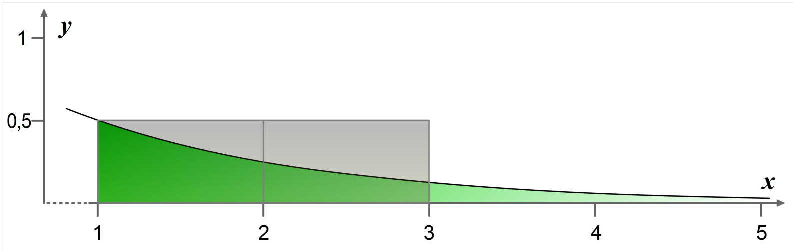


Abb. 26.7 Eine Flächeneinheit in zwei Hälften nebeneinander

Nun halbieren wir die rechte Hälfte ...

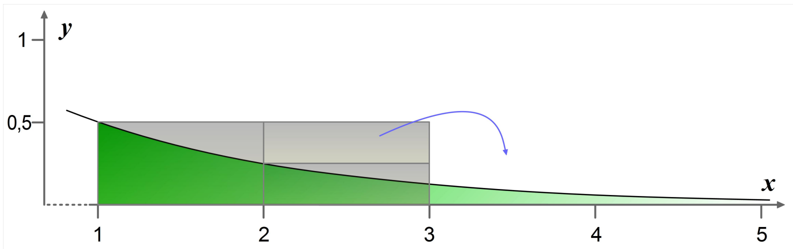


Abb. 26.8 Die zweite Hälfte in zwei Hälften übereinander

... und legen die obere Hälfte rechts neben die untere Hälfte.

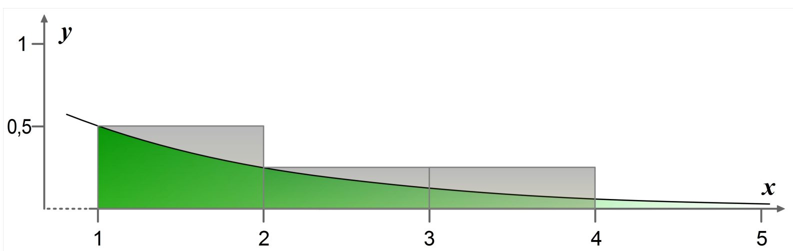


Abb. 26.9 Die zweite Hälfte in zwei Hälften nebeneinander

Das können wir - zumindest gedanklich - immer weiter so machen: Rechtes Blatt halbieren ...

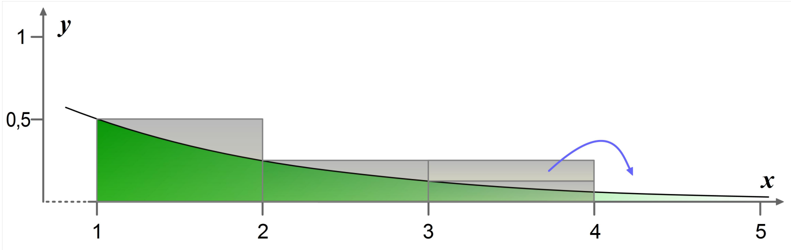


Abb. 26.10 Die zweite Hälfte der zweiten Hälfte in zwei Hälften übereinander

... und die obere Hälfte rechts neben die unter Hälfte legen.

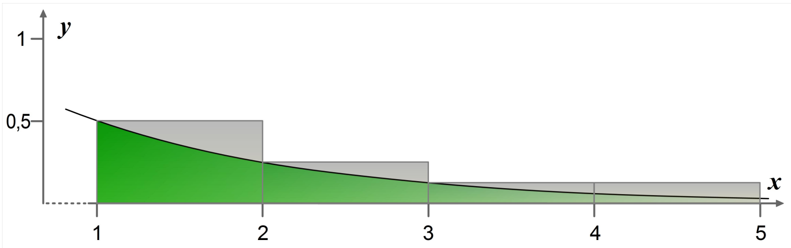


Abb. 26.11 Die zweite Hälfte der zweiten Hälfte in zwei Hälften nebeneinander

Auf diese Weise können wir die gesamte unendlich breite grüne Fläche überdecken. Dabei ist die Fläche des Papiers größer als die grüne Fläche. Deshalb muss der Flächeninhalt der grünen Fläche sogar kleiner als 1 sein. Mit der Integralrechnung können wir das ausrechnen:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n 0,5^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{ln(2)}\cdot 0,5^x\right]_1^n = \frac{1}{2\cdot\ln(2)} \approx 0,7213$$

Mit dieser etwas simplen Veranschaulichung können wir verstehen, wie etwas - wie hier der Flächeninhalt - immer größer werden kann, ohne unendlich groß zu werden. Das geht z. B. dann, wenn das, was hinzukommt, (auf geeignete Weise) immer kleiner wird.

Das Thema „Unendlichkeit“ ist in der Mathematik nahezu unerschöpflich. Da gibt es vieles zu verstehen. Leider kommt so gut wie nichts davon im Schulunterricht vor.

Kapitel 27

Der Hauptsatz

Um diesen Abschnitt zu verstehen, sollten Sie wissen, was Ableitungen und Integrale sind. Außerdem sollten Sie Steigungsdreiecke und Flächeninhaltsfunktionen kennen.

Um die intuitiven Ideen hinter dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung möglichst deutlich herauszustellen, wird etwas an der Exaktheit und Vollständigkeit der Darstellung gespart. So werden z. B. nicht alle Voraussetzungen des Hauptsatzes genannt oder es werden Zusammenhänge für eine bestimmte Funktion gezeigt, ohne immer darauf hinzuweisen, für welche Klasse von Funktionen diese Zusammenhänge ebenfalls richtig sind.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird auch Fundamentalsatz der Analysis genannt. Wie diese Bezeichnungen vermuten lassen, ist dies ein ganz wichtiger Satz. Um zu verstehen, was die Aussage dieses Satzes ist, schauen wir uns die Funktion ***f(x)*** an; außerdem noch deren Graph zwischen **x=0** und **x=4** und die dazugehörige Flächeninhaltsfunktion ***F_0(x)***. Der Funktionswert von ***F_0(x)*** an einer bestimmten Stelle **x** ist gleich dem Flächeninhalt der Fläche, die sich unter dem Graphen von ***f(x)*** im Intervall von 0 bis **x** befindet.

Der Vollständigkeit halber sei angegeben, um welche Funktionen es sich dabei konkret handelt. Es sind:

$$f(x) = \frac{3}{5}x\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$$

und

$$F_0(x) = \frac{3}{80}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{6}{5}x^2\ .$$

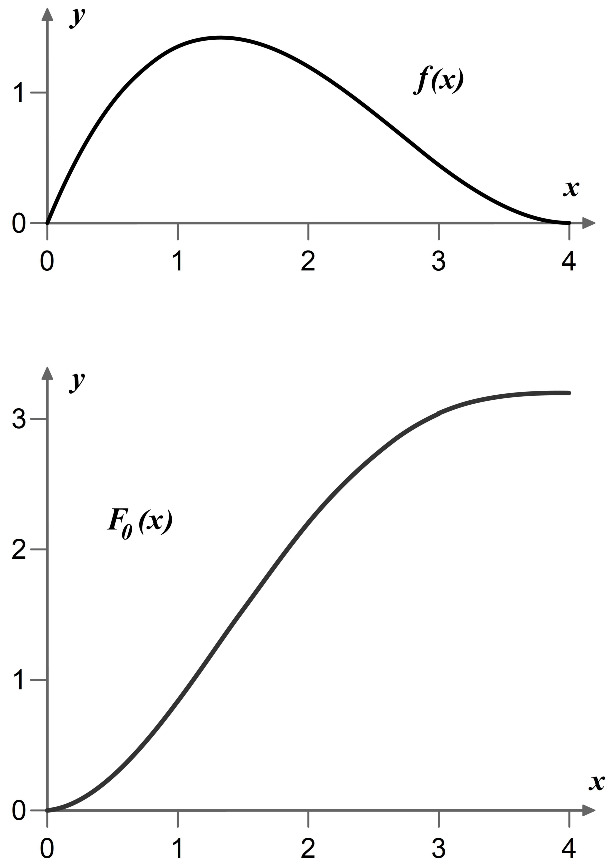


Abb. 27.1 Funktion und Flächeninhaltsfunktion

Der Funktionswert von $\boldsymbol{F_0(x)}$ ist bei **1** z. B. gleich **0,8375**, weil der Flächeninhalt der blauen Fläche gleich **0,8375** Flächeneinheiten (FE) ist.

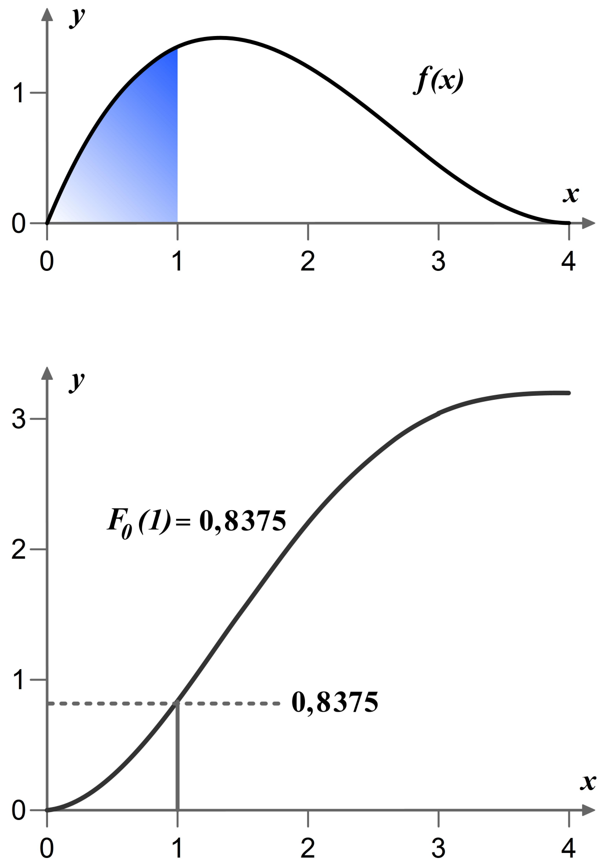


Abb. 27.2 Funktion und Flächeninhaltsfunktion an der Stelle $x = 1$

Der Funktionswert von $\boldsymbol{F_0(x)}$ ist bei **2** gleich **2,2**, weil der Flächeninhalt der blauen und roten Fläche zusammen gleich **2,2** FE ist.

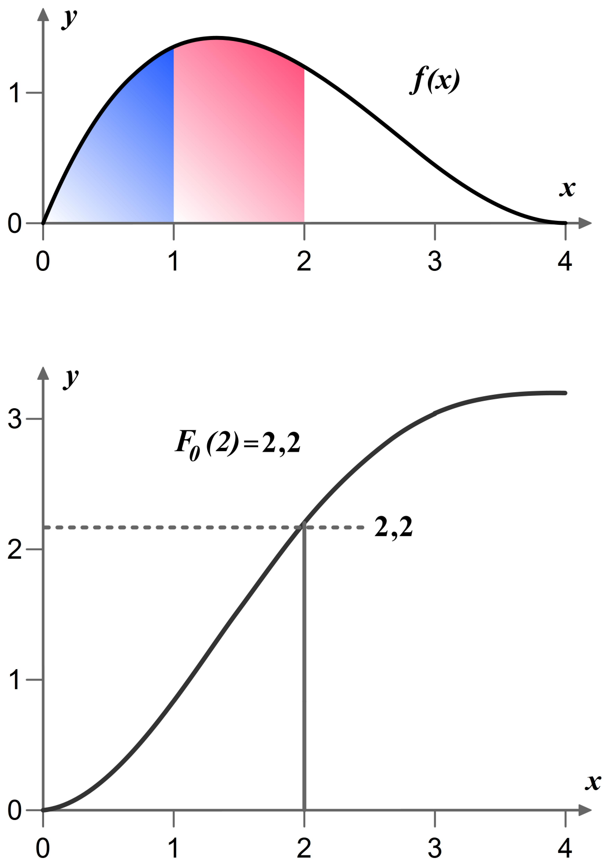


Abb. 27.3 Funktion und Flächeninhaltsfunktion an der Stelle $x = 2$

Der Hauptsatz besagt nun: Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ***F_0(x)*** an jeder Stelle ***x*** ist genauso groß wie der Funktionswert von ***f(x)*** an dieser Stelle. In kurz also:

$$\left(F_0(x)\right)' = f(x)$$

Das bedeutet: Die Steigung des Graphen der Flächeninhaltsfunktion an irgendeiner Stelle ist genauso groß wie der Funktionswert *der* Funktion, deren Fläche unter dem Graphen die Flächeninhaltsfunktion angibt. Das ist zumindest erstaunlich! Schließlich haben die Bestimmung der Fläche unter einem Graphen und die Bestimmung der Steigung eines Graphen vordergründig nichts miteinander zu tun.

Schauen wir uns genauer an, was das für unser Beispiel bedeutet: Wir suchen uns irgendeinen Punkt aus, z. B. $(3|F_0(3))$ und zeichnen die Tangente an den Graphen in diesem Punkt ein. Wenn wir dann ein Steigungsdreieck einzeichnen, deren horizontale Seite die Länge 1 hat, dann ist die vertikale Seite genauso groß wie der Funktionswert der Funktion ***f(x)*** an der Stelle 3.

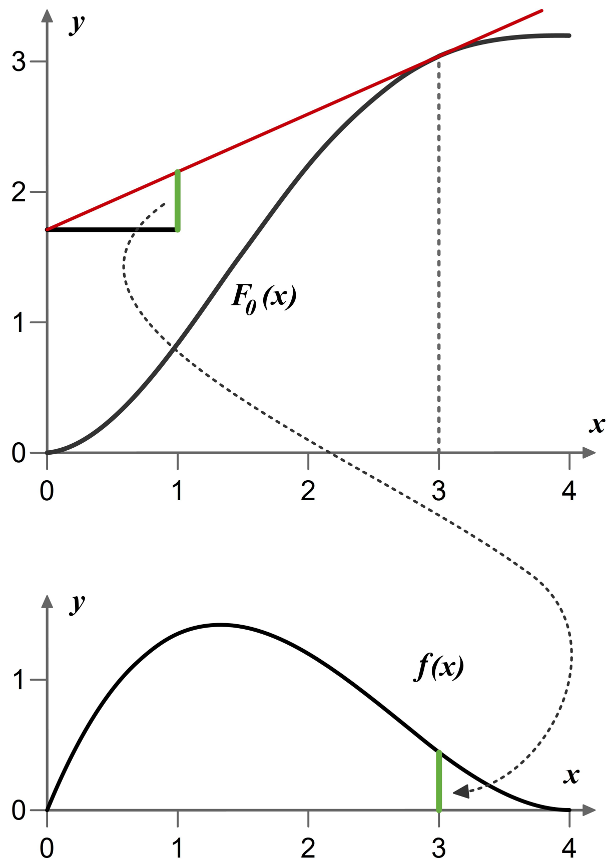


Abb. 27.4 Steigung der Flächeninhaltsfunktion bei $x = 3$

Warum ist das so?

Betrachten wir zunächst, wie die Funktionswerte der Ausgangsfunktion ***f(x)*** etwas mit der Steigung der Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$ zu tun haben.

Im nächsten Schaubild sehen wir, wie die Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{F_0(x)}$ z. B. im roten Bereich stärker steigt als im orangefarbigen Bereich. Das ist so, weil die Funktionswerte der Ausgangsfunktion ***f(x)*** im roten Bereich größer sind und deshalb zwischen $x = 1$ und $x = 2$ mehr Fläche hinzu kommt als im orangefarbigen Bereich zwischen $x = 3$ und $x = 4$, wo die Funktionswerte von ***f(x)*** kleiner sind.

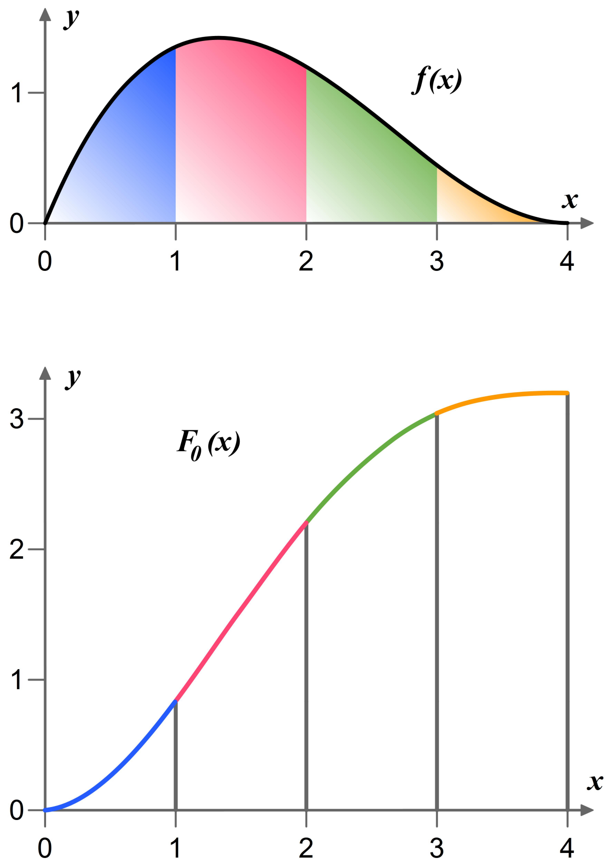


Abb. 27.5 Funktionswerte von $f(x)$ und Steigungen von $F_0(x)$

Wir sehen also: Je größer die Steigung der Flächeninhaltsfunktion $F_0(x)$ ist, desto größer müssen auch die Funktionswerte von $f(x)$ sein.

Wir könnten es nun damit bewenden lassen und stolz darauf sein, den großen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf eine geradezu vulgär einfache Idee zurückgeführt zu haben. Doch wir wollen noch weiter gehen und uns anschaulich klar machen, wie die Steigung der Flächeninhaltsfunktion $F_0(x)$ an jeder Stelle tatsächlich exakt so groß sein muss wie der Funktionswert von $f(x)$.

Um das ganz genau sehen zu können, definieren wir eine stückweise konstante Funktion $k(x)$ mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt der blauen Flächen unter dem Graphen von $f(x)$ genauso groß sein soll wie der Flächeninhalt der blauen Fläche unter dem Graphen von $k(x)$. Das gleiche soll auch für die andersfarbigen Flächen gelten.

Weil die Funktion $k(x)$ auf dem Intervall $(0;1)$ konstant ist, hat die Flächeninhaltsfunktion $K_0(x)$ auf diesem Intervall eine konstante Steigung. Das gleiche gilt auch für alle anderen Intervalle, auf denen $k(x)$ konstant ist.

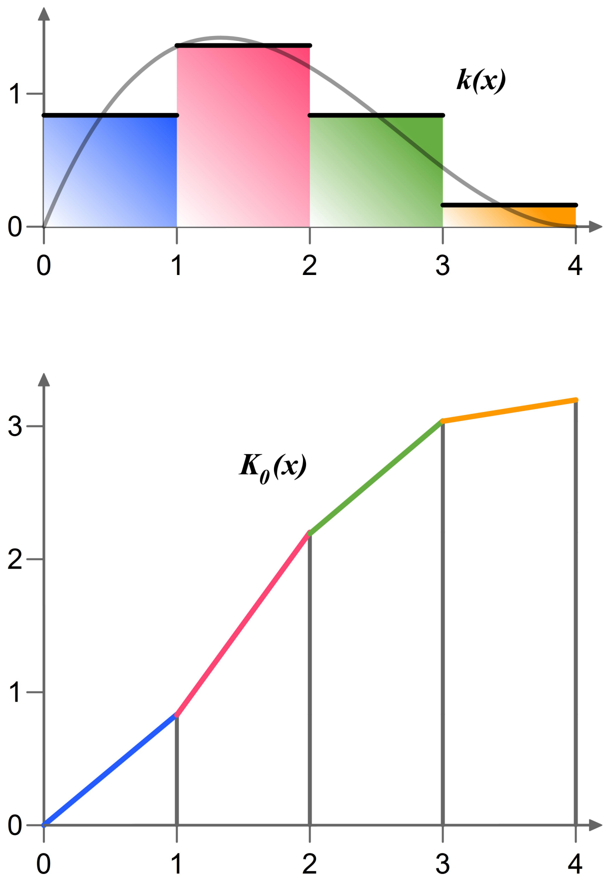


Abb. 27.6 Funktion und Flächeninhaltsfunktion

Und jetzt kommt der entscheidende Gedanke: Die Fläche des blauen Rechtecks unter dem Graphen von ***k(x)*** berechnen wir mit *Höhe mal Breite*. Weil die Breite gleich 1 ist, ist die Höhe des Rechtecks exakt gleich dem Wert des Flächeninhalts. In diesem Fall gleich 0,8375.

Der Funktionswert der Flächeninhaltsfunktion ***K₀(x)*** ist bei $x = 1$ gleich dem Flächeninhalt des blauen Rechtecks - also gleich 0,8375. Die Steigung der Flächeninhaltsfunktion ***K₀(x)*** auf dem Intervall $(0;1)$ ist gleich: *vertikale blaue Strecke* ***v*** *durch horizontale schwarze Strecke* ***h***, also gleich $0,8375 : 1$ und damit gleich $0,8375$ - also exakt gleich dem Funktionswert der Funktion ***k(x)*** auf diesem Intervall!

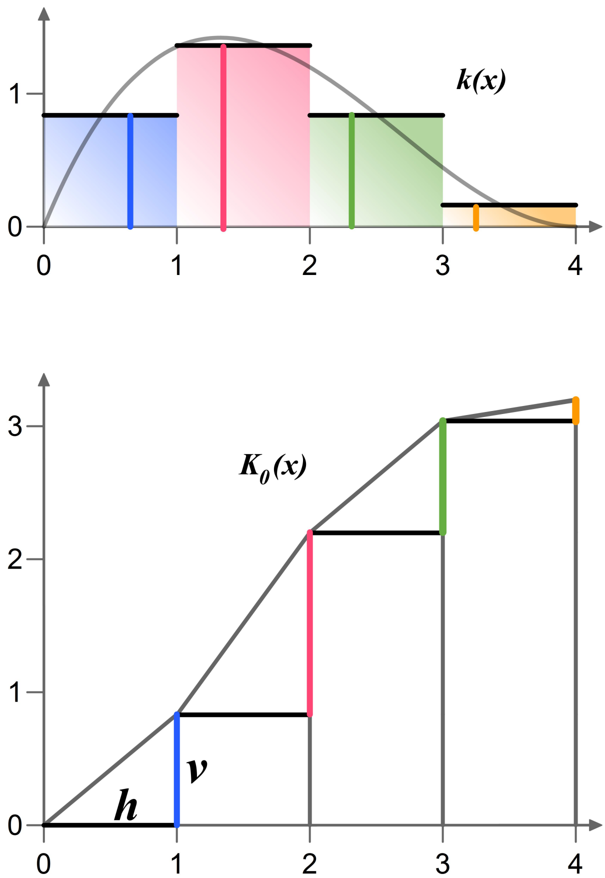


Abb. 27.7 Stückweise konstante Funktion ***k(x)*** und stückweise lineare Flächeninhaltsfunktion $\boldsymbol{K_0(x)}$

Das gleiche gilt auch für die anderen farblich markierten Intervalle.

Nun haben wir zwar nicht den Hauptsatz in seiner ganzen Allgemeinheit anschaulich bewiesen, aber wir haben eine sehr simple Idee gefunden, die deutlich macht, warum die Funktionswerte der Ausgangsfunktion genau so groß sein müssen wie Steigungen der Flächeninhaltsfunktion - zumindest für eine stückweise konstante Funktion ***k(x)***, die so ähnlich ist wie ***f(x)***.

Wenn wir unsere Überlegungen auf alle möglichen stückweise konstante Funktionen ausweiten, haben wir sogar eine anschauliche Erklärung des Hauptsatzes für solche Funktionen, die der Ausgangsfunktion ***f(x)*** beliebig nahe kommen können.

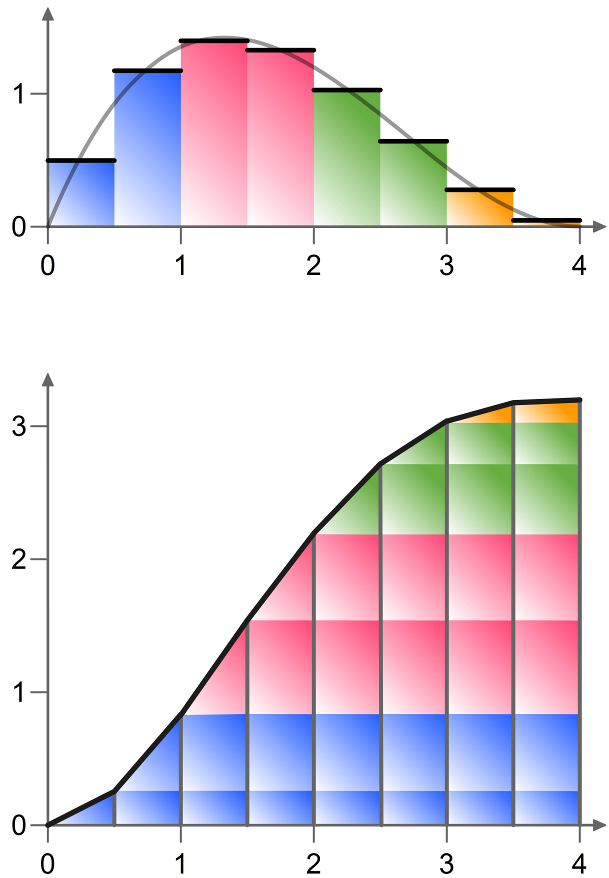


Abb. 27.8 Feinere Einteilung